数理解析研究所講究録
第 1737 巻 2011 年 21-30

Non-commutative Network Flows

北海道大学（名誉教授） 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)
Hokkaido University (Emeritus)

1. 序 ここでは，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の上の２つの positive (definite) な線形作用素 $S, T > 0$ の順序関係 $S \geq T$ を問題とする．S, T が幾つかの（一般に）non-commutative な $A_1, \ldots, A_n > 0$ からある規則で構成されているとき，すなわち $S = \Phi(A_1, \ldots, A_n)$, $T = \Psi(A_1, \ldots, A_n)$ のとき，比較を可能にする一般論は殆ど存在しない．第一 non-commutative な組から positive なものを作り出す仕組み $\Phi(\cdot), \Psi(\cdot)$ はそんなに多くは知られていない．

普通は差 $\Phi(A_1, \ldots, A_n) - \Psi(A_1, \ldots, A_n)$ を何等かの方法で代数的に変形して positive semi-definite ということを示すのであるが，positivity の初源の定義にもどって，内積の比較

$$\langle x|\Phi(A_1, \ldots, A_n)x\rangle \ \geq \ \langle x|\Psi(A_1, \ldots, A_n)x\rangle \qquad (x \in \mathcal{H})$$

を考えよう．以下では表現を簡単にするため２次形式 $\langle x|Ax\rangle$ を

$$A[x] \equiv \langle x|Ax\rangle$$

と書くことにしよう．

Duffin のグループの発想 ([1],[3]) にしたがって，positive な S, T をそれぞれ（電気）抵抗 (resistance) の一般化と考えると $S[x]$, $T[x]$ は電流 (current) x がこれらの抵抗（のみ）をもつ２つの回路を流れるときの消費電力 (power) と考えられる．どのような電流に対しても電力に大小関係があるとき $S \geq T$ とするわけである．

$\Phi(A_1, \ldots, A_n)$ は抵抗 $A_1, \ldots, A_n$ のみを持つ回路を組み合わせてできる回路網 (electrical) network の抵抗と考える，そこに電流 x の流れ (flow) があると考える．電流 x は回路網を構成する基本的な回路素子をある法則で分岐して流れると思われる．どのように分岐するかは判らないが，（神の作った）自然の法則に従えば、回路網の電力を最小にするようになっていいると信じられている (Minimum Principle)．そうすれば

$$\Phi(A_1, \ldots, A_n)[x] = \inf\left\{\tilde{\Phi}(A_1[x_{1,k}], \ldots, A_n[x_{n,k}])\ ; x_{j,k}\ (j = 1, \ldots, n), k \in \Omega_j\right\}$$

のような形に書かれるであろう．ここで $\tilde{\Phi}(\cdot)$ は多変数の関数で，Ω_j は j に depend する自然数の index set である．同様に $\Psi(A_1, \ldots, A_n)[x]$ に対しても infimum 表示が出来ると考えられる．しかし，２つの infimum を比較するのは普通は困難である．それで次のようなスキームを考えよう．

Lemma 1. $A, B > 0$ にたいして

$$A[x] \ \geq \ B[x] \quad (x \in \mathcal{H}) \quad \Longleftrightarrow \quad A \ \geq \ B \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A & I \\ I & B^{-1} \end{bmatrix} \ \geq \ 0$$
$$\Longleftrightarrow A[x] + B^{-1}[y] \ \geq \ 2|\langle x|y\rangle| \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

したがって $\Psi(A_1,\dots,A_n)^{-1}[y]$ に対しても minimum principle が保証されれば,

$$\inf_{currents}\left\{\tilde{\Phi}(\cdot)\ +\ \widetilde{\Psi^{-1}}(\cdot)\right\}\ \geq\ 2|\langle x|y\rangle|\quad (x,y\in\mathcal{H})$$

の形の infimum problem に還元することが出来るだろう．そしてこれがどの $A_1,\dots,A_n$ に関したも成立することを予想するから

$$\inf_{A_1,\dots,A_n}\ \inf_{currents}\left\{\tilde{\Phi}(\cdot)\ +\ \widetilde{\Psi^{-1}}(\cdot)\right\}\ \geq\ 2|\langle x|y\rangle|\quad (x,y\in\mathcal{H})$$

の形となる．２つの infimum の順序を入れ替えると, どのような電流分岐にたいしても

$$\inf_{A_1,\dots,A_n}\left\{\tilde{\Phi}(\cdot)\ +\ \widetilde{\Psi^{-1}}(\cdot)\right\}\ \geq\ 2|\langle x|y\rangle|\quad (x,y\in\mathcal{H})$$

が成り立つことが問題の不等式と同値になる.

この報告の内容はすべて古いものばかりであるが, infimum problem に変換し、２つの infimum の順を取り替えるという方法が他の問題でも有用であることを祈って, 敢えて大それた表題で書いてみた.

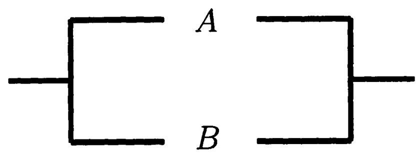
2. 並列和　それぞれ A, B を抵抗にもつ回路の最も簡単は結合は直列結合 (series connection) である：

分岐は一通りしか考えられないから, 当然この回路網の抵抗は $A+B$ であり,

$$(A+B)[x]\ =\ A[x]+B[x]$$

となる.

次に基本的なものは並列結合 (parallel connection) で, Ohm の法則によればその回路網の抵抗は $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ になると考えられる.



以下ではこれを A, B の並列和 (parallel sum) とよび $A:B$ と書こう．すなわち

$$A:B\ \equiv\ (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

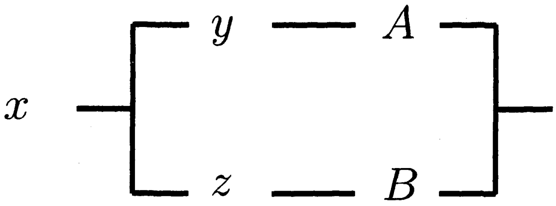
である．明らかに $A:B=B:A$ で $(A:B):C=A:(B:C)$ であるから, $A_1,\dots,A_n$ に対して $\prod_{j=1}^{n}:A_j\equiv A_1:\cdots:A_n$ と書いても問題は起こらない．次の関係は明らかである.

$$\overbrace{A+\cdots+A}^{n}\ =\ nA,\quad \overbrace{A:\cdots:A}^{n}\ =\ \frac{1}{n}A,\quad \text{そして}\quad (\sum_{j=1}^{n}A_j)^{-1}=\prod_{j=1}^{n}:A_j^{-1}.$$

重要なのは，並列結合にたいして minimum principle が成り立つことである．

Lemma 2. $A, B > 0$ にたいして

$$(A : B)[x] \; = \; \inf \Big\{ A[y] + B[z];\; x = y + z \Big\}.$$



$$x = y + z$$

したがって $\Phi(A_1, \ldots, A_n)$ が，$A_1, \ldots, A_n$ を抵抗にもつ回路から直列結合と並列結合を種々組み合わせて構成されておれば $\Phi(A_1, \ldots, A_2)[x]$ に対しては infimum 表現が可能となる．

次に $\Psi(A_1, \ldots, A_n)^{-1}[y]$ の infimum 表現が問題になる．もし

$$\Psi(A_1, \ldots, A_n)^{-1} = \Theta(A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1})$$

となる $\Theta(\cdot)$ があり，$\Theta(\cdot)[y]$ に対して infimum 表現が可能ならば切り抜けることができる．問題はそのような有用な例が現実に存在するかということにある．

3. 対称関数平均 正数の n-列 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ の対称関数平均 (symmetric function mean) $E_{k,n}(\boldsymbol{\alpha})$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ を Marcus-Lopes [8] にしたがって

$$E_{k,n}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \frac{e_{k,n}(\boldsymbol{\alpha})}{e_{k-1,n}(\boldsymbol{\alpha})} \quad 但し \quad e_{0,n}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv 1$$

で定義しよう．ここで $e_{k,n}(\boldsymbol{\alpha})$ は $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ の正規化された k-次の elementary symmetric function である．

この対称関数平均の概念を positive 作用素の n-列 $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ に拡張したいのであるが，積が出てるから，単純に A_k を α_k の処に代入しても positive 作用素にはならない．これに関して Anderson-Morley-Trapp [2] は次のような拡張を提案した．

$$\mathfrak{S}_{1,n}(\mathbf{A}) \equiv \Big(\sum_{j=1}^{n} A_j \Big) / n \quad (算術平均), \qquad \mathfrak{s}_{n,n}(\mathbf{A}) \equiv n \Big(\prod_{j=1}^{n} : A_j \Big) \quad (調和平均)$$

は well-defined な positive 作用素であるから，これから始めて，$(n-1)$-列である $\mathbf{A}_{(j)} \equiv (A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ にたいして既に $\mathfrak{S}_{k-1,n-1}(\mathbf{A}_{(j)})$ および $\mathfrak{s}_{k,n-1}(\mathbf{A}_{(j)})$ が定義されているとして，$\mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A})$ および $\mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A})$ を次のように recursive に定義しよう．

$$\mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A}) \equiv \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \Big(\frac{1}{n-k+1} A_j \Big) : \Big(\frac{1}{k-1} \mathfrak{S}_{k-1,n-1}(\mathbf{A}_{(j)}) \Big) \Big\} \quad (k = 2, \ldots, n),$$

$$\mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A}) \equiv \prod_{j=1}^{n} : \left\{ kA_j + (n-k)\mathfrak{s}_{k,n-1}(\mathbf{A}_{(j)}) \right\} \quad (k = n-1, \ldots, 1).$$

$\mathbf{A}$ が commutative n-列のときは，$\mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A})$ で，それは $E_{k,n}(\boldsymbol{\alpha})$ で $\alpha_j = A_j$ と代入したものになる．

$$\mathfrak{s}_{1,n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{S}_{1,n}(\mathbf{A}) \quad \text{また} \quad \mathfrak{S}_{n,n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{s}_{n,n}(\mathbf{A})$$

は直ぐ判る．重要なのは

Lemma 3.

$$\mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A}^{-1}) = \mathfrak{s}_{n-k+1,n}(\mathbf{A})^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つことである．ここで　$\mathbf{A}^{-1} \equiv (A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1})$ である．

Lemma 2 の infimum 表現から写像 $\mathbf{A} \longmapsto \mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A})$ 及び $\mathbf{A} \longmapsto \mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A})$ は positively homogeneous, monotone かつ jointly concave であることが判る．これから

$$\mathfrak{S}_{1,n}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{S}_{n,n}(\mathbf{A}) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\mathfrak{s}_{1,n}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{s}_{n,n}(\mathbf{A}) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ．

Anderson-Morley-Trapp [2] は次の問題を提起した．

Problem. 以下の作用素不等式が成り立つか？

(a)　$\mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A}) \quad (k = 2, \ldots, n-1)$?

(b)　$\mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{S}_{k+1,n}(\mathbf{A}) \quad (k = 2, \ldots, n-1)$?

(c)　$\mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{s}_{k+1,n}(\mathbf{A}) \quad (k = 2, \ldots, n-1)$?

Lemma 3 より，(b) と (c) は同値の問題である．また $\mathbf{A}$ が commutative のときは，(a) は等号で成り立ち，(b) も成り立つことが知られている ([8])．

ずっと昔，私は，久保文夫氏（現在富山大学教授）と一緒に，この問題を解決しようと，多くの時間を費やしが，完全には解決できなかった．infimum problem に変換し，更に 2 つの infimum の順番を入れ替えれば証明可能であろうというのが key idea であったが，$n \leq 4$ の場合しか完遂できなかった．

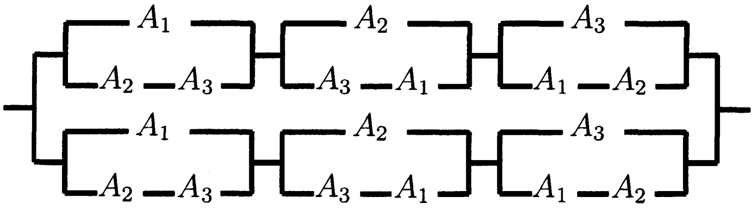
対称関数平均の名の如く $\mathfrak{S}_{k,n}(\mathbf{A})$, $\mathfrak{s}_{k,n}(\mathbf{A})$ は $A_1, \ldots, A_n$ に関して高い対称性をもつ対象であるから，何か combinatorial な考察を付加することにより，一般の場合も証明できるのではないかと思っている．以下では作用素不等式

$$\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}) \ \geq\ \mathfrak{s}_{2,3}(\mathbf{A})$$

の証明に上記の key idea が如何に有効に働くかを示してみよう．

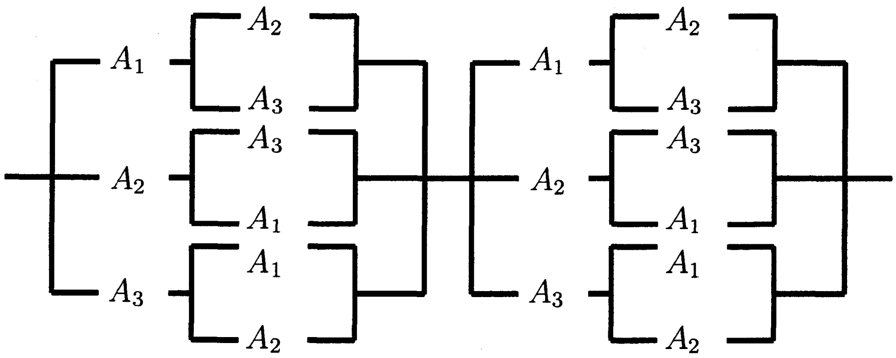
4. $\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{s}_{2,3}(\mathbf{A})$ の証明 ([4]) 実際にどんな positive 作用素を比較しようとしているかというと

$$\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\Big\{A_1 : (A_2 + A_3) \ + \ A_2 : (A_3 + A_1) \ + \ A_3 : (A_1 + A_2)\Big\}$$



および

$$\mathfrak{s}_{2,3}(\mathbf{A}) = 2\Big\{(A_1 \ + \ A_2 : A_3) : (A_2 \ + \ A_3 : A_1) : (A_3 \ + \ A_1 : A_2)\Big\}$$



であが，Lemma 3 により $\mathfrak{s}_{2,3}(\mathbf{A})^{-1} = \mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}^{-1})$ であるから，Lemma 1 より

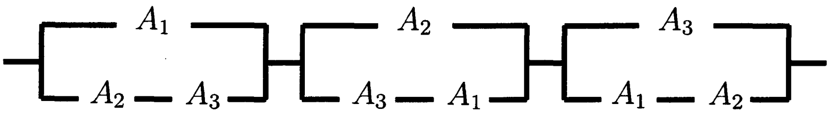
$$\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A})[x] \ + \ \mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}^{-1})[y] \ \geq \ 2|\langle x|y\rangle| \qquad (x, y \in \mathcal{H}) \tag{1}$$

を示せばよいことになる．計算を簡単にするため，x, y の代わりに $\sqrt{2}x$, $\sqrt{2}y$ とした

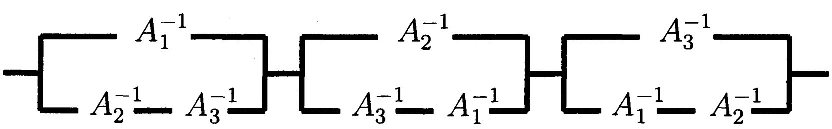
$$2\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A})[x] \ + \ 2\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}^{-1})[y] \ \geq \ 4|\langle x|y\rangle| \qquad (x, y \in \mathcal{H}) \tag{2}$$

を示そう．この方が取り扱い易いことは

$2 \cdot \mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A})$:



$2 \cdot \mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}^{-1})$:



の形からも予想されるであろう．

以下では index は mod 3 で cyclic に考えよう．すはわち $x_4 \equiv x_1, x_5 \equiv x_2$ および $y_4 \equiv y_1, y_5 \equiv y_2$ とする．Lemma 2 より

$$\{A_j : (A_{j+1} + A_{j+2})\}[x] = \inf_{x_j}\{A_j[x_j] + (A_{j+1} + A_{j+2})[x - x_j]\}$$

であるから

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A})[x] &= \inf_{x_1,x_2,x_3} \sum_{j=1}^{3}\{A_j[x_j] + (A_{j+1} + A_{j+2})[x - x_j]\} \\ &= \inf_{x_1,x_2,x_3} \sum_{j=1}^{3}\{A_j[x_j] + A_j[x - x_{j+1}] + A_j[x - x_{j+2}]\} \end{aligned}$$

となる．同様に

$$2\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A}^{-1})[y] = \inf_{y_1,y_2,y_3} \sum_{j=1}^{3}\{A_j^{-1}[y_j] + A_j^{-1}[y - y_{j+1}] + A_j^{-1}[y - y_{j+2}]\}$$

である．したがって証明すべきことは，どの x_j, y_j $(j = 1, 2, 3)$ をとっても

$$\sum_{j=1}^{3}\Big\{A_j[x_j] + A_j[x - x_{j+1}] + A_j[x - x_{j+2}] + A_j^{-1}[y_j] + A_j^{-1}[y - y_{j+1}] + A_j^{-1}[y - y_{j+2}]\Big\}$$

$$\geq\ 4|\langle x|y\rangle|$$

が成り立つことである．

ここで見方を変えると，x, y と $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ を固定したとき，この不等式が $A_1, A_2, A_3 > 0$ をどのように選んでも成り立つことを主張することになる．すなわち $A_1, A_2, A_3 > 0$ で infimum をとっても成り立つという問題に転換できる．

ここで Lemma 1 の精密化である Flanders [7] による次の結果が key となる．

Lemma 4. $\forall\, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H}$

$$\inf_{A>0}\Big\{\sum_{i=1}^{m} A[x_i] + \sum_{j=1}^{n} A^{-1}[y_j]\Big\} = 2\Big\|\Big[\langle x_i|y_j\rangle\Big]_{i,j}\Big\|_1$$

ここで $\Big[\langle x_i|y_j\rangle\Big]_{i,j}$ は x_i, y_j $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ からできる Gram 行列で，$\|\cdot\|_1$ は trace-norm である．

現在の問題では

$$S_j \equiv \begin{bmatrix} \langle x_j|y_j\rangle & \langle x_j|y - y_{j+1}\rangle & \langle x_j|y - y_{j+2}\rangle \\ \langle x - x_{j+1}|y_j\rangle & \langle x - x_{j+1}|y - y_{j+1}\rangle & \langle x - x_{j+1}|y - y_{j+2}\rangle \\ \langle x - x_{j+2}|y_j\rangle & \langle x - x_{j+2}|y - y_{j+1}\rangle & \langle x - x_{j+2}|y - y_{j+2}\rangle \end{bmatrix} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

を考えると，Lemma 4 より，証明すべき不等式 (2) は，どの $x_i, y_j \in \mathcal{H}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ にたいしても

$$\sum_{j=1}^{3} \|S_j\|_1 \ \geq \ 2|\langle x|y\rangle| \quad (x, y \in \mathcal{H}) \tag{3}$$

が成り立つことである．

しかし trace-norm を計算するのは困難なので，次のような trivial な不等式を中に挟もう

$$\sum_{j=1}^{3} \|S_j\|_1 \geq \|\sum_{j=1}^{3} S_j\|_1 \ = \ \sup_{T \neq 0} \frac{|\mathrm{Tr}(T \cdot \{\sum_{j=1}^{3} S_j\})|}{\|T\|_\infty}$$

ここで $\|T\|_\infty$ は operator norm である．したがって (3) のためには，3×3 行列 $T \neq 0$ で

$$|\mathrm{Tr}(T \cdot \{\sum_{j=1}^{3} S_j\})| \ \geq \ 2\|T\|_\infty \cdot |\langle x|y\rangle| \qquad (x, y \in \mathcal{H}) \tag{4}$$

のものが存在すれば十分である．

$\sum_{j=1}^{3} S_j$ の entry を書き出してみるよう．この中の $\sum$ は $j = 1, 2, 3$ の和である．

$$\begin{aligned}
(1,1) - entry &= \sum \langle x_j|y_j\rangle \\
(1,2) - entry &= \langle \sum x_j|y\rangle - \sum \langle x_j|y_{j+1}\rangle \\
(1,3) - entry &= \langle \sum x_j|y\rangle - \sum \langle x_j|y_{j+2}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2,1) - entry &= \langle x|\sum y_j\rangle - \sum \langle x_j|y_{j+2}\rangle \\
(2,2) - entry &= 3\langle x|y\rangle - \langle x|\sum y_j\rangle - \langle \sum x_j|y\rangle + \sum \langle x_j|y_j\rangle \\
(2,3) - entry &= 3\langle x|y\rangle - \langle x|\sum y_j\rangle - \langle \sum x_j|y\rangle + \sum \langle x_j|y_{j+1}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3,1) - entry &= \langle x|\sum y_j\rangle - \sum \langle x_j|y_{j+1}\rangle \\
(3,2) - entry &= 3\langle x|y\rangle - \langle \sum x_j|y\rangle - \langle x|\sum y_j\rangle + \sum \langle x_j|y_{j+2}\rangle \\
(3,3) - entry &= 3\langle x|y\rangle - \langle \sum x_j|y\rangle - \langle x|\sum y_j\rangle + \sum \langle x_j|y_j\rangle.
\end{aligned}$$

この形から，trace を採ることによって x_j, y_j を含む項をすべて相殺するような T の存在は十分予想される．実際

$$T \equiv \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

とすると，これは実対称行列で固有値を計算すれば $\|T\|_\infty = 3$ で

$$\mathrm{Tr}(T \cdot \{\sum_{j=1}^{3} S_j\}) = 6\langle x|y\rangle = 2\|T\|_\infty \cdot \langle x|y\rangle$$

が検証され，(4) が成り立つ．(証明終)

ここで，このような T が選べる背景を考察しよう．$\sum_{j=1}^{3} S_j$ の entry の形を見ると，trace を採って $\langle x|y\rangle$ の係数倍だけを残すためには T が次の U_j $(j = 0, \ldots, 4)$ の 5 個を annihilate していれば十分である：

$$U_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sum \langle x_j|y_j\rangle \quad \text{の現れる項}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sum \langle x_j|y_{j+1}\rangle \quad \text{の現れる項}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sum \langle x_j|y_{j+2}\rangle \quad \text{の現れる項}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \langle \sum x_j|y\rangle \quad \text{の現れる項}$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \langle x|\sum y_j\rangle \quad \text{の現れる項}$$

また $\langle x|y\rangle$ を含むのは

$$W \equiv 3\langle x|y\rangle \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である．U_j $(j = 0, \ldots, 4)$ で span される（行列の）空間を $\mathcal{M}$ と書けば T は $\mathcal{M}$ 全体を annihilate する．結局

$$\|\sum_{j=1}^{3} S_j\|_1 \;\geq\; \|W/\mathcal{M}\|_1 \;\geq\; 2|\langle x|y\rangle|$$

を証明している事になる．ここで $\|W/\mathcal{M}\|_1$ は W の部分空間 $\mathcal{M}$ に関する quotient norm である．今の場合 $\mathcal{M}$ は adjoint operation で閉じているから，T としては selfajoint なものが選べるのは当然であろう．

Anderson-Morley-Trapp [2] も電流の分岐に関して combinatorial な考察に基づいて，$\mathfrak{S}_{2,3}(\mathbf{A} \geq \mathfrak{s}_{2,3}(\mathbf{A})$ を証明しているが，その方法は一般の場合には適用できそうもない．

5. 補足　n に関する induction で，更に $\mathfrak{S}_{2,n}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{s}_{2,n}(\mathbf{A})$ も証明できる ([5])．また同様な infimum 表現を使って $\mathfrak{S}_{2,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{S}_{3,4}(\mathbf{A})$ が証明できる ([6])．その結果 $n=4$ の場合 $\mathfrak{S}_{j,4}(\mathbf{A})$, $\mathfrak{s}_{k,4}(\mathbf{A})$ $(j,k=1,\ldots,4)$ の間の不等式ダイアグラムは完成する：

$$\mathfrak{S}_{1,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{S}_{2,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{S}_{3,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{S}_{4,4}(\mathbf{A}),$$

$$\mathfrak{s}_{1,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{s}_{2,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{s}_{3,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{s}_{4,4}(\mathbf{A}),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{1,4}(\mathbf{A}) &= \mathfrak{s}_{1,4}(\mathbf{A}), \quad \mathfrak{S}_{2,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{s}_{2,4}(\mathbf{A}), \\ &\qquad \mathfrak{S}_{3,4}(\mathbf{A}) \geq \mathfrak{s}_{3,4}(\mathbf{A}), \quad \mathfrak{S}_{4,4}(\mathbf{A}) = \mathfrak{s}_{4,4}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

これ以外の不等式，例えば $\mathfrak{S}_{3,4}(\mathbf{A})$ と $\mathfrak{s}_{2,4}(\mathbf{A})$ の間は一般には順序関係がないことも判る．

この草稿を作成するのに際し，技術的な面で，藤井淳一氏（大阪教育大学）に大変お世話になった．ここに謝意を表するものである．

参考文献

[1] W.N. Anderson, Jr. and R.J. Duffin, *Series and parallel addition of matrices,* J. Math. Anal. Appl. 26(1969), 576–594. MR0242573

[2] W.N. Anderson, Jr., T.D. Morley and g.E. Trapp, *Symmetric function means of positive operators,* Linear Alg. Appl. 60(1984), 129–143. MR749180

[3] W.N. Anderson, Jr. and G.E. Trapp, *Matrix operations induced by electrical networks – a survey,* in *Constructive Approaches in Mathematical Models,* (C.V. Coffman and G.J. Fix, Eds.), pp. 53–73, Academic Press, 1979. MR559487

[4] T. Ando, *An inequality between symmetric function means of positive operators,* Acta Sci. Math. (Szeged), 45(1983), 19–22. MR708768

[5] T. Ando and F. Kubo, *Some matrix inequalities in multiport network connections,* Operator Theory: Adv. Appl. 40(1989), 111–131. MR1038310

[6] T. Ando and F. Kubo, *Inequalities among operator symmetric function meanas,* in *Progress in Systems and Control Thoery 5,* (M.A. Kaashoek, J.H. van Schuppen and A.C.M. Ran, Eds.), pp. 535–5542, Birkhäuser, Boston, 1990. MR559487

[7] H. Flanders, *An extremal problem on the space of positive definite matrices,* Linear Multilinear Alg., 3(1975), 33–39. MR0389943

[8] M. Marcus and L. Lopes, *Inequalities for symmetric functions and Hermitian matrices,* Canad. J. Math. 9(1957), 305–312. MR0084541