

極値問題の図表示と曲面の形状把握に関する調査

工学院大学・工学部 北原 清志 (Kiyoshi Kitahara)
Department of Engineering,
Kogakuin University
東邦大学・薬学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Pharmaceutical Sciences,
Toho University

1 はじめに

本研究は大学または高等専門学校の数学教育において、図入り教材のもつ役割・効果・意味などについて考察し、数学的認識や理解の特徴を教育的視点から分析することにより、教育効果の高い教材を作成するための指針を、具体的な教材例を用いた研究授業を通して探究するものである。

今回は多変数関数の極値問題について考察する。この単元は理系の大学または高等専門学校の基礎数学において必ず扱う単元であり、微積分学の中心課題の一つである。特に2変数関数の極値問題は直感的なグラフが描きやすく比較的抽象度が低いという点、停留点におけるヘッシアン符号と曲面の形状とを結び付けやすいという点、さらに、線形代数の理論を使わずに2次部分の特徴を表現しやすい点など、初学者を対象とする基礎数学担当の教員にとっては非常に貴重な教材であると考えられる。

授業は印刷配付物をメインに扱い、プロジェクタを補助教材として用いる。特に印刷された曲面の形状を十分把握してもらうために、数式処理ソフトを直接用いて描いた曲面をプロジェクタで投影し、様々な方向から観察させる。今回は学生の3次元図形に対する理解度と認識の特徴を調べるために、曲面に対して座標軸がどのように見えるかをプリントに書き込んでもらい、回収して分析した。

プリントは $\text{\TeX}$ を用いて作成し、プリントに載せた図形はすべて $\text{\KpTpic}$ を用いて描いている。 $\text{\KpTpic}$ は単色線画を基本とした描画機能を持ち、非常に精度の高い出力が可能であり、授業等で利用するために大量に印刷して配布する教材作成に向いている。

2 授業計画

図を利用した授業を組み立てるにあたって特に次の5点を考慮した。

1. 数式を伴う教材としては最も質の高い印刷物を作成できる $\text{\TeX}$ を用い、 $\text{\TeX}$ 文書の中に $\text{\KpTpic}$ を用いて描いた3次元図を挿入して学生への配布資料とする。

2. KETpic による 3 次元図は曲面の全体図・断面図・拡大図などで、正確ではあるが曲面の特徴が強調されていて理解しやすいシンプルな図とする。
3. 配付印刷物における図をより意識的に、より正確に理解してもらうために、数式処理ソフトによって描いた曲面をプロジェクタで投影し、連続的に回転しながら様々な方向から観察させる。
4. 印刷された曲面の図からどの程度正確に曲面の形状を理解しているかを調査するために、配布印刷物の曲面図の中の座標軸を、見える部分と見えない部分に描き分ける課題を課す（課題を課すことによって授業への参加を促す効果も大きい）。
5. 停留点の近傍における曲面の断面曲線を高い精度で描き、様々な方向での断面曲線群の関係を理解させる。

今回扱う関数は次式で与えられ、極値問題においては典型的な関数である。

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

2.1 曲面の表示

図 1, 図 2 にグラフの概形を示す。座標軸がすべて点線で書かれていることに注意してほしい。これは後で学生に作業をしてもらうための準備である。

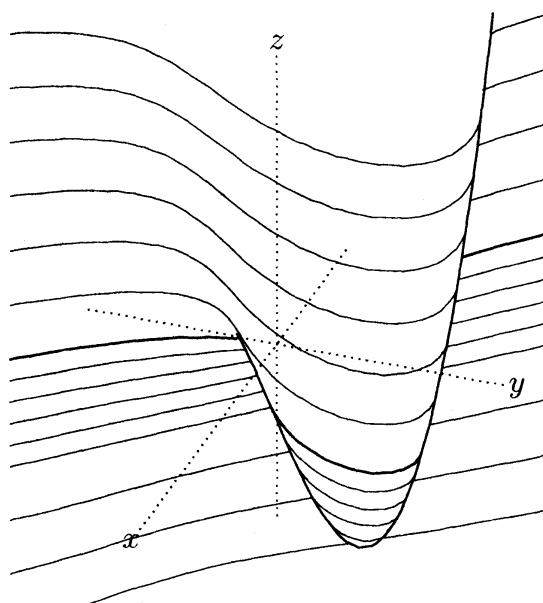


図 1: x 軸, y 軸の正方向から見た図

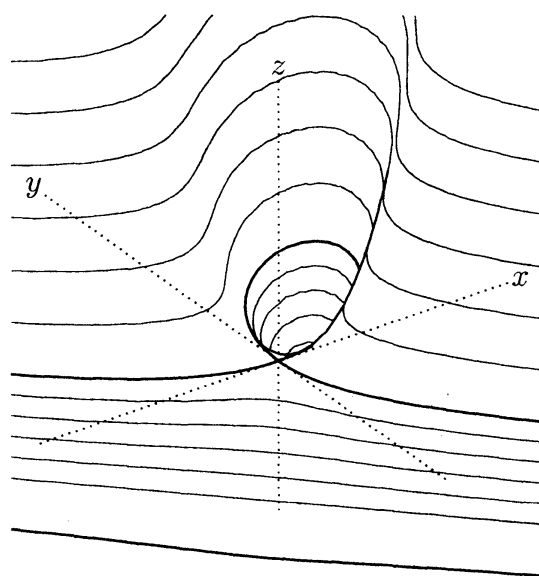


図 2: x 軸, y 軸の負方向から見た図

曲面の図に親しんでいない学生にとっては、これらの図だけで 3 次元空間内の曲面の様子を理解するには困難が伴うと考えられる。実際の授業では次に示す手順に従って学生に作業を行わせた。

1. 数式処理ソフト上で同一曲面のグラフを描き、それをプロジェクタによって大画面に投影し回転して、様々な方向から曲面の様子を観察させた。数式処理ソフトによる描画では座標軸に関する陰線処理は行われていない。
2. 座標軸の見える部分を実線でプリントの図中に書き込ませる作業を行わせた。作業の経過を通してより詳細に曲面の様子を観察し理解を深めることができる。
3. 作業終了後プリントを回収し、解答として図3、図4を配付した。

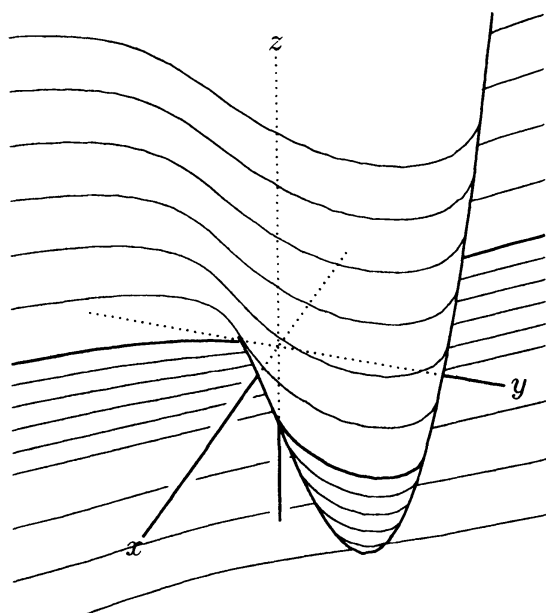


図3: x 軸, y 軸の正方向から見た図

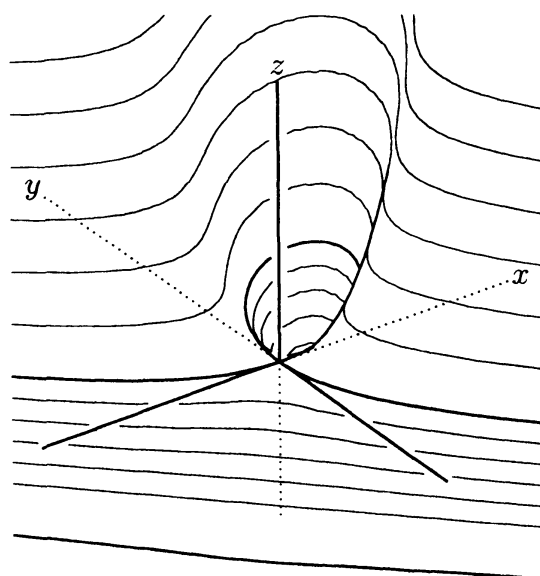


図4: x 軸, y 軸の負方向から見た図

2.2 停留点近傍での曲面の表示

停留点（鞍点と極小点）を拡大表示し、曲面の様子を十分に観察させる。

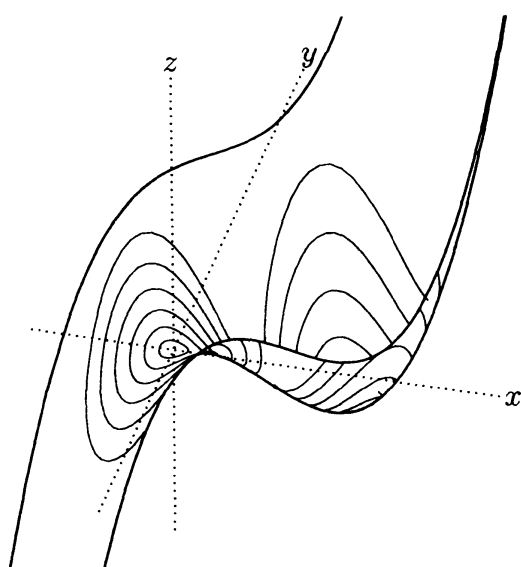


図5: 鞍点と極小点

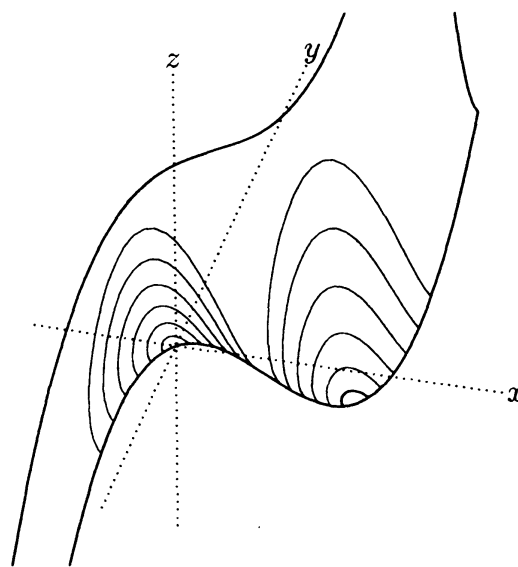


図6: 曲面を平面 $y = x$ で切取る

図6は曲面を平面 $y = x$ で切り取った様子を表す。図5よりこちらの方が停留点の様子をより分かり易く表現しているのではないかと考えたが、実際に描いてみると図5に比べて立体感に乏しく意外な結果であった。しかし、断面曲線を観察するという視点では重要な意味を持つ図である。

次に示す一連の図形は、曲面の原点近傍を平面 $y = \tan \theta \cdot x$ で切り取ったものを表す。これらはプロジェクタで投影して学生に見せるが、特に切り口の曲線の変化に着目するように注意を与える。

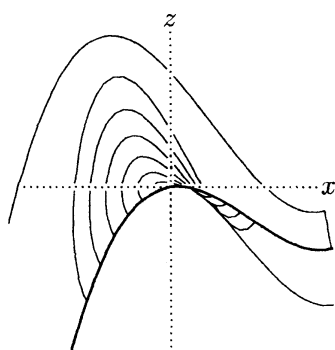


図7: $\theta = 30^\circ$

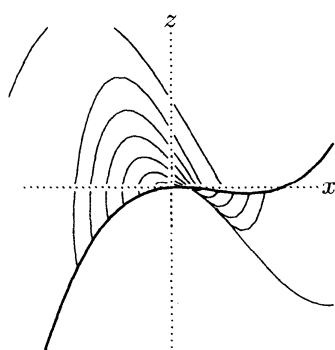


図8: $\theta = 15^\circ$

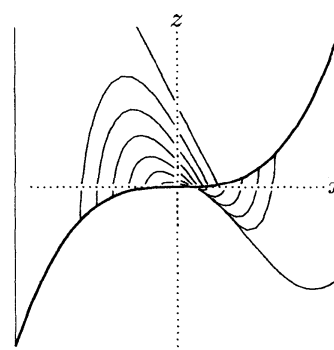


図9: $\theta = 0^\circ$

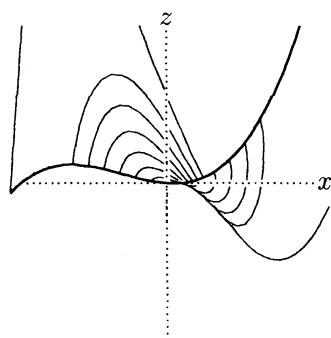


図10: $\theta = -15^\circ$

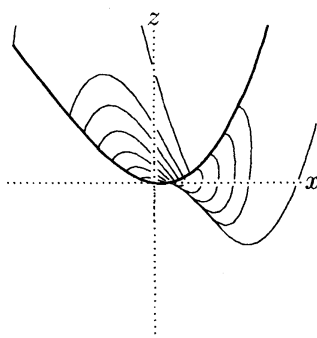


図11: $\theta = -30^\circ$

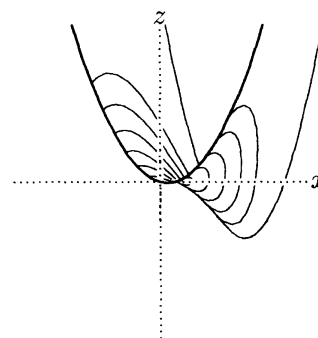


図12: $\theta = -45^\circ$

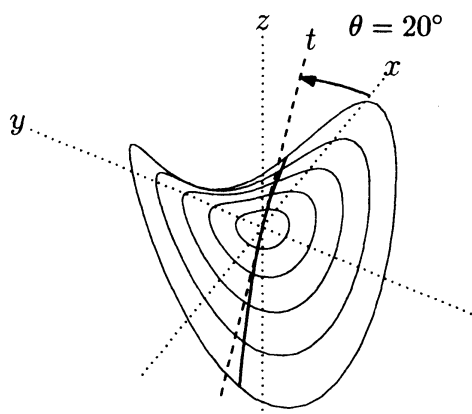
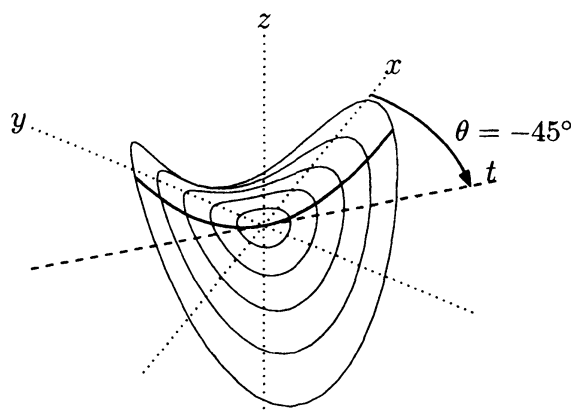
切り口の曲線のより正確な様子を調べるためには2次元曲線として描く必要がある。

2.3 原点近傍での考察

曲線 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ の原点近傍での形状をより具体的に考察するために、 θ をいくつかの特定の値、 t をパラメータとする曲面上の曲線

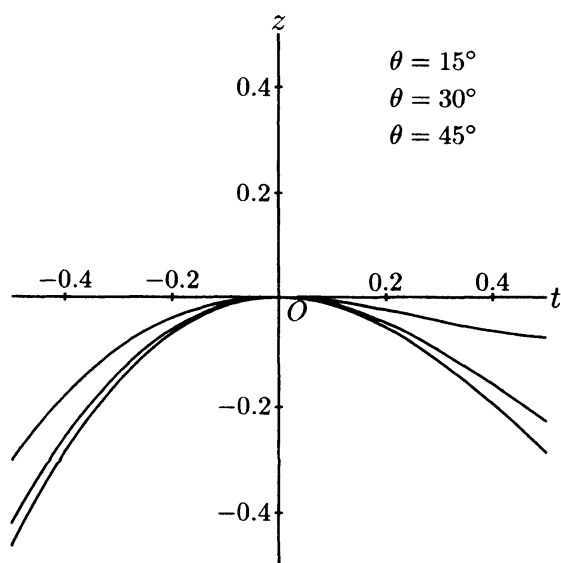
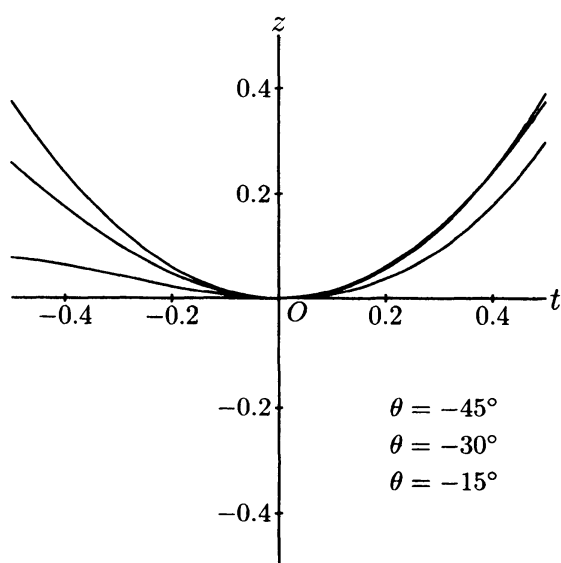
$$x = t \cos \theta, \quad y = t \sin \theta, \quad z = -\frac{3}{2} \sin 2\theta \cdot t^2 + (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) t^3$$

を考える。これを今後 t 曲線と呼ぶ。 t 軸は xy 平面上の直線で x 軸と θ の角をなすものと見なすことができる (図13, 図14を参照)。

図 13: t 曲線と t 軸, $\theta = 20^\circ$ 図 14: t 曲線と t 軸, $\theta = -45^\circ$

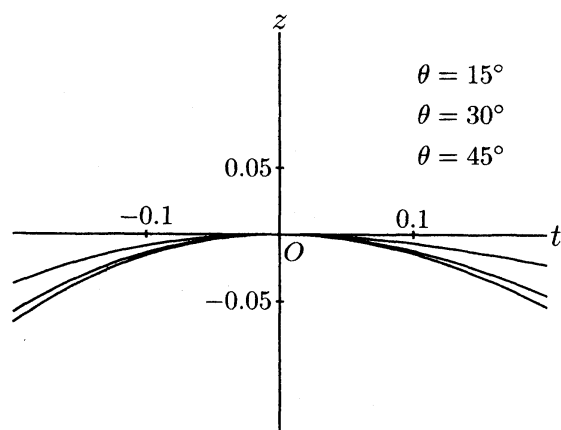
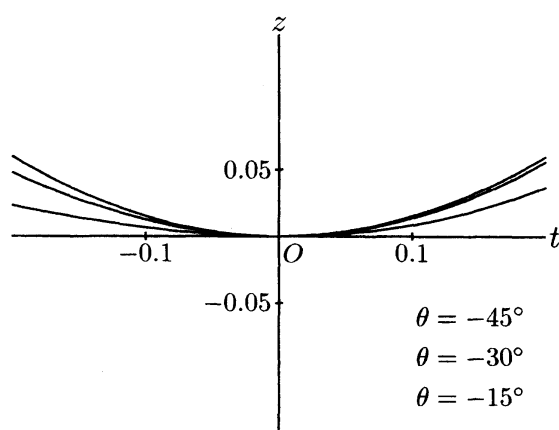
t 曲線に於いて t^2 の係数が 0 から離れていて, 例えば $|\sin 2\theta| \geq \frac{1}{2}$ で, t の動く範囲が十分小さければ, t^3 の項の影響は小さく, t 曲線は放物線で近似することができる.

t 軸を横軸に z 軸を縦軸にとっていくつかの θ の値に対して t 曲線を描いたものが図 15, 図 16 である.

図 15: $\frac{1}{2} \leq \sin 2\theta \leq 1$ 図 16: $-1 \leq \sin 2\theta \leq -\frac{1}{2}$

t の範囲: $-0.5 < t < 0.5$

図 15, 図 16 を見れば t 曲線は放物線からは大分ずれていることがわかる. t の動く範囲をもっと制限するとより放物線に近く見えるようになる.

図 17: $\frac{1}{2} \leq \sin 2\theta \leq 1$ 図 18: $-1 \leq \sin 2\theta \leq -\frac{1}{2}$

t の範囲: $-0.2 < t < 0.2$

t の範囲を小さくしても放物線相互の関係から (例えば左右の対称性がないなど) これらの曲線は放物線でないことが見て取れる. このように実際にグラフを描いてみると, 今まで何気なく使っていた「 t が小さければ 3 次の項が無視できる」という言い方は少し乱暴な言い方に思え, 「3 次の項の影響が小さくなる」と言いたくなる. t の範囲をもっと小さくすることも考えられるが, t 軸と z 軸の目盛を等しく取る限り, z 方向の変化をはっきり見られるのはこの辺りが限界である.

2.4 極小点近傍での考察

曲面 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ に対して, 極小点近傍での考察を行う. 座標の平行移動

$$x = 1 + X, \quad y = 1 + Y, \quad z = -1 + Z$$

により

$$Z = 3(X^2 + Y^2 - XY) + X^3 + Y^3$$

となるから, t 曲線は次のようになる.

$$X = t \cos \theta, \quad Y = t \sin \theta, \quad Z = \frac{3}{2}(2 - \sin 2\theta)t^2 + (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)t^3$$

t^2 の係数に着目し, すべての θ に対して成り立つ次の不等式に注意する.

$$2 - \sin 2\theta \geq 1$$

いくつかの θ の値に対する t 曲線の変化の様子は図 19, 図 20 で示される.

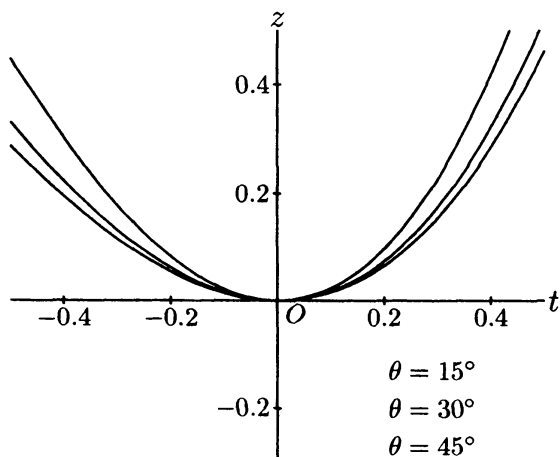


図 19：極小点近傍

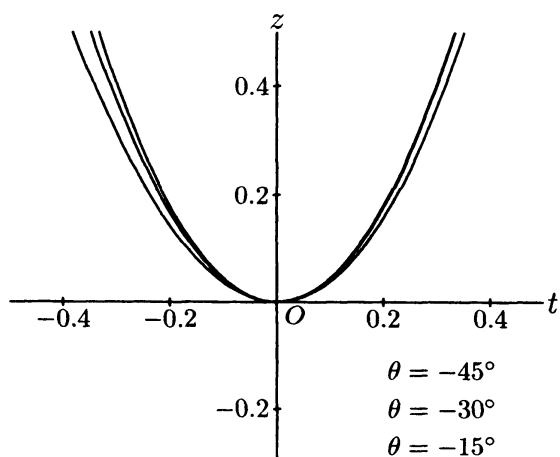
 t の範囲： $-0.5 < t < 0.5$ 

図 20：極小点近傍

t の範囲を制限して描いたのが次の図である。 t 曲線の 2 次の部分の係数はすべての θ に対して一定値より大きいので、3 次の部分の影響が小さいという意味でよい条件の場合であるが、細かく観察すると 3 次の影響が見て取れる。

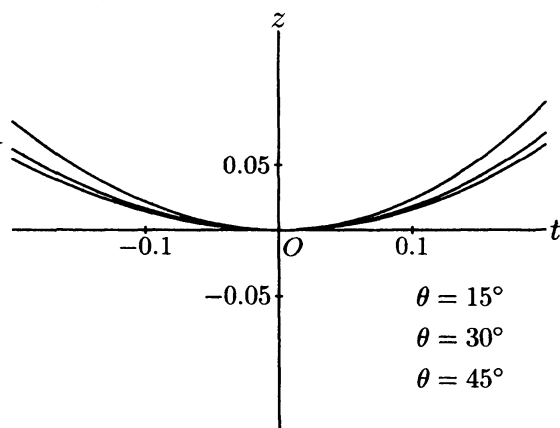


図 21：極小点近傍

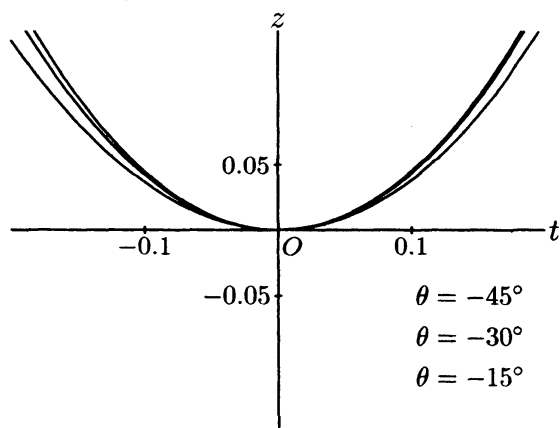
 t の範囲： $-0.2 < t < 0.2$ 

図 22：極小点近傍

2.5 ヘッシアンについて

与えられた 2 変数関数に対して座標の平行移動とテイラーの定理を用いて次の形が得られる。

$$Z = F(X, Y) = \frac{1}{2}(pX^2 + 2qXY + rY^2) + O(R^3)$$

$$p = F_{XX}(P), \quad q = F_{XY}(P), \quad r = F_{YY}(P), \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

前小節までに具体例によって見てきたように、曲面 $Z = F(X, Y)$ に対する t 曲線を考えよう。

$$X = t \cos \theta, \quad Y = t \sin \theta, \quad Z = \frac{1}{2}(p \cos^2 \theta + 2q \cos \theta \sin \theta + r \sin^2 \theta)t^2 + O(t^3)$$

Z における t^2 の係数を変形すると次の式が得られる.

$$Z = \frac{1}{4} \left\{ p + r + \sqrt{4q^2 + (p-r)^2} \sin 2\Theta \right\} t^2 + O(t^3)$$

$$2\Theta = 2\theta + \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2q}{\sqrt{4q^2 + (p-r)^2}} \quad \sin \alpha = \frac{p-r}{\sqrt{4q^2 + (p-r)^2}}$$

さらに

$$G(\Theta) = p + r + \sqrt{4q^2 + (p-r)^2} \sin 2\Theta$$

とおけば

$$G_{\max} = p + r + \sqrt{4q^2 + (p-r)^2}, \quad G_{\min} = p + r - \sqrt{4q^2 + (p-r)^2}$$

となり次の (1), (2), (3) が成り立つ.

$$(1) \quad p < 0, r < 0, pr - q^2 > 0 \iff G_{\max} < 0 \\ \implies t \text{ が小さいとき任意の } \theta \text{ に対して } Z < 0$$

$$(2) \quad p > 0, r > 0, pr - q^2 > 0 \iff G_{\min} > 0 \\ \implies t \text{ が小さいとき任意の } \theta \text{ に対して } Z > 0$$

$$(3) \quad pr - q^2 < 0 \iff G_{\min} < 0, G_{\max} > 0 \\ \implies t \text{ が小さいとき } |\sin 2\Theta| > C \text{ の角領域で } Z < 0 \text{ または } Z > 0$$

最後に具体例として取り上げた曲面に対する原点の近傍を視覚化すると図 23 が得られる. 原点近傍の円内が $-0.2 < t < 0.2$ に対応している.

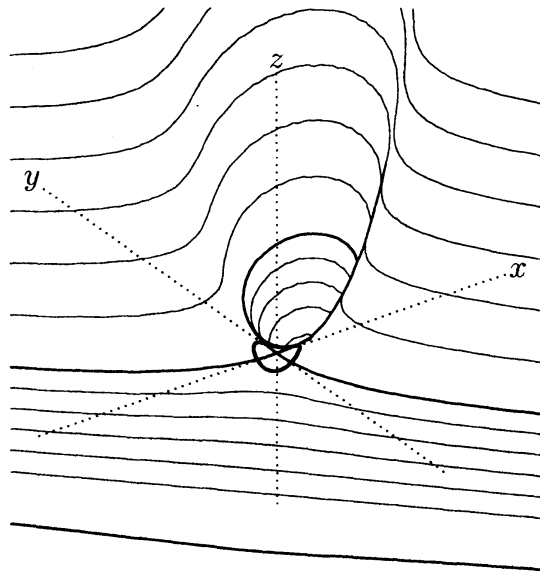


図 23: 考察の対象とした原点の近傍

3 曲面の形状把握に関する調査結果

本節では第 2.1 節の手順 1. から手順 3. に従って授業を行い, 回収した答案を分析した結果について報告する.

授業を行ったクラスは3クラスあり、A, B, C と名付ける。学生数は順に49名、47名、41名である。これらのクラスは作業手順1.における曲面の観察時間に違いがあり、

A: 5分以内の短い時間, B: 10～15分, C: 15～20分で納得がゆくまでとなっている。正答率は

図1: A: 28.6%, B: 34.0%, C: 39.0% 図2: A: 8.2%, B: 51.1%, C: 51.2%

である。図2に対するAクラスの正答率が異常に低いが、 x, y, z 各軸に対する間違え率が他のクラスより均等に高くなっていることが原因である。

図1に付いては、 z 軸の座標値の大きい先端部分が曲面の境界の外にはみ出していると見える可能性があり、図示の方法が不適當であったと考える事もできる。この部分だけを正しく描かなかった者を正解者に含めて正答率を計算すると次のようになる。

図1: A: 40.8%, B: 48.9%, C: 56.1%

計算し直すことによりBクラスとCクラスの図1, 図2に対する正答率が近い値になる。

ここに示した正答率は云わば完全正答率である。完全正答率で見る限りA, B, Cクラスの違いは少ないように見えるが、次に考察する間違え数で見ると、Cクラスが他のクラスの30%程度であり、作業手順1.における観察の効果が大きく現れている。

間違えの特徴を調べるために、各座標軸を3つまたは4つの部分に分割し部分ごとの間違え数について検討する。

まず図1に関して間違え数の多い順に一部を記述する。

1. z 軸の座標値の大きい先端部分が見えているように描いたものが最も多く、全クラスの合計学生数の40.1%であり、各クラスの間違え数もすべてのクラスで1番多かった。曲面が全空間に広がっていることはあらかじめ説明してあったが、図から得られる印象に引きずられる傾向を示している。従って、どのように図示するかという問題にはかなり注意を払う必要がある。
2. y 軸の負の先端部分が見えているように描いたものは合計学生数の31.4%であり、各クラスの間違え数もすべてのクラスで2番目に多かった。
3. x 軸の原点近傍正の部分が見えているように描いたものは合計学生数の20.4%であり、各クラスの間違え数も3番または4番目に多かった。しかし、この部分と原点でつながっている x 軸負の部分が見えるように描いたものは7.3%で非常に少なかった。
4. z 軸の負の先端部分が隠れているように描いたものは合計学生数の19.0%であり、前項目3とほぼ同じ比率であった。各クラスの間違え数も項目3と同様に多かった。しかし、 x, y 軸の見えている部分（正の先端部分）に対する間違えの割合はそれぞれ5.1%, 8.8%で非常に少なかった。一般に見えている部分は把握しやすいと考え勝ちだが、曲面との関わりが主要なファクターになる事がわかる。

図2に関して間違え数の多い順に一部を記述する。図1は間違えの最大値40.1%と最小値5.1%との差が非常に大きいのにに対して、図2では間違えの最大値29.2%と最小値17.5%の差が小さいことが特徴である。

1. 細かい部分だが、 z 軸の原点近傍、強調表示された曲面の輪郭線と曲線 $z = 0$ の間の部分を見えないと考えた間違いが最も多く、合計学生数の 29.2% であった。各クラスの間違え数は多いクラスと少ないクラスに分かれた。
2. z 軸の負の部分が见えているように描いたものは合計学生数の 27.0% であり、各クラスの間違え数もすべてのクラスで 2 番または 3 番目に多かった。
3. y 軸の正の部分が见えているように描いたものは合計学生数の約 26% であり、各クラスの間違え数は 2 番、1 番、4 番目であった。
4. y 軸の負の部分が隠れているように描いたものは合計学生数の 23.4% であり、 x 軸の正の部分が見えるように描いたものが約 21% であった。

これらの答案を調べていて図 2 に関して気が付いたことは、方程式 $z = 0$ で表される等高線を強調表示したことによって、学生に不要な誤解を与えた可能性があることである。実際、強調表示された曲面の輪郭線および等高線と z 軸との 2 つの交点で z 軸を分割し、見え方を変えて描いた答案が少なからずあった。

4 まとめと今後の課題

2 変数関数の極値問題に関する図表示を中心とする授業計画案の提示を行った。図表示とは一般概念に対するのひとつの例示であるが、一般概念により接近した図表示、或いは見る者をして一般概念へと導くような図表示とは何かについて考察を加え、その特徴を明らかにすることは今後の課題である。

今回はさらに、表示された図に対する理解の実態を曲面と座標軸との関係を通して調査・分析した。これらの調査は、3 次元の図を用いた授業を実施する場合に重要な参考資料を提供すると考えられる。

今回の調査結果からいくつかの点が明らかになった。

1. 3 次元の図から曲面の正確な形を把握することは初心者にとってはかなり難しい作業であると考えられる。
2. プロジェクタなどの手段を用いて曲面を動的に表示し、多方向から曲面を観察させることにより、理解はかなり進むことがわかった。ただし、曲面の観察には十分に時間をかけ、プリントされた曲面の図を手元に置いて印象を定着させることが必要である。
3. 誤答を分析することによって、教材作成における作図の問題点を明らかにすることができる。今回の問題点は、図 1 においては等高線を中途半端にしか描かなかったことであり、図 2 においては等高線を等質に描かなかったことである。

調査結果を踏まえて図を改良し、誤答分析その他の方法を用いて学生の図形認識の特徴を明らかにしてゆくことは今後の重要な課題である。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金基盤研究 C（課題番号 20500818）の補助を受けています。

参考文献

- [1] Kitahara K., Abe T., Kaneko M., Yamashita S., & Takato S.: "Towards a More Effective Use of 3D-Graphics in Mathematics Education —Utilization of KETpic to Insert Figures into LATEX Documents—", to appear in The International Journal for Technology in Mathematics Education, Vol. 17, Number 4, 2010
- [2] 金子真隆, 阿部孝之, 泉源, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫: 「線形代数学の教科書における挿図の利用について —KETpic 利用の可能性を中心に—」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674 「数式処理と教育」, pp.12–25, 2010
- [3] 北原清志, 高遠節夫: 「全微分に関する図入り教材の作成例とその研究授業報告」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674 「数式処理と教育」, pp.132–145, 2010
- [4] Takato S., Akemi G., & Iglesias A.: "Use of ImplicitPlot in Drawing Surfaces Embedded in L^AT_EX documents", 2009 International Conference on Computational Sciences and its Applications, IEEE, 2009
- [5] 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 北原清志, 越川浩明, 深澤謙次, 高遠節夫: 「空間曲面の稜線描画の一方法について—Scilab 版 KETpic の改良—」 日本数学会 2009 年度年会応用数学分科会講演アブストラクト, 2009
- [6] 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 関口昌由, 山下哲, 北原清志, 深澤謙次, 高遠節夫: 「挿図教材の実態調査について」, 日本数学教育学会誌第 91 回総会特集号, p.543, 2009
- [7] 北原清志, 高遠節夫: 「級数を扱う授業における KETpic で作成した挿図教材の使用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.90–105, 2009
- [8] Sekiguchi M., Abe T., Izumi H., Kaneko M., Kitahara K., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: "Monochrome Line Drawings of 3D Objects due to the Programmability of KETpic", 2008 International Conference on Computational Sciences and its Applications, pp. 277–283, IEEE 2008
- [9] Kaneko M., Abe T., Izumi H., Kitahara K., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: "A Simple Method of the TeX Surface Drawing Suitable for Teaching Materials with the Aid of CAS", Lecture Notes in Computer Science 5102, pp. 35–45, Springer-Verlag 2008