

The Euler transform and Weyl groups of Kac-Moody Lie algebras

広恵一希*

東京大学大学院数理科学研究科

概要

ここでは Euler 変換とそこから現れる組み合わせ論的問題が Kac-Moody Lie 代数のルート系とその鏡映変換によって記述できるということの概説をしたい。文章中の定理等の正確な主張，証明は [3],[4],[6],[9] とその参考文献を参照していただきたい。

1 Euler transform (integral transform)

Euler 変換とは適当な関数 $f(x)$ に対して次のように定義される積分変換である。

$$I_a^\mu f(x) := \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-t)^{\mu-1} f(t) dt \text{ for } \mu, a \in \mathbb{C}.$$

ここで一つ重要なこととして $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$I^{-n} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (\text{by Cauchy's integration theorem})$$

が成り立つということがある。さらに Leibniz の法則を自然に一般化した法則も成り立つことがわかり，これらの性質から，Euler 変換は微分作用素の中の一般化と見ることができる。従って，

$$\partial^\mu f(x) := I^{-\mu} f(x) \quad (\text{fractional derivative}).$$

とも書くことにする。この Euler 変換 (あるいは Riemann-Liouville 変換) は分数階微分作用素 (fractional operator) と呼ばれ，さまざまな分野で研究がなされている

* E-mail:kazuki@ms.u-tokyo.ac.jp

が，ここでは以下のような性質に着目することにする．

多項式係数の微分作用素 $P(x, \partial)$ から Euler 変換を用いて新しい微分作用素 $R(x, \partial)$ をつくることを考えよう．すなわち，

$$P(x, \partial) \xrightarrow{\text{Ad}(\partial^\mu)} R(x, \partial) = \partial^{-\mu+m} P(x, \partial) \partial^\mu$$

ここで多項式係数なので一般化された Leibniz の法則は有限和となり，さらに上記の $m \in \mathbb{Z}$ を適当に選べば $R(x, \partial)$ は再び多項式係数の微分作用素とできる．ここで重要なことは，この変換は次のように解の変換も同時に与えているということである．

$$\begin{aligned} R(x, \partial) I^\mu u &= \partial^{-\mu+m} P \partial^\mu I^\mu u \\ P(x, \partial) u = 0 &\Rightarrow &= \partial^{-\mu+m} P u \\ &= 0 \end{aligned}$$

すなわち，

$$\text{Sol's of } Pu = 0 \xrightarrow{I^\mu} \text{Sol's of } Rv = 0.$$

と言うように Euler 変換は，既知の微分作用素から新しい微分作用素を作ると同時に，新たに得られた微分方程式の解を既知の方程式の解から構成する操作となっている．すなわち，解きたい微分方程式が Euler 変換によって知られた微分方程式に帰着できたならば，知られた解を用いて元の微分方程式を解くことができるのである．

Example (Gauss's hypergeometric equation) 上記のことを Gauss の超幾何方程式を例にとってみよう．

$$x(1-x)\partial^2 u + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial u - \alpha\beta u = 0. \quad (1)$$

この方程式に Euler 変換を施してみる．すると，

$$\begin{aligned} &\partial^{-\beta}(x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta)\partial^{\beta-1} \\ &= x(1-x)\partial + (\gamma - \beta) - (\alpha - \beta + 1)x \end{aligned}$$

となり一階の微分方程式が得られた．この一階の方程式の解は $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}$ と容易に求めることができる．従って解の Euler 変換を考えれば，方程式 (1) の解は

$$I_c^{\beta-1} x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_c^x t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-\gamma}(x-t)^{-\beta} dt$$

となる．この解は少し変数変換をしてあげれば，よく知られた Gauss の超幾何関数の Euler 型の積分表示を与えていることが見れる．

上記の例では Gauss の方程式は巾関数を解に持つ一階の方程式に Euler 変換によって帰着できた。これにより、Gauss の方程式の解は Euler 型の積分表示、すなわち巾関数を被積分関数としてもつ積分表示をえることができた。

このことから次のようなことが見て取れるだろう。

観察

多項式係数の微分作用素 $P(x, \partial)$ が Euler 変換によって一階の微分作用素 ∂ に変換することができれば、微分方程式 $P(x, \partial)u = 0$ の解は Euler 型の積分表示をもつ。

一般に Fuchs 型の微分方程式は特異点のまわりの局所解の性質は比較的容易である。したがって特異点の間の解析接続が重要な研究対象となる。こうした解析接続の様子を知るのに Euler 型の積分表示はしばしば重要な役割を果たしてきた。従っていつ微分方程式の解が Euler 型の積分表示をもつか？さらにその具体的表示を求めよ、といった問題は Fuchs 型方程式の大域的解析には基本的な問題と言える。

よって次の問題は Fuchs 型方程式の大域的解析とも関連して基本的な問題といえるだろう。

問題

いつ微分作用素を Euler 変換（といくつかの代数的変換）によって一階の作用素に変換できるか？

いつでも？ $\implies$ No! (たとえば Heun の微分方程式)

2 Euler transform (revisit)

上記の問題に答えるのが N. Katz の定理であるが、彼の定理を述べるために、Euler 変換の代数的な正確な定義を与える必要がある (*¹)。

K を標数 0 の代数閉体とし、 $W[x]$ で一変数の Weyl 代数、つまり多項式係数の微分作用素環とする。さらに $W(x)$ で係数を有理関数体 $K(x)$ にもつ微分作用素環としよう。以下にいくつかの基本的な操作を列挙しておく。

*¹ 次に与える定義は実は Katz の Euler 変換 (middle convolution) の定義とは一般には異なる。しかし良い条件下では両者は一致し、さらにここで採用する定義は直接的に計算が容易なのでこちらを採用する。ここでの定義は大島利雄 [9] による。

Fourier-Laplace transform:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}: & W[x] & \longrightarrow W[x] \\ & x & \longmapsto -\partial \\ & \partial & \longmapsto x \end{array}.$$

次の操作が代数的 Euler 変換の理論では重要である.

Reduced form^{*2} ($\text{Red}(P)$):

$P \in W(x)$ に対し, $\text{Red}(P) \in K(x)^\times P \cap W[x]$ を次のように定義する.

$\text{Red}(P) = \sum_{i=0}^n p_i(x) \partial^i$ とかくと, $\gcd_{K[x]}(p_i(x)) = 1$ であり, さらに最高次の係数 $p_n(x)$ はモニックである.

例えば,

$$P = \frac{3(x-1)}{x^2} \partial + x(x-1)^2 \implies \text{Red}(P) = \partial + \frac{1}{3} x^3 (x-1).$$

Addition: $P \in W(x)$, $f(x) \in K(x)$, $\lambda \in K$ に対し,

$$\text{Ad}(e^{f(x)})P(x, \partial) = P(x, \partial - \frac{d}{dx} f(x)),$$

$$\text{Ad}(x^\lambda)P(x, \partial) = P(x, \partial - \lambda/x)$$

と定義する. これらは単に $e^{f(x)}$ や x^λ をそれらの逆作用素とで両側から共役をとる操作である.

以上の操作を用いて Euler 変換を次のように代数的に定義する.

Euler transform:

$P \in W(x)$ と $\mu \in K$ に対し,

$$E(\mu)P := \mathcal{L} \circ \text{Red} \circ \text{Ad}(x^\mu) \circ \mathcal{L}^{-1} \circ \text{Red} P.$$

Remark 1. 上記の代数的定義と元の積分変換の関係は次の式変形から明らかであろう.

$$I_c^\mu g(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^z g(x)(z-x)^{\mu-1} dx = \int_{-i\infty}^{i\infty} y^{-\mu} \int_c^\infty g(x) e^{-xy} dx e^{zy} dy.$$

以上の準備のもと, Katz は先の問題に答える次の定理を示した.

^{*2} この操作が Katz とは異なる. Katz のものと同じにするには, この操作を $\mathcal{D}$ 加群の極小拡大に置き換える.

Theorem 2 (N. Katz '96 [6]). $P(x, \partial) \in W(x)$ を既約^{*3}でアクセサリーパラメーターを持たないとする。このとき、Euler 変換と addition を有限回ほどこすことによって

$$P(x, \partial) \rightsquigarrow \partial$$

とできる。

ここでアクセサリーパラメーターとは局所解の情報 (特性指数) とは独立な $P(x, \partial)$ の係数 ($\in K$) のことである。

したがってこの Katz の定理と先の観察から微分方程式がアクセサリーパラメーターを持たなければ、その解は Euler 型の積分表示をもつといえるだろう。アクセサリーパラメーターを持たないということは、解の局所データで元の微分方程式が決定されるということに相違ないが、それが Euler 型の積分表示をもつ、つまり大域的解析ができるということを導く。こうした観点からも Katz の定理は非常に自然な定理と解釈できるだろう。

この Katz の定理は上記のように解析にも示唆をもたらし、さらにこうした解析的に意味のあるものが完全に代数的な枠組みで証明されていることも面白い。しかしこの定理ではアクセサリーパラメーターを持たなければ、かならず一階にできると主張しているが、具体的にどのような手順で一階の方程式に帰着されるかは、実際に計算をしてみないとわからない。さらにこの一階に帰着する手順を具体的に知ることによって解の積分表示を具体的に構成できるのだから、この手順を知ることが重要といえる。従って次の問題は意味のある問題といえるだろう。

問題

1. Euler 変換と addition 達のなす群はどんなものか？
2. そして微分作用素のこの群作用での軌道はどのようなものか？
3. あるいはこの群作用はどのような表現として実現できるか？

Katz の定理はアクセサリーパラメーターを持たない既約な Fuchs 型微分作用素は ∂ の軌道に含まれることを主張している。したがって我々は Katz の定理を超えて、他にはどのような軌道があるのか？そしてこれらの群作用を統一的に知るにはどうしたらよいのかをこれから考えていくことにする。

^{*3} P が $W(x)$ で生成する単項イデアルが極大であることと同値

まずは基本的な例として Gauss の超幾何方程式でかんがえてみよう.

Gauss' hypergeometric equation

Fuchs 型の微分方程式の特異点のまわりでの局所解の特性指数を並べた表を Riemann 図式とよぶが, Gauss の超幾何方程式の Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{array} \right\}$$

である. さて前に見た例では Euler 変換によって Gauss の方程式を一階の方程式に変換したが, それを Riemann 図式でみると,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{array} \right\} \xrightarrow{E(\beta)} \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha-1 & \alpha-\beta+1 \end{array} \right\}$$

とみることができる. 右は一階の方程式の Riemann 図式である.

また整数差のもの達同一視したときの特性指数の重複度^{*4}を記述した表をスペクトル型とよぶ. 例えば Gauss の方程式の場合は,

$$\left[\begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

となる^{*5}. 従って上をスペクトル型の変化としてみると,

$$\left[\begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

とかける.

ここで見たスペクトル型の変化は実は D_4 型の Weyl 群の鏡映変換とみることができるのである. そのために上の例をより一般の形でみる. すなわち次のようなスペ

^{*4} 正確には, さらに $\log$ 項はでないといけない. すなわち局所モノドロミーは対角化可能としたときの, 同じ固有値のブロックの大きさを表している.

^{*5} $1-\gamma, \gamma-\alpha-\beta, \alpha-\beta$ は整数でないと (少し強いが) 仮定した.

クトル型をもつ微分作用素 $P(x, \partial)$ を形式的*⁶に考えよう.

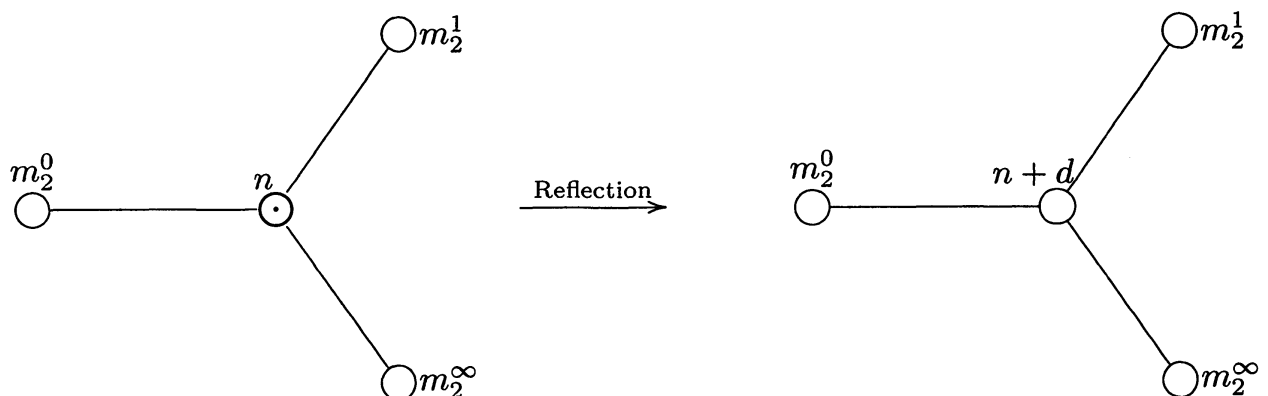
$$\begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ m_1^0 & m_1^1 & m_1^\infty \\ m_2^0 & m_2^1 & m_2^\infty \end{bmatrix}$$

このときこの $P(x, \partial)$ に Euler 変換をほどこすとスペクトル型は次のように変換されることが確かめられる.

$$\begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ m_1^0 & m_1^1 & m_1^\infty \\ m_2^0 & m_2^1 & m_2^\infty \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Euler trans.}} \begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ m_1^0 + d & m_1^1 + d & m_1^\infty + d \\ m_2^0 & m_2^1 & m_2^\infty \end{bmatrix},$$

ここに $d = m_2^0 + m_2^1 + m_2^\infty - 2n$ であり, n は微分作用素の階数である.

この変換をよくみると, 下図の Dynkin 図に対応するルート系のルート格子の元を真ん中の単純ルートで鏡映変換していることに他ならないことがわかる.



また, 残りの単純ルートでの鏡映は addition によって実現できる.

したがってこれは次のように解釈できる. $P(x, \partial)$ に対して $\mathbb{Z}$ 格子

$$L(P) = \left\{ (a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^6 \mid \sum_{i=1}^2 a_i = \sum_{i=1}^2 b_i = \sum_{i=1}^2 c_i \right\}$$

が定まり, $P(x, \partial)$ のスペクトル型はこの格子 $L(P)$ の元

$$l_P = (m_1^0, m_2^0; m_1^1, m_2^1; m_1^\infty, m_2^\infty) \in L(P)$$

*⁶ 勝手に与えたスペクトル型をもつ微分作用素が実際に存在するかという問題は Deligne-Simpson 問題とよばれ, Fuchs 型の場合は熊の表現論を用いた Carwley-Boevey[3] による解決や, 我々の単独方程式では大島利雄 [9] による解決が知られている. 一方不確定特異点をもつ場合は未解決である.

と見ることができる. そして Euler 変換は

$$E: L(P) \ni (a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2) \mapsto (a_1 + d, a_2; b_1 + d, b_2; c_1 + d, c_2) \in L(P)$$

という $\mathbb{Z}$ 線形な格子の自己準同型を与えている. ここに $d = a_2 + b_2 + c_2 - 2(a_1 + a_2)$.
また addition によって

$$\begin{aligned}\phi_a: (a_1, a_2) &\mapsto (a_2, a_1), \\ \phi_b: (b_1, b_2) &\mapsto (b_2, b_1), \\ \phi_c: (c_1, c_2) &\mapsto (c_2, c_1)\end{aligned}$$

という置換作用が得られる. 従って上に見た Euler 変換と addition による $L(P)$ の変換のなす群を W_P と書くと, 微分作用素 $P(x, \partial)$ に対し, W_P 作用をもつ $\mathbb{Z}$ 加群 $L(P)$ とその元 l_P が定まったと考えることができる.

そして D_4 型ルート系のルート格子を $Q(D_4)$, その Weyl 群を $W(D_4)$ と書くことにすれば, 上記のルート系とスペクトル型の対応は

$$W(D_4) \cong W_P$$

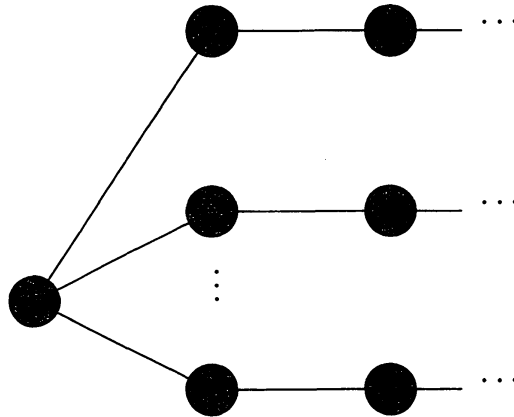
であり,

$$\phi_P: Q(D_4) \xrightarrow{\sim} L(P)$$

という群作用を保つ $\mathbb{Z}$ 格子の同型写像が存在すると考えることができるのである.

一般の Fuchs 型の場合

以上で見た Fuchs 型方程式とルート系の対応が一般の Fuchs 型方程式に対して成立することは Carwley-Boevey[3] によって初めて発見された. すなわち Fuchs 型微分作用素 $P(x, \partial)$ に対して, 星型 Dynkin 図をもつ Kac-Moody Lie 代数のルート系が構成でき,



さらに次のような微分作用素とそれに付随する変換と，ルートと Weyl 群作用の対応が得られる．

- 既約 Fuchs 型作用素 $P(x, \partial) \longleftrightarrow$ 正ルート^{*7}
- Euler transform & Addition $\longleftrightarrow$ root reflection
- アクセサリーパラメーターの数 $\longleftrightarrow 1 - \frac{(\text{ルートの長さ})^2}{2}$

この対応をみて真っ先に連想されるのは叢の表現論における Kac の定理であろう．つまりそこでは，直既約な叢の表現と正ルートが対応し，さらに直既約表現のモジュライの次元はルートの長さによって表される．これはまさに既約 Fuchs 型微分作用素とルートの対応，アクセサリーパラメーター（局所データでは決まらないモジュライ）とルートの長さの関係そのものである．実際 Crawley-Boevey は彼の研究していた関係式付きの叢の表現 (deformed preprojective algebra) に対する Kac の定理の拡張を用いて上記の微分方程式とルート系との対応を見出した．

この枠組みで先ほどの Katz の定理を見返してみると，アクセサリーパラメーターを持たない微分作用素は一階の方程式（単純ルートに対応）に帰着できる，すなわちモジュライをもたない直既約表現は正実ルートと対応するという Gabriel の定理から始まり Kac によって完全に解決された叢の表現論の基本定理に他ならない．

さて，このようにルート系との対応がえられると，Katz の定理ではアクセサリーパラメーターをもたないもののみを扱ったが，一方のアクセサリーパラメーターをもつものについても面白い現象がみえてくる．

^{*7} どのような正ルートが微分作用素と対応するかは Crawley-Boevey によって完全に決定されており，これをもって Fuchs 型の Deligne-Simpson 問題は解決された．

Heun の微分方程式

アクセサリーパラメーターをもつ微分方程式で良く知られているものとして次の Heun の微分方程式がある。

$$\partial^2 + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t} \right) \partial + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)}.$$

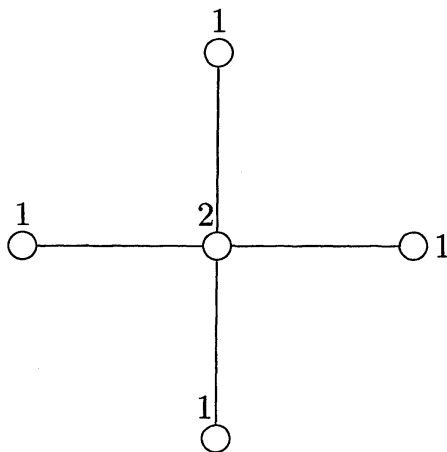
この方程式の局所解の特性指数を集めた Riemann 図式を書いてみると,

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x=0 & 1 & t & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\epsilon & \beta \end{array} \right\}$$

となり, 上の方程式と見比べると最後の項の係数の q は Riemann 図式には現れない. つまりこれがアクセサリーパラメーターとなっている. またスペクトル型は以下のとおりである.

$$\left[\begin{array}{cccc} x=0 & 1 & t & \infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

ここで Crawley-Boevey の対応を用いてルートとの対応を見てみると, Heun の方程式は次のようなアファイン $D_4^{(1)}$ 型のルート系の虚ルートに対応することがわかる.



ここから次のようなことが見て取れる.

- ルートの長さの 2 乗は 0 である. Gauss の場合は 2 であったのでルートの長さがアクセサリーパラメーターの数を反映していることが見える.
- このルートは他のすべてのベクトルとの内積が 0 である. つまり Weyl 群作用で不変.

2 つめの観察は Heun の方程式が Euler 変換と addition によってアファイン $D_4^{(1)}$ 型の対称性を持つことを示唆している。ここで新たな分野との思わぬ接点画見えてくる。Heun の方程式は見かけの特異点を一点付け加えて、そのモノドロミー保存変形を考えることによってパンルヴェ第 6 方程式が得られることが知られている。さらに Euler 変換や addition がモノドロミー保存変形の方程式を不変にすることが原岡-Filipuk によって得られている。すなわち Euler 変換や addition はパンルヴェ方程式におけるベックルンド変換を作っており、さらに上のルート系との対応をみると既にパンルヴェ方程式の研究で知られていたアファイン $D_4^{(1)}$ 型 Weyl 群対称性をまさに復元しているのである。

3 不確定特異点をもつ微分方程式への拡張

これまでに見たように、Euler 変換の理論は解析的のみならず、代数的、組み合わせ論的*⁸にも面白い性質をもっており、またそれらが互いに影響を及ぼしあっている。

従ってこうした理論を Fuchs 型のみならず、不確定特異点をもつ微分作用素にも拡張しようという試みは自然なものだろう。実際こうした試みは、川上拓志 [8]、竹村剛一 [10]、山川大亮 [11]、D. Arinkin[1]、P. Boalch[2] らによって様々な視点から行われてきている。

特に Katz の定理は Arinkin によって不確定特異点をもつ微分作用素に完全に拡張された。

Theorem 3 (Arinkin (2010) [1]). *Fuchs* 型とは限らない既約かつアクセサリーパラメーターを持たない微分作用素は、

1. *Euler* 変換 & *addition*
2. 一次分数変換
3. *Fourier-Laplace* 変換

を有限回ほどこすことによって一階の微分作用素に変換できる。

そしてルート系との対応については不確定特異点が不分岐であるという仮定のもの

*⁸ 幾何的視点もあり、基本群の表現への応用、パンルヴェ方程式と旗多様体との関係などにも応用が知られている

で以下のような結果を得ることができた。一般に不確定特異点周辺では正整数 p に対して $t = x^{\frac{1}{p}}$ とおくことによって

$$e^{p(t^{-1})} t^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m \quad (p(t) \in K[t]).$$

という形式解を得ることができる。この p は代数関数論の類似で分岐指数とよばれ、 $p = 1$ のとき特異点是不分岐であるといわれる。

Theorem 4 ([4]). $P(x, \partial) \in W(x)$ の特異点がすべて不分岐であるとする (+ 局所解に関する非整数条件). このとき上で説明したのと同様に $P(x, \partial)$ のスペクトル型から $\mathbb{Z}$ 格子 $L(P)$ を作ることができ、スペクトル型をその格子の元として実現し、さらに Euler 変換と addition はこの格子に作用する群 W_P を生成する。

さらにこれに対応して次を満たす対称一般 Cartan 行列をもつ Kac-Moody ルート系が存在する。

1. ルート系の Weyl 群を $W(P)$ と書くと、

$$W(P) \cong W_P.$$

2. ルート格子を $Q(P)$ と書くと、 $W(P) \cong W_P$ 作用を保つ全射準同型

$$\Phi_P: Q(P) \twoheadrightarrow L_P$$

が存在する。

3. $l \in L_P$ に対し、 $\Phi_P^{-1}(l)$ のベクトルの長さは一定。つまり $\alpha, \alpha' \in \Phi_P^{-1}(l)$ に対し、

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha', \alpha' \rangle.$$

ここで $\langle, \rangle$ は一般 Cartan 行列からきまる標準的な $W(P)$ 不変双線型形式。

上の定理についていくつかの注意をすると、Fuchs 型の場合と異なりルート格子との対応は全射でしかない。不確定特異点が高々一つの場合 (Fuchs 型を含む) は同時に単射となることが確かめられるが、一般にはそうはならない。しかし最後の主張はルートの長さにかかわらずアクセサリパラメーターの数に対応することを保証している。この単射性の崩れは、不確定特異点が 2 点以上ある場合はアクセサリパラメーターのなすモジュライ空間が多様体にはならないと予想する P. Boalch の考察を裏付けて

いるのかもしれない。また、上の定理では残念ながら Deligne-Simpson 問題、つまり既約方程式とルートとの完全な対応は得られていない*⁹。

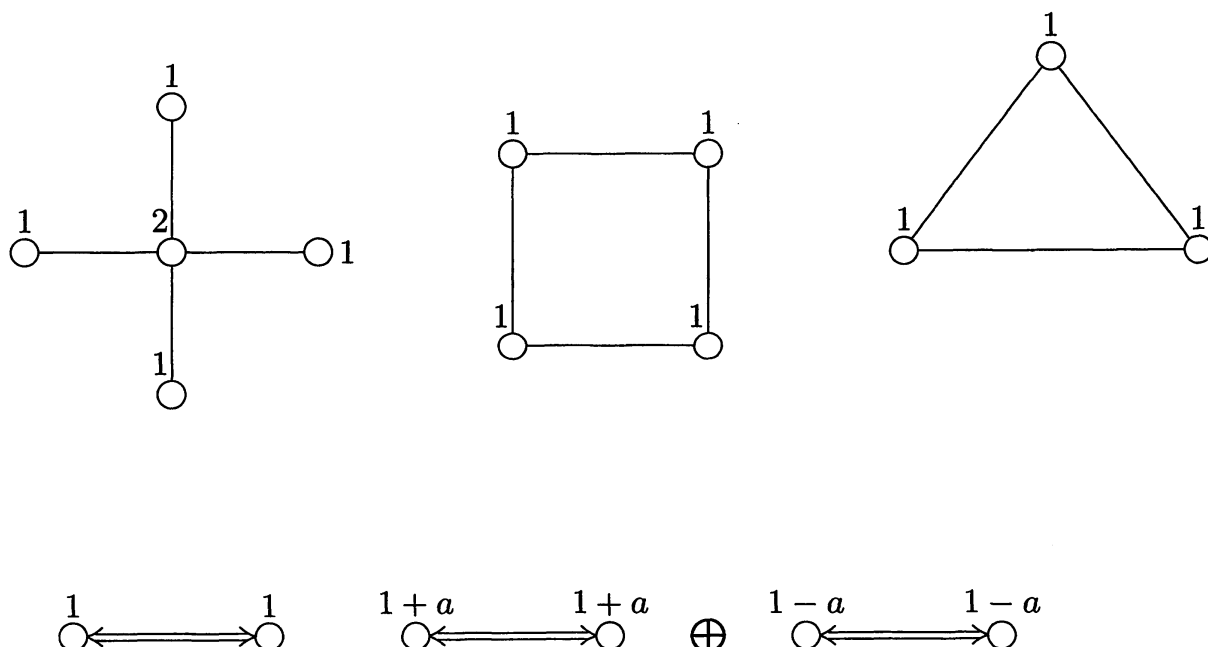
こうしたルート系との対応はアクセサリパラメーターをもつ方程式の研究にむしろ有効で、例えば Fuchs 型のときに示したパンルヴェ方程式との関係は不確定特異点まで考えると、さらに鮮明になる。

Heun の方程式の合流型方程式

先にみた Fuchs 型の Heun の方程式の特異点を合流させることによって、また別の方程式を得ることができる。この合流操作によって不確定特異点をもつ方程式が得られるが、そのなかで不分岐な特異点のみをもつものの簡単なリストを下にあげておく。

Heun	Confluent Heun	Biconf Heun	Triconf Heun	Doubleconf Heun
$1 + 1 + 1 + 1$	$1 + 1 + 2$	$1 + 3$	4	$2 + 2$
$D_4^{(1)}$	$A_3^{(1)}$	$A_2^{(1)}$	$A_1^{(1)}$	$A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}$

一行目は名前、二行目は通例に習って特異点の不確定度 (に 1 を加えた数) を表している。たとえば $1 + 1 + 1 + 1$ は確定特異点 (不確定度 0) が 4 点、 $1 + 1 + 2$ は確定特異点が 2 点、不確定度 1 の特異点が 1 点というように読める。そして最後の行が定理によって得られた対応するルート系を表している。Dynkin 図と方程式に対応するルートを以下に書いておいた。



*⁹ 正実ルートとの対応はこの定理と Arinkin の結果から従う

Fuchs 型同様この図から

- ルートの長さの 2 乗はすべて 0.
- 対応するルートは他のすべてのベクトルと直交している. つまり Weyl 群不変.

ということがすぐ見て取れるだろう. すなわちこれらの方程式は Euler 変換と addition によって対応するアファイン Weyl 群の対称性をもっており, さらに期待されるように対応するパンルヴェ方程式のベックルンド変換のなす対称性と一致^{*10}しているのである.

さらにこの現象は高階パンルヴェ方程式とよばれるものでも確認できる. 例えば川上拓志, 坂井秀隆, 中村あかね [7] が高階パンルヴェ方程式を線形方程式のモノドロミー保存変形による研究する動機から対応する線形方程式の合流方程式を計算している. そのなかで

$$\left[\begin{array}{cccc} x = c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array} \right]$$

をもつ線形方程式の特異点を合流して得られる方程式に対して我々の定理で対応するルート系を次の図で示しておく.

^{*10} パンルヴェ第 3 方程式の対称性は $(A_1 \oplus A_1)^{(1)}$ なので完全に一致すると言い過ぎかもしれない.

- [5] K. Hiroe, *The Euler transform and the Weyl group of a Kac-Moody root system*, preprint 2010.
- [6] N. Katz, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies, 139. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [7] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, in preparation.
- [8] H. Kawakami, *Generalized Okubo systems and the middle convolution*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2010, no. 17, 3394-3421.
- [9] T. Oshima, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, preprint 2010.
- [10] K. Takemura, *Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities*, 2010 arXiv:1002.2535.
- [11] D. Yamakawa, *Middle Convolution and Harnad Duality*, Math. Ann., 2010.