数理解析研究所講究録
第 1736 巻 2011 年 176-183

最適多数回停止問題の自由境界問題とスイング・オプション[1]

芝浦工業大学・数理科学科 穴太 克則 (Katsunori Ano)
Department of Mathematical Sciences,
Shibaura Institute of Technology

1 はじめに

次のような最適多数回停止問題の自由境界問題を考える. 有限期間 $[0,T]$ 内に高々$\ell(\ell\in\mathbb{N})$ 回権利行使(ここではこれを「停止」と読み替える)できる. 資産価格変動は幾何ブラウン運動に従うとする. 権利行使価格を $K>0$ とする. 資産価格が x のときに権利行使したときの利得は $(K-x)^{+}$. 権利行使回数が多数回のオプションは原油市場, 通貨市場で相対取引されている. 契約に応じて様々な条件が付加した多様なスイング・オプションが存在するが, ここではこの最適多数回問題を Carmona and Touzi (2008) に準じ, 便宜上アメリカン・プット・スイング・オプションと称することにする. 最適停止時刻と無裁定価格を見つけることが問いになる. 既に彼らにより, 所謂マルチンゲール・アプローチ (Karazas and Shreve [9] Appendix 参照) によって, この問題は解かれている.

動機の一つは, 最適停止問題を解く有効な手法の一つとして知られている自由境界問題により, この問題を解く別のアプローチを提示することである. アメリカン・プット・オプションの 1 回停止の最適停止問題に対する自由境界問題は Jacka (1991) らにより定式化され唯一解であることが示されている. しかし, 複数個以上の停止回数を持つ自由境界問題は著者の知る限りにおいて最適停止問題の分野でほとんど研究されていない. また, アメリカン・プット・スイング・オプションの自由境界問題も未だ着手されていない. 本論文ではアメリカン・プット・スイング・オプションの最適多数回停止問題に対する自由境界問題を構成する一つ一つを証明し, 定式化する. そしてその自由境界問題の解(最適停止境界と最適値のペア)が最適多数回停止問題の唯一解であることを示す.

動機のもう一つは, 昨年に数理ファイナンスにおける最適停止問題と自由境界問題を大学院で講義していた折に, 非受講生であったが金融工学を専攻する大学院生数名がリアル・オプションのいくつかの論文を携えて来たときの, 困惑を伴った至極当たり前の質問にある. 複合的なリアル・オプションに対する最適停止問題を自由境界問題で解く際の一般的なステップに整理して, 彼らの質問を要約します.

1. **(Step 1) 複合的リアル・オプション問題**:モデルはこれこれ. 負債による資金調達. 企業が倒産することもある. 停止時刻(意思決定のタイミング)が複数. 幾何ブラウン運動で投資案件資産価値や利益などが駆動. プレイヤーが複数以上, などなどの問題に応じて, 最適停止問題や最適停止ゲーム問題に定式化. このステップの質問はなし.

[1]This paper is an abbreviated version of Ano [1].

2. **(Step 2)　最適停止時刻は閾値型でこれこれ**:いきなり閾値型（最適停止境界により特徴付けられる）の最適停止時刻を提示→天下りに書下し，証明（ないし証明に準じる説明）はしてないのですが，いいのですか？ これは「仮定です」とすら書いてないですけれどいいのですか？（この質問は，最適停止領域，最適継続領域の証明をどうするのですか？と同じで，その証明は停止時刻が複数個以上になると簡単ではない．まして，意思決定者が単数でも多数のゲームでも，停止の順序が定まっていなくて「同時に」複数個の最適停止時刻を定めなければならないときには，利得関数にも依存するが，この証明は途端に難しくなる.)

3. **(Step 3)　Smooth fit & Continuous fit の条件，境界条件など**：いきなり提示→最適停止問題の最適性の条件だとかいって天下りに書下し，証明はしてないのですが，いいのですか？(例えば，smooth fit は最適停止境界上で示されるので，それ自体の証明の前に，そもそも停止境界により特徴付けられる閾値型停止時刻が最適であることを証明していなければなりません.)

4. **(Step 4)　自由境界問題を定式化**:→自由境界問題の解（停止境界と最適値）が最適停止問題の唯一解になることを証明していないのですが，いいのですか？（所謂 Verification 定理がない，という疑問です.)

5. **(Step 5)　数値計算し，最適停止領域や最適値をグラフ化．感度分析などして，ファイナンス的意味を吟味**:→もし Step 2,3,4 が危うければ，意味があるのですか？ 証明もしていないのに論文の最後まで最適〇〇と書き続けているのはいいのですか？ 様々なモデルを沢山作れるでしょうが，証明もせずにやり方だけを適用して，要は数値計算してるだけですが，それは研究論文と言えるのですか？(これらは研究としては至極当たり前の質問で，返答に窮しました.)

本論文の意義は最初に述べた研究上の動機につきることにはかわりはないが，同様の疑問を持たれている学生さんたちに応え，最適多数回停止問題を自由境界問題で解くことができるステップの「一例」を提示することをもう一つの動機とする.

2　アメリカン・プット・スイング・オプションの最適多数回停止問題

安全資産過程 S は利子率 $r>0$ に対して，$dS_t/S_t = rdt$. 資産価格過程 X_t の変動は，フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上の幾何ブラウン運動に従う:

$$\frac{dX_t}{X_{t^-}} = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{1}$$

P に関する同値マルチンゲール測度を $\tilde{P}$:

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \mathcal{E}\left(-\int_0^T \theta_t dW_t\right) \tag{2}$$

ここで, $\mathcal{E}(\cdot)$ は stochastic exponential seimartingale. $\{X_s^t(x)\}_{s\geq t}$ を確率微分方程式 (1) を満たす RCLL version とする. 良く知られているように同値マルチンゲール測度 $\tilde{P}$ のもとで

$$X_s^t(x) \;\; = \;\; x\exp\left\{\sigma(\tilde{W}_s-\tilde{W}_t)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)\right\}. \tag{3}$$

また $X_s(x)=X_s^0(x)$ と定義する. $g(x)$ を資産価格 x で停止することから得られる利得を表す連続な実数値関数とする.

問題は同値マルチンゲール測度 $\tilde{P}$ のもとで $V^{[\ell]}(t,x)=\tilde{V}^{\ell}(T-t,x)$ を解くこと:

$$V^{[\ell]}(t,x) := \sup_{0\leq\tau_\ell<\tau_{\ell-1}<\cdots<\tau_1\leq t}\tilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=1}^{\ell}e^{-r\tau_k}g(X_{\tau_k}(x))\right], \tag{4}$$

ここで, $\tilde{\mathbb{E}}$ は $\tilde{P}$ に関する期待値, $\tau_k, k\in\{1,2,\cdots,\ell\}$ は $[0,T]$ に値をとる停止時刻, また, $\tau_1\leq t$ a.s., そして各 $k=2,\cdots,\ell$ と $\delta>0$ に対して $\{\tau_{k-1}\leq t\}$ 上で $\tau_k\geq\tau_{k-1}+\delta$ a.s. δ は権利行使のときに必要となる事務的な時間と解釈する. t は満期までの残り時間であることに注意. 初期条件 X_0 を強調したいときには, $X_t(X_0)$ と表記する.

時刻 t で資産価格 x に直面していて, この時刻以後 k 回の停止（権利行使）ができるとき, 状態 (t,x,k) にあると称することにする. 状態 (t,x,k) で停止したときの最大期待利得は

$$U^{[k]}(t,x) \;\; := \;\; g(x)+e^{-r\delta}\tilde{\mathbb{E}}\left[V^{[k-1]}((t-\delta)^+,X_\delta(x))\right]. \tag{5}$$

境界条件は, 各 $k\in\{1,2,\cdots,\ell\}$ と $\forall x\in\mathbb{R}^+$ に対して,$V^{[k]}((k-1)\delta,x)=U^{[k]}((k-1)\delta,x)$. 例えば, 1 回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションに対しては, $g(x)=(K-x)^+$ であり, 境界条件は $V^{[1]}(0,x)=(K-x)^+$. (5) の右辺内の $(t-\delta)^+$ は, 残り時間 t が δ 未満になったときには権利行使できないことを反映する.

マルコフ過程に対する最適停止の一般理論 (Shiryaev [16] 参照) から, 最適停止時刻は

$$\tau^*(t,x,k)=\inf\{0\leq s\leq t: V^{[k]}(t,x)=U^{[k]}(t,x)\}. \tag{6}$$

更に

$$\{e^{-rs}V^{[k]}(t,X_s(x))\}_{\{0\leq s\leq\tau^*(t,x,k)\}}\text{は}\tilde{P}-\text{マルチンゲール}.$$

(6) のままでは最適停止時刻は何ら有用な情報をもたらさない. 最適停止時刻が最適停止境界で特徴付けられる閾値型であることを, $V^{[k]}(t,x)$ と $U^{[k]}(t,x)$ の解析から示す.

補題 1 各 $k\in\{1,\cdots,\ell\},\ell\in\mathbb{N}$ と $\forall t_1,t_2\in[0,T],x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$ に対して, 次を満たす $M>0$ が存在する.

$$|V^{[k]}(t_1,x_1)-V^{[k]}(t_2,x_2)|\leq M[|t_1-t_2|^{1/2}+|x_1-x_2|]. \tag{7}$$

略証. (3) の $X_s^t(x)$ の pathwise continuity を使う. □

補題 1 は後に smooth fit の証明で使う.

補題 2 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して,

(i) $\forall t \in [0, T]$ に対して, $x \mapsto V^{[k]}(t, x)$ は非減少で *convex*.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ に対して, $t \mapsto V^{[k]}(t, x)$ は非減少.

(iii) $\forall (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^+$ に対して, $V^{[k]}(t, x) \geq V^{[k-1]}(t, x)$.

(iv) $\forall (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^+$ に対して, $V^{[k]}(t, x) > 0$.

略証. $g(x) = (K - x)^+$ に対して,

$$V^{[\ell]}(t, x) = \sup_{0 \leq \tau_\ell < \tau_{\ell-1} < \cdots < \tau_1 \leq t} \tilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=1}^{\ell} e^{-r\tau_k}(K - X^0_{\tau_k}(x))^+\right].$$

(i) $X^t_s(x)$ の pathwise solution (3) と $x \mapsto (K - x)^+$ は非減少で convex であることから. (ii) $\mathcal{T}_{a,b}$ を $[a, b]$ 間に値を取るすべての停止時刻の集合とする. $\tau_k \in \mathcal{T}_{0,t}$ ならば, $\tau_k \in \mathcal{T}_{0,s}, s \geq t$ であることから. (iii) $(K - x)^+$ が非負であることから. (iv) 略. □

補題 3 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して,

(i) $\forall t \in [0, T]$ に対して, $x \mapsto U^{[k]}(t, x)$ は非減少で *convex*.

(ii) $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$ に対して, $U^{[k]}(t, x) \geq U^{[k-1]}(t, x)$.

略証. (i) $(K - x)^+$ が非減少で convex と補題 2(i) と $X^t_s(x)$ の pathwise solution (3) から. (ii) 補題 2(iii) と $U^{[k]}(t, x) = g(x) + e^{-r\delta}\tilde{\mathbb{E}}\left[V^{[k-1]}((t-\delta)^+, X^0_\delta(x))\right]$ から. □

定理 1 (最適停止境界の存在) 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, $V^{[k]}(t, x) = U^{[k]}(t, x)$, $\forall x \in [0, b^{[k]}(t)]$ かつ $V^{[k]}(t, x) > U^{[k]}(t, x)$, $\forall x > b^{[k]}(t)$ となる最適停止境界 $b^{[k]}(t)$ が存在する.

略証. 補題 2 と補題 3 から. □

定理 1 より, 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, 次の最適停止領域 $B^{[k]}$ と最適継続領域 $C^{[k]}$ が得られる.

$$\begin{aligned} B^{[k]} &:= \{(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^+ : V^{[k]}(t, x) = U^{[k]}(t, x)\} \\ &= \{(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^+ : x \leq b^{[k]}(t)\}. \qquad (8) \\ C^{[k]} &:= \{(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^+ : V^{[k]}(t, x) > U^{[k]}(t, x)\} \\ &= \{(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^+ : x > b^{[k]}(t)\}. \qquad (9) \end{aligned}$$

$x \mapsto V^{[k]}$ は連続なので, $B^{[k]}$ は閉集合,$C^{[k]}$ は開集合である.

定理 2 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, $B^{[k-1]} \subseteq B^{[k-1]}$.

略証. 補題 2 と補題 3 から. □

3 アメリカン・プット・スイング・オプションの自由境界問題

$\mathcal{L}$ をマルコフ過程 $X_s^t(x)$ の無限小生成作用素とする:

$$\mathcal{L}v^{[k]} = -\frac{\partial v^{[k]}}{\partial t} - rv^{[k]} + rx\frac{\partial v^{[k]}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v^{[k]}}{\partial x^2} \tag{10}$$

定理 3 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, アメリカン・プット・スイング・オプションの値関数 $V^{[k]}(t,x)$ は次を満たす.

(i) $V^{[k]}(t,x)$ *is smooth in* $C^{[k]}$ かつ $\mathcal{L}V^{[k]}(t,x) = 0$ *in* $C^{[k]}$.

(ii) $\lim_{x \downarrow b^{[k]}(t)} V^{[k]}(t,x) = U^{[k]}(t, b^{[k]}(t)), \forall t \in (0,T]$.

(iii) $V^{[k]}((k-1)\delta, x) = U^{[k]}((k-1)\delta, x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

略証. (i) 最適停止時刻は $\tau^*(t,x,k) = \inf\{s \in [0,t] : (t-s, X_s(x)) \notin C^{[k]}\}$ である. $\tau^*(t,x,k)$ に対して, $\{e^{-rs}V^{[k]}(t-s, X_s(x))\}_{\{s \in [0,\tau^*(t,x,k)]\}}$ がマルチンゲールであること, 伊藤の補題と作用素 $\mathcal{L}$ の smoothness 性から. (ii) $V^{[k]}(t,x)$ の連続性と $b^{[k]}(t) < K$ から. (iii) 境界条件そのもの. □

Smooth fit 条件は必ずしも成立するとは限らないが, この問題に対しては次を得る.

定理 4 (Smooth fit) 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, アメリカン・プット・スイング・オプションの値関数 $V^{[k]}(t,x)$ は x について微分可能であり, 特に最適停止境界 $b^{[k]}(t)$ 上で

$$\lim_{(s,x)\to(t,b^{[k]}(t))} \frac{\partial V^{[k]}}{\partial x}(s,x) = \lim_{(s,x)\to(t,b^{[k]}(t))} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial x}(t,x), \ \forall t \in (0,T]. \tag{11}$$

$k=1$ に対しては,

$$\lim_{(s,x)\to(t,b^{[1]}(t))} \frac{\partial V^{[1]}}{\partial x}(s,x) = -1, \ \forall t \in (0,T]. \tag{12}$$

略証. $V^{[k]}$ は $\mathcal{L}V^{[k]} \leq 0$ を満たす. すなわち,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V^{[k]}}{\partial x^2} \quad \leq \quad rV^{[k]} + \frac{\partial V^{[k]}}{\partial t} - rx\frac{\partial V^{[k]}}{\partial x}.$$

補題 1 より, $V^{[k]}$ は x で Lipschitz, t で uniformly continuous. $V_x^{[k]}$ は $[0,T] \times \mathbb{R}^+$ で一様有界であり, $V_t^{[k]}$ は $(0,T] \times \mathbb{R}^+$ で局所有界. 以上より, $V_{xx}^{[k]}$ は $(0,T] \times \mathbb{R}^+$ で局所有界. これと $x \mapsto V^{[k]}(t,x)$ の convex 性から, $V_x^{[k]}(t,x)$ は $(0,T] \times \mathbb{R}^+$ で連続. □

以上の定理 1, 定理 3 と定理 4 から, 最適多数回停止問題の値関数 $V^{[k]}(t,x)$ が満たす自由境界問題を定式化できる. 更に自由境界問題の解が唯一であることを示すことができる.

定理 5 (自由境界問題の解の一意性) 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, アメリカン・プット・スイング・オプションの最適値と最適停止境界の解のペアは, 次の自由境界問題の唯一解 $(v^{[k]}, b^{[k]})$ である:

- $\mathcal{L}v^{[k]} = 0, \ x > b^{[k]}(t),$ (13)
- $\lim_{x \downarrow b^{[k]}(t)} v^{[k]}(t,x) = U^{[k]}(t, b^{[k]}(t)), \quad t \in (0,T]$ (14)
- $\lim_{(s,x)\to(t,b^{[k]}(t))} \frac{\partial v^{[k]}}{\partial x}(s,x) = \lim_{(s,x)\to(t,b^{[k]}(t))} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial x}(t,x), \ t \in (0,T].$ (15)
- $v^{[k]}((k-1)\delta, x) = U^{[k]}((k-1)\delta, x), \quad x \in \mathbb{R}_+$ (16)
- $v^{[k]}(t,x) > U^{[k]}(t,x), \quad x > b^{[k]}(t),$ (17)
- $v^{[k]}(t,x) = U^{[k]}(t,x), \quad x \le b^{[k]}(t).$ (18)

$x \mapsto v(t,x)$ は非減少で *convex* であり, $0 \le b^{[k]}(t) < K$.

(14) は continuou fit, (15) は smooth fit と呼ばれる.

略証. 先の定理から $(V^{[k]}, b^{[k]})$ は自由境界問題の解である. 逆に $(v^{[k]}, b^{[k]})$ を自由境界問題の解とする. よって, $v \in \mathcal{C}^1$ in x, piecewise $\mathcal{C}^1$ in t. 伊藤の補題より

$$\begin{aligned} & e^{-rt}v^{[k]}(t-s, X_s(x)) \\ = \ & v^{[k]}(t,x) + \int_0^s \mathcal{L}v^{[k]}(t-u, X_u(x))du + \int_0^s e^{-rs} v_x^{[k]}(t-u, X_u(x))\sigma X_u(x) d\tilde{W}_u. \end{aligned} \tag{19}$$

$x \mapsto v^{[k]}(t,x)$ は非減少かつ convex であることと $v^{[k]} \ge (K-x)^+$ から, $v_x^{[k]}$ は $\mathbb{R}^+$ 上で有界. したがって, 確率積分は $\tilde{P}$-マルチンゲール. 次に, $\mathcal{L}v^{[k]}(t,x) \le 0$ を示すことができる. また, $\{e^{-rs}v^{[k]}(t-s, X_s(x))\}_{\{0 \le s \le t\}}$ は $\tilde{P}$-優マルチンゲール. $v^{[k]} \ge U^{[k]}$ から, $\forall \tau \in \mathcal{T}_{0,t}$ に対して,

$$v^{[k]}(t,x) \ge \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r\tau}v^{[k]}(t-\tau, X_\tau(x))] \ge \tilde{\mathbb{E}}[U^{[k]}(X_\tau(x))].$$

これより, $v^{[k]} \ge V^{[k]}$. 逆の不等式も示すことができ (略), $V^{[k]} \le v^{[k]} \le V^{[k]}$ を得る. □

系 1 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, $b^{[k]}(t) \ge b^{[k-1]}(t), \forall t \in (0,T]$.

略証. 最適停止境界 $b^{[k]}(t)$ は

$$V^{[k]}(t, b^{[k]}(t)) = (K - b^{[k]}(t))^+ + e^{-r\delta}\tilde{\mathbb{E}}\left[V^{[k-1]}(t-\delta, X_\delta^0(b^{[k]}(t)))\right], \ \forall t \in (0,T]$$

を満たすことと, 補題 2(iii) から $V^{[k]}(t, b^{[k]}(t)) \ge V^{[k-1]}(t, b^{[k-1]}(t))$ であることより. □

系 2 各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, $b^{[k]}(t)$ は $t \in (0,T]$ で連続.

略証. 略. □

4 おわりに

各 $k \in \{1, \cdots, \ell\}, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, 自由境界問題 FBP(k) の数値計算は, FBP(1) からスタートし, FBP(2), $\cdots$, FBP(ℓ) を逐次に実行すれば良い.

(5) の右辺の $V((t-\delta)^+, X_\delta(x))$ について, 当初は $V(t-\delta, X_\delta(x))$ としていたことに対して, $t-\delta<0$ となるケースを含むことから生じる不都合をご指摘くださった大阪大学大西匡光先生に感謝いたします.

参考文献

[1] K. Ano, (2010). Free boundary problem for optimal multiple stopping and swing option.

[2] K. Ano, (2009). Multiple stopping problem for jump diffusion and free boundary problem. RIMS Kokyuroku, **1675**, 42-48.

[3] K. Ano, (2009). *Optimal Stopping, Free Boundary Problem and their Applications to Mathematical Finance*, (in Japanese) Lecture Note on the Grad. Course, Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology.

[4] K. Ano, (2008). Optimal multiple stopping problem and multiple exercise option - continuous time case - (in Japanese), JAFEE Winter Meeting.

[5] V. Arkin, (2009). A variational approach to an optimal stopping and free-boundary problems, Optimal Stopping with Applications 2009 Symposium, Turku.

[6] R. Carmona and N. Touzi, (2008). Optimal multiple stopping and valuation of swing options, Math. Finan., **18**, 239-268.

[7] A. Friedman, (2006), *Stochastic Differential Equations and Applications,* Two Volumes as One (Originally published in 1975 and 1976 by Academic Press), Dover, New York.

[8] S. Jacka, (1991), Optimal stopping and the American put, Math. Finan., **1**, 1-14.

[9] I. Karatzas and S. E. Shreve, (1998). *Methods of Mathematical Finance.* Springer-Verlag, Berlin.

[10] Y. Kifer, (2009). Perfect and partial hedging for multiple exercise (swing) Game options, Optimal Stopping with Applications 2009 Symposium, Turku, Finland.

[11] N. V. Krylov, (1980). *Controlled Diffusion Processes,* Springer-Verlag, New York.

[12] H. P. McKean Jr, (1965). A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics, Indust. Manage. Rev., **6**, 32-39.

[13] P. Van Moerbeke, (1976), On optimal stopping and free boundary problems, Arch. Rational Mech. Anal., **60**, 101-148.

[14] H. Pham, (1997). Optimal stopping, free boundary, and American option in a jump-diffusion model, Appl. Math. Optim., **35**, 145-164.

[15] A. Suzuki, S. Seko, and K. Ano, (2002). Simulation on the value and the double exercise boundaries of Game option with Jump-diffusion process, *International Conference on Recent Advances in Computational Mathematics 2002*, Matsuyama.

[16] A. N. Shiryaev, (1978), *Optimal Stopping Rules,* Springer-Verlag, New York.

[17] N. Touzi, (2002). *Stochastic control and application to Finance*, Scuola Normale Superiore, Pisa. Special Research Semester on Financial Mathematics.