

## Gindikin-Karpelevich formula の拡張

津田塾大学数学・計算機科学研究所 中筋麻貴 (Maki Nakasuji)  
Institute for mathematics and computer science,  
Tsuda College

R. Langlands によって得られた Gindikin-Karpelevich formula は,  $p$ -進体上の古典群の主系列表現における spherical vector の積分を, ルートを用いた大変きれいな形の積で表した公式である. 本稿では, これを組合せ論的に拡張する. なお, ここで得られた結果はアメリカ, Stanford 大学の Daniel Bump 氏との共同研究で得られたものである.

### 1 Gindikin-Karpelevich formula

$G$  を non-archimedean な局所体  $F$  上の split semisimple 代数群とする. また,  $\mathfrak{o}$  を  $F$  の整数環,  $\mathfrak{p}$  を  $\mathfrak{o}$  の極大イデアル,  $q$  を剰余体の cardinality とする. このとき,  $G(F)$  の Borel 部分群  $B(F)$  は, 極大 split torus  $T(F)$  と unipotent radical  $N(F)$  を用いて  $B(F) = T(F)N(F)$  と表すことができる.  $T(F)$  の指標  $\chi$  に対し,  $\chi$  から誘導される  $G(F)$  の主系列表現は

$$V(\chi) = \{f : G(F) \rightarrow \mathbb{C} \mid f(bg) = (\delta^{1/2}\chi)(b)f(g)\}$$

と定義される. ここで,  $\delta : B(F) \rightarrow \mathbb{C}$  は modular quasicharacter とし,  $\chi$  は  $\chi(tn) = \chi(t)$  として,  $N(F)$  上 trivial となるように  $B$  上に拡張しておく. また,  $G(F)$  の作用は right translation とする.

実際,  $G = GL_{r+1}(F)$  のとき,  ${}^L G$  の diagonal group  $T(\mathbb{C})$  の元  $\mathbf{z} = \text{diag}(z_1, \dots, z_{r+1}) \in T(\mathbb{C})$  ( $z_i \in \mathbb{C}^\times$ ) と  $\mu \in \mathbb{Z}^{r+1}$  に対し, 指標は  $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}^\mu = \prod z_i^{\mu_i}$  と定義される. すなわち, 指標  $\chi$  は

$$\chi \left( \begin{pmatrix} y_1 & * & \cdots & * \\ & y_2 & & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & y_{r+1} \end{pmatrix} \right) = \prod z_i^{\text{ord}(y_i)}$$

と表される. このとき,  $f^\circ(bk) = \delta^{1/2}\chi(b)$ , ( $b \in B(F)$ ,  $k \in K = GL_{r+1}(\mathfrak{o})$ ) を満たす関数  $f^\circ$  は  $G$  の主系列表現  $V(\chi)$  における spherical vector となる.

さて, ワイル群  $W$  の元  $w$  に対し, Intertwining 作用素  $M_w : V(\chi) \rightarrow V({}^w\chi)$  を次で定義する. なお,  $N_-$  は  $G$  の下三角の maximal unipotent radical を表す:

$$M_w f(g) = \int_{N_-} f(nwg)dn. \quad (1.1)$$

R.Langlands による Gindikin-Karpelevich formula は, (1.1) において  $w = w_0$  (ワイル群の最長元),  $f = f^\circ$  とし,  $g = 1$  のときの明示公式である.

**Theorem 1.1** ルート系  $\Phi$  の *positive root* の集合を  $\Phi^+$  とする. このとき以下の等式が成り立つ.

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(nw_0) dn = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}z^\alpha}{1 - z^\alpha}. \quad (1.2)$$

Gindikin と Karpelevich によって得られたオリジナルの Gindikin-Karpelevich formula は,  $p = \infty$  のとき, すなわち, 実半単純リー群の表現論に表れる Harish-Chandra の  $c$ -関数に関するものであった. (詳しくは [5], [9]) 1971 年, R.Langlands はこれを  $p$  進群に拡張し ([9]), 後に (1980) W. Casselman が別証明を与えた ([4]).

本稿では, Theorem 1.1 を次の 3 つの方法で拡張する.

- 1) クリスタルを用いて表示する. (第 2 節)
- 2) 1) をメタプレクティック群に拡張する. (第 3 節)
- 3)  $w$  を任意のワイル群の元,  $f$  を spherical vector  $f^\circ$  を一般化した関数に拡張する. (第 4 節)

1), 2) はクリスタル表示として連続する話となるため “2 つの方法で拡張” とするべきかもしれない. なお, 本稿で述べられなかった証明とさらなる考察は, 1), 2) は [2], 3) は [3] を参考にさせていただきたい.

## 2 Gindikin-Karpelevich formula のクリスタル表示

$\Phi$  をルート系 (ここでは  $A_r$  型を扱う) とする.  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) を simple root,  $\alpha_i^\vee$  を対応する coroot とする.  $\Lambda$  を weight lattice とすると,  $\Phi$  に対するクリスタル  $\mathcal{B}$  は各要素の weight を表す写像  $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow \Lambda$ , Kashiwara operator  $f_i, e_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{0\}$  ([6] では  $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$  と定義されている.), Kashiwara operator で定義される  $\phi_i, \varepsilon_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  をもつ. ここで Kashiwara operator は  $v \in \mathcal{B}$  に対し,  $e_i(v) \neq 0$  のとき  $f_i e_i(v) = v$ ,  $\text{wt}(e_i(v)) = \text{wt}(v) + \alpha_i$ , 同様に  $f_i(v) \neq 0$  のとき  $e_i f_i(v) = v$ ,  $\text{wt}(f_i(v)) = \text{wt}(v) - \alpha_i$  を満たす. また,  $\phi_i$  は  $f_i^\phi(v) \neq 0$  となる最大の整数  $\phi$ ,  $\varepsilon_i(v)$  は  $e_i^\varepsilon \neq 0$  となる最大の整数  $\varepsilon$  であり,  $\phi_i(v) = \langle \text{wt}(v), \alpha_i^\vee \rangle + \varepsilon_i(v)$  を満たすものとする.

ワイル群  $W$  の最長元  $w_0$  の既約表現を simple reflection の積

$$w_0 = s_{w_1} \cdots s_{w_N} \quad (N = \frac{1}{2}r(r+1))$$

で表し, これを  $\Omega = (w_1, w_2, \dots, w_N)$  とおく.

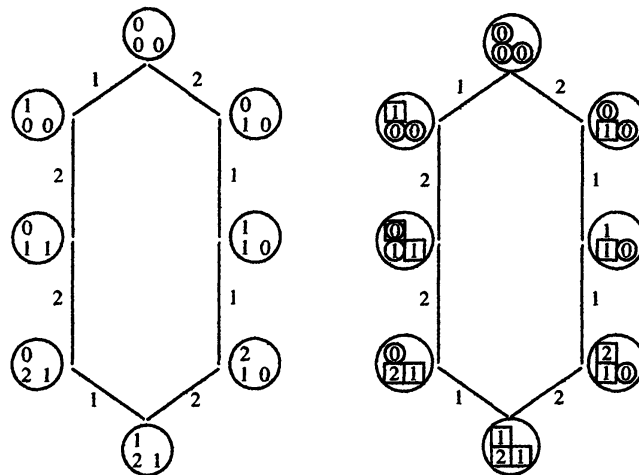


FIGURE 1.  $\lambda = (2, 1, 0)$  に対する (左) BZL pattern, (右) decoration を行った BZL pattern. なお, クリスタルの辺に書かれた数字は  $f_i$  もしくは  $e_i$  の  $i$  を表し, 各頂点の値は,  $b_1$   $b_2$   $b_3$  を表す.

**Definition 2.1** *highest weight* が  $\text{wt}(v_{\text{high}}) = \lambda$  のクリスタルを  $\mathcal{B}_\lambda$  とする.  $v \in \mathcal{B}_\lambda$  に対し,  $b_1$  を  $e_{w_1}^{b_1}(v) \neq 0$  となる最大の整数とする. また  $b_2$  を  $e_{w_2}^{b_2} e_{w_1}^{b_1}(v) \neq 0$  となる最大の整数とする. 以下同様に定義した  $\{b_i\}$  を

$$\text{BZL}(v) = (b_1, \dots, b_N)$$

と表し, *BZL pattern* と呼ぶ (“string parameter” と呼ばれることもある).

BZL pattern の要素について, 次のルールに従って “circling” と “boxing” で decoration を行う. なお, Circling rule は, Littelmann([10]) による BZL pattern の性質から得られたルールである.

**Circling rule.**  $\Omega = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, r, r-1, \dots, 3, 2, 1)$  もしくは  $\Omega = (r, r-1, r, r-2, r-1, r, \dots, 1, 2, 3, \dots, r)$  において,  $i \in \{1, 3, 6, 10, \dots\}$  に対し,  $b_i = 0$  を満たすとき,  $b_i$  を circle で囲む.

**Boxing rule.**  $f_{w_i} e_{w_{i-1}}^{b_i-1} \dots e_{w_1}^{b_1}(v) = 0$  を満たすとき,  $b_i$  を box で囲む.

実際,  $A_2$  型,  $\lambda = (2, 1, 0)$  に対する BZL pattern および decoration を行った BZL pattern の例を Figure 1. に示した.

Brubaker-Bump-Friedberg は, この Circling rule および Boxing rule を用いて, 以下に示す “Tokuyama function  $G_\Omega$ ” を導入した.

**Definition 2.2**  $v \in \mathcal{B}$  に対する *BZL pattern*  $(b_1, b_2, \dots)$  において, “Tokuyama function”  $G_\Omega$  を以下で定義する:

$$G_\Omega(v) = \prod_{i=1}^N \begin{cases} (1 - q^{-1})(-q^{b_i-1}) & b_i \text{ が circle でも box でも 囲まれていないとき,} \\ -q^{b_i-1} & b_i \text{ が box でのみ 囲まれているとき,} \\ q^{b_i} & b_i \text{ が circle でのみ 囲まれているとき,} \\ 0 & b_i \text{ が circle および box の両方で 囲まれているとき.} \end{cases}$$

なお,  $B(\infty)$  では Boxing rule は起こらないため, 2 行目および 4 行目の定義は無効となることに留意する.

Tokuyama([11]) により, Schur 多項式  $s_\lambda$  を Gelfand-Tsetlin pattern の言葉で表すことができることが示されているが, Brubaker-Bump-Friedberg は Tokuyama deformation として Weyl character formula のクリスタル表示をこの Tokuyama function  $G_\Omega$  を用いることにより与えた.

**Theorem 2.3** [1, Theorem 5].  $\lambda$  を dominant weight とする. また  $z_1, \dots, z_{r+1}$  を  $g \in GL_{r+1}(\mathbb{C})$  の固有値とする. このとき, 既約表現の指標  $\chi_\lambda (= s_\lambda)$  について以下のクリスタル表示が成り立つ.

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - q^{-1} \mathbf{z}^\alpha) \chi_\lambda(g) = \sum_{v \in \mathcal{B}_{\rho+\lambda}} G_\Omega(v) q^{-\langle \text{wt}(v) - w_0(\lambda+\rho), \rho \rangle} \mathbf{z}^{\text{wt}(v) - w_0 \rho}.$$

ここで得られた左辺は, 次に述べる Casselman-Shalika 公式 ( $G = GL_{r+1}$  のとき) の右辺に表れる.

**Theorem 2.4**  $\lambda$  を dominant weight とする. このとき,

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn = \mathbf{z}^{-w_0 \lambda} \left[ \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - q^{-1} \mathbf{z}^\alpha) \right] s_\lambda(z_1, \dots, z_{r+1}) \quad (2.1)$$

が成立する. ここで  $s_\lambda$  は Schur 多項式,  $\psi_\lambda$  は  $F$  上の fixed additive character  $\psi_0$  で定義される nondegenerate additive character を表す:

$$\psi_\lambda \left( \begin{pmatrix} 1 & & & \\ x_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{r+1,1} & \cdots & x_{r+1,r} & 1 \end{pmatrix} \right) = \psi_0(\varpi^{\lambda_1 - \lambda_2} x_{r+1,r} + \cdots + \varpi^{\lambda_r - \lambda_{r+1}} x_{2,1}),$$

ここで,  $\varpi$  は  $\mathfrak{o}$  の素元とする.

すなわち, (2.1) は次のように書き換えられる.

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn = \sum_{\mathcal{B}_{\lambda+\rho}} G_\Omega(v) q^{-\langle \text{wt}(v) - w_0(\lambda+\rho), \rho \rangle} \mathbf{z}^{\text{wt}(v) - w_0(\rho+\lambda)}. \quad (2.2)$$

これだけで既に Casselman-Shalika formula のクリスタル表示は得られているが, Gindikin-Karpelevich formula へ導くためにはさらなる変形が必要となる. そこで用いるのが, Schutzenberger involution  $\text{Sch} : \mathcal{B}_{\lambda+\rho} \longrightarrow \mathcal{B}_{\lambda+\rho}$ , および Kashiwara による morphism  $M_{\lambda+\rho} : \mathcal{B}(\infty) \longrightarrow \mathcal{B}_{\lambda+\rho} \otimes \mathcal{T}_{-\lambda-\rho}$  ( $\mathcal{T}_\lambda$  は weight が  $\lambda$  の 1 元で生成されるクリスタル) である. (morphism  $M_\lambda$  については,  $A_2$  型,  $\lambda = (2, 1, 0)$  に対する具体的な図を Figure 2. に示す.) これらを用いることにより, (2.2) は次のように書き換えられる.

**Theorem 2.5**  $\lambda$  を dominant weight とする. このとき,

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(u) \psi_\lambda(u) du = \sum_{\mathcal{B}_{\lambda+\rho} \otimes \mathcal{T}_{-\lambda-\rho}} G_\Omega(v) q^{-\langle w_0(\text{wt}(v)), \rho \rangle} \mathbf{z}^{w_0(\text{wt}(v))}.$$

次に, weight の  $\lambda$  を無限としたときの両辺について考察する.

**Proposition 2.6** 環  $R = \mathbb{C}[q][[z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_r}]]$  とすると,  $\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn \in R$  であり,  $\lambda \longrightarrow \infty$  とすると, 環  $R$  の topology において  $\int_{N_-(F)} f^\circ(n) \psi_\lambda(n) dn$  は  $\int_{N_-(F)} f^\circ(n) dn$  に収束する.

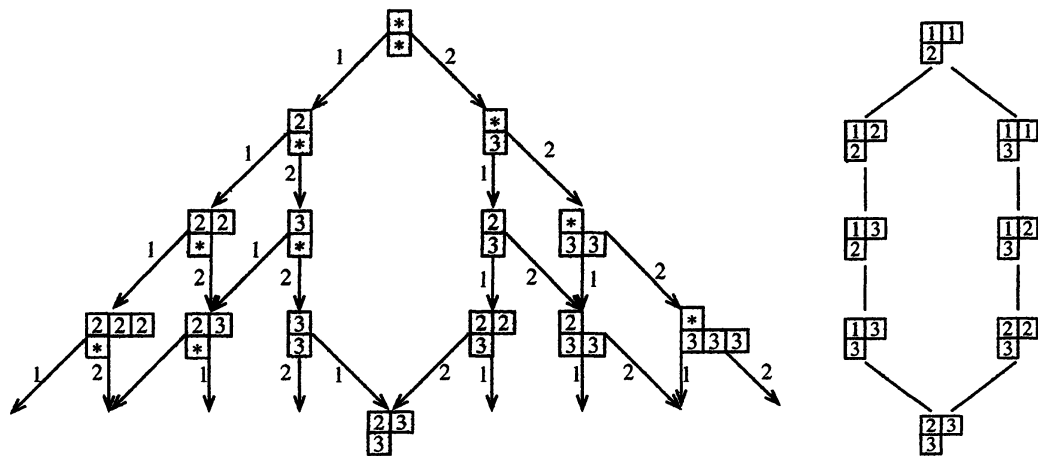


FIGURE 2. (左)  $\mathcal{B}(\infty)$ , (右)  $\lambda = (2, 1, 0)$  の時の  $M_\lambda$  の image.  
 なお, Kashiwara の記述に従い, 各頂点には対応する tableau をおいた.

一方, 右辺は  $B(\infty)$  に渡る和として解釈できるため, Theorem 2.5 から以下が成り立つ.

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n) dn = \sum_{B(\infty)} G_\Omega(v) q^{-\langle w_0(\text{wt}(v), \rho) \rangle} \mathbf{z}^{w_0(\text{wt}(v))}.$$

ここでワイル群の最長元  $w_0$  による作用を考慮すると, Gindikin-Karpelevich formula のクリスタル表示となる次の定理が得られる.

**Theorem 2.7**

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(nw_0) dn = \sum_{v \in B(\infty)} G_\Omega(v) q^{\langle \text{wt}(v), \rho \rangle} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}.$$

### 3 メタプレクティック群への拡張

体  $F$  が 1 の原始  $m$  乗根を含むとする. 群  $G$  の 1 の原始  $m$  乗根の群  $\mu_m$  による中心拡大を  $\tilde{G}(m\text{-fold metaplectic cover})$  とする:

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \tilde{G}(F) \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

また,  $K^*$  を  $\tilde{G}(F)$  における  $K$  の image とする.

前節の spherical vector  $f^\circ$  の類似として次の関数を考える.

**Definition 3.1** section  $s : G \longrightarrow \tilde{G}(F)$ ,  $k \in K^*$  に対し,  $\tilde{f}^\circ : \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{C}$  を次を満たすものとして定義する:

$$\tilde{f}^\circ \left( s \begin{pmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ & t_2 & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & t_{r+1} \end{pmatrix} k \right) = \begin{cases} \prod z_i^{\text{ord}(t_i)} & m \mid \text{ord}(t_i) \quad (1 \leq i \leq r+1) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

関数  $f$  が  $f(\varepsilon g) = \varepsilon f(g)$  for  $\varepsilon \in \mu_n$  を満たすとき, これを *genuine* と呼ぶことにすると, 上で定義した  $\tilde{f}^\circ$  は  $\tilde{G}(F)$  上唯一つの *genuine* 関数となる.

メタプレクティック群の Gindikin-Karpelevich formula に関しては, Kazhdan-Patterson によって次の定理が報告されている.

**Theorem 3.2** [8, Proposition I.2.4].

$$\int_{N_-(F)} \tilde{f}^\circ(nw_0)dn = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{m\alpha}}.$$

これに前説で用いた議論を応用することにより，クリスタル表示を与えるのが本節の目的である。

まず， $v \in \mathcal{B}(\infty)$  に対して Definition 2.1 で定義された BZL pattern について，Circling rule を考察することにより，次を示すことができる。

**Proposition 3.3**

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{m\alpha}} = \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}(\infty) \\ BZL(v) = (b_1, \dots, b_N) \\ b_i \text{ が circle でないなら, } m|b_i}} (1 - q^{-1})^{s(v)} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}.$$

なお， $s(v)$  は circle で囲まれていない  $b_i$  の個数を表す。

Tokuyama function の類似関数を

$$G_\Omega^*(v) = \prod_{i=1}^N \begin{cases} q^{-b_i} h(b_i) & b_i \text{ が circle で囲まれていないとき} \\ 1 & b_i \text{ が circle で囲まれているとき} \end{cases}$$

と定義する。ここで，

$$h(a) = \begin{cases} (q-1)q^{a-1} & m|a \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする。このとき，Proposition 3.3 は次で表される。

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{m\alpha}} = \sum_{\mathcal{B}(\infty)} G_\Omega^*(v) \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}.$$

$\langle \text{wt}(v), \rho \rangle = -\sum b_i$  であることを考えると，右辺は前説の Tokuyama function  $G_\Omega$  を用いて

$$\sum_{\mathcal{B}(\infty)} G_\Omega(v) q^{\langle \text{wt}(v), \rho \rangle} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}$$

で表すことができる。すなわち，次の定理が成り立つ。

**Theorem 3.4**

$$\int_{N_-(F)} \tilde{f}^\circ(nw_0)dn = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^{\alpha}}{1 - \mathbf{z}^{\alpha}} = \sum_{B(\infty)} G_\Omega(v) q^{\langle \text{wt}(v), \rho \rangle} \mathbf{z}^{-\text{wt}(v)}. \quad (3.1)$$

ここで Kashiwara ([6]) によって導入された  $\text{wt}(m \cdot v) = m\text{wt}(v)$  および  $f_i^m(m \cdot v) = m \cdot (f_i v)$  を満たす写像

$$m \cdot : B_\lambda \longrightarrow B_{m\lambda}$$

を考える. なお,  $\lambda$  は dominant weight とする.  $B(\infty)$  に対応する  $m \cdot : B(\infty) \longrightarrow B(\infty)$  を考慮すると, (3.1) の右辺は, Kashiwara の  $m \cdot$  写像の image である  $B(\infty)$  の元に渡る和とみなし, Theorem 3.4 が, Theorem 2.7 の  $m \cdot$  写像による拡張と捉えることができる.

## 4 Gindikin-Karpelevich formula の一般化

$K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群,  $J$  を  $K$  の Iwahori 部分群とすると,  $\chi$  が general position のとき,  $V(\chi)$  は既約であり,  $\chi$  が unramified のとき,  $V(\chi)^J$  ( $J$ -fixed vectors) の次元はワイル群  $W$  の order に等しい. このことから,  $V(\chi)^J$  の基底が  $W$  で parametrize されることは自然なことであり, その自然な基底の 1 つ  $\{\phi_w | w \in W\}$  を次を満たすものとして定義する.  $b \in B(F)$ ,  $u \in W$ ,  $k \in J$  に対し,

$$\phi_w(buk) = \begin{cases} \delta^{1/2} \chi(b) & u = w \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

ここで,  $u, v \in W$  に対し,  $\psi_u = \sum_{v \geq u} \phi_v$  を定義する. 本節では, (1.1) において, 任意の  $w, u \in W$  に対して,  $f = \psi_u$  としたときを扱う. 本研究に関しては, いくつかの計算結果から以下の予想が得られたところであり, 解決はしていない. (一部のみ解決している ([3] 参照)).

**Conjecture 4.1** [3]  $\Phi$  を simply-laced とする.  $u \leq v$  (Bruhat order) に対し,  $S(u, v) = \{\alpha \in \Phi^+ | u \leq v.r_\alpha \leq v\}$  とすると,  $|S(u, v)| = l(v) - l(u)$  を満たす  $(u, v)$  に対し,

$$(M_v \psi_u)(1) = \int_{N_-(F)} \psi_u(nw) dn = \prod_{\alpha \in S(u, v)} \frac{1 - q^{-1}\mathbf{z}^\alpha}{1 - \mathbf{z}^\alpha}$$

が成立する. ここで  $r_\alpha$  は  $\alpha \in \Phi^+$  に対する reflection とする.

本予想は, Casselman によって定義された  $V(\chi)^J$  の基底 ( $\phi_w$  とは異なる基底) に関する問題 (Casselman 問題) と深く関わっているが, 本稿では Gindikin-Karpelevich formula の拡張としてみなされる所以と相違点について述べるにとどめる. Casselman の基底との関係や, 予想について得られた (部分的ではあるが) 詳しい結果に関しては [3] を参考にさせていただきたい.



**Remark 1** spherical vector  $f^\circ = \psi_1 = \sum_{w \geq 1} \phi_w$  であることから,  $w = w_0$ ,  $u = 1$  のとき, Theorem 1.1 (Gindikin-Karpelevich 公式) が得られる.

**Remark 2** Conjecture 4.1 は  $\Phi = A_2, A_3, A_4, D_4$  において成立する.

Remark1 より, Conjecture 4.1 が Gindikin-Karpelevich 公式の拡張であるとみなすことができるが, 相違点も存在する.

**Definition 4.2** 次の条件を満たす  $S \subset \Phi$  を *convex* と呼ぶ.

- i)  $\alpha \in S$  であるとき,  $-\alpha \notin S$ ,
- ii)  $\alpha, \beta \in S$  かつ  $\alpha + \beta \in \Phi$  のとき,  $\alpha + \beta \in S$ .

**Proposition 4.3**  $u = 1$  のとき, すなわち Gindikin-Karpelevich formula において,  $S(1, v) = \{\alpha \in \Phi^+ | v(\alpha) \in \Phi^-\}$  は *convex* である. また  $\Phi^+$  におけるその補空間  $\{\alpha \in \Phi^+ | v(\alpha) \in \Phi^+\}$  もまた *convex* である.

ただし, これは一般の  $S(u, v)$  については成立しない. 実際,  $A_2$  型では, Table 1. より次が

TABLE 1.  $A_2$  型における  $S(u, v)$  一覧.

| $u$           | $v$           | $S(u, v)$                                     |
|---------------|---------------|-----------------------------------------------|
| 1             | 1             | $\{\}$                                        |
| 1             | $s_2$         | $\{\alpha_2\}$                                |
| 1             | $s_1$         | $\{\alpha_1\}$                                |
| 1             | $s_1 s_2$     | $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}$           |
| 1             | $s_2 s_1$     | $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\}$            |
| 1             | $s_1 s_2 s_1$ | $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2\}$ |
| $s_2$         | $s_2$         | $\{\}$                                        |
| $s_2$         | $s_1 s_2$     | $\{\alpha_1 + \alpha_2\}$                     |
| $s_2$         | $s_2 s_1$     | $\{\alpha_1\}$                                |
| $s_2$         | $s_1 s_2 s_1$ | $\{\alpha_1, \alpha_2\}$                      |
| $s_1$         | $s_1$         | $\{\}$                                        |
| $s_1$         | $s_1 s_2$     | $\{\alpha_2\}$                                |
| $s_1$         | $s_2 s_1$     | $\{\alpha_1 + \alpha_2\}$                     |
| $s_1$         | $s_1 s_2 s_1$ | $\{\alpha_1, \alpha_2\}$                      |
| $s_1 s_2$     | $s_1 s_2$     | $\{\}$                                        |
| $s_1 s_2$     | $s_1 s_2 s_1$ | $\{\alpha_1\}$                                |
| $s_2 s_1$     | $s_2 s_1$     | $\{\}$                                        |
| $s_2 s_1$     | $s_1 s_2 s_1$ | $\{\alpha_2\}$                                |
| $s_1 s_2 s_1$ | $s_1 s_2 s_1$ | $\{\}$                                        |

確かめられる.

**Example 4.4**  $u = s_1, v = s_1 s_2 s_1$  のとき,  $S(u, v) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  は *convex* ではない.

**Example 4.5**  $u = s_2, v = s_1 s_2$  のとき,  $S(u, v) = \{\alpha_1 + \alpha_2\}$  *simple root* を含まないので *convex* ではない.

最後に Conjecture 4.1 における  $\Phi$  が simply-laced (すなわち  $A, D, E$  型) である条件の必要性について述べる. これは次の事実から得られた.

**Proposition 4.6**  $\Phi = B_2$  において,  $\alpha_1, \alpha_2$  をそれぞれ *long* および *short simple roots* とする. このとき,  $(u, v) = (s_1, s_1 s_2 s_1)$  および  $(s_1, s_1 s_2 s_1 s_2)$  において Conjecture 4.1 は成立しない.

**Remark 3**  $\Phi = B_2$  には 33 個の  $(u, v)$  ( $u \leq v$ ) が存在するが, Conjecture 4.1 が成立しないのは, Proposition 4.6 の場合のみであり, それ以外の 31 個の  $(u, v)$  については成立する.

## References

- [1] B. Brubaker, D. Bump, and S. Friedberg, Weyl group multiple Dirichlet series: Type A combinatorial theory. Preprint (2009).
- [2] D. Bump and M. Nakasuji, Integration on  $p$ -adic groups and crystal bases, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138 (2010) 1595-1605.
- [3] D. Bump and M. Nakasuji, Casselman's basis of Iwahori vector and the Bruhat order, to appear in *Canadian Journal of Mathematics*.
- [4] W. Casselman, The unramified principal series of  $p$ -adic groups. I. The spherical function, *Compositio Math.*, 40(3) (1980) 387-406.
- [5] S. Gindikin and F. Karpelevich, Plancherel measure for symmetric Riemannian spaces of non-positive curvature, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 145 (1962) 252-255.
- [6] M. Kashiwara, On crystal bases. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of CMS Conf. Proc., pages 155-197. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [7] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, In *Lie algebras and their representations (Seoul, 1995)*, *Contemp. Math.* 194 (1996) 177-186.
- [8] D. Kazhdan and S. Patterson, Metaplectic forms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 59 (1984) 35-142.

- [9] R.P. Langlands, Euler products, Yale University Press, New Haven, Conn., 1971. A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1967, Yale Mathematical Monographs, 1.
- [10] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups*, 3 (2) (1998) 145-179.
- [11] T. Tokuyama, A generating function of strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups, *J. Math. Soc. Japan*, 40 (4) (1988) 671-685.

*E-mail address:* nakasuji@tsuda.ac.jp