数理解析研究所講究録
第1738巻 2011年 155-169

BERENSTEIN-ZELEVINSKY DATA AND THE CRYSTAL BASIS OF U_q^- IN TYPE $A_{n-1}^{(1)}$

東京大学大学院数理科学研究科　斉藤　義久（Yoshihisa Saito）
Graduate School of Mathematical Siences, University of Tokyo

1. Introduction

1.1. $\mathfrak{g}$を$\mathbb{C}$上の有限次元単純Lie代数，$\mathfrak{g}^\vee$をそのLanglands dualとする．Mirković-Vilonenは[MV1]において，Mirković-Vilonen cycleと呼ばれる，$\mathfrak{g}$に付随するaffine Grassmannianの中の代数的サイクルを導入した．正確な定義を述べようとするとaffine Grassmannianの幾何学や交叉コホモロジー等，大道具が必要となるのでここでは割愛するが，その後Kamnitzer ([Kam1], [Kam2])により，Mirković-Vilonen cycleの持つある種の幾何学的な情報を組合せ論的に翻訳した，Mirković-Vilonen polytope（MV polytope）なる概念が定式化された．これは$\mathfrak{g}^\vee$の実のCartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^\vee$の中に描かれた凸多面体である．Kamnitzerは，ある種の正規化条件を満たすMV polytope全体の集合がcrystalの構造を持ち，さらにcrystalとして$U_q^-(\mathfrak{g}^\vee)$のcrystal basisである$B(\infty)$と同型であることを示した．$B(\infty)$を実現する方法はこれまでにもいくつか知られているが，Kamnitzerの結果により，MV polytopeを用いた新しい実現の方法が得られたことになる．またKamnitzerは，MV polytopeを用いて$U_q(\mathfrak{g}^\vee)$の有限次元既約表現のcrystal basisを実現する方法も与えている．

その後のMV polytopeに関する研究としては，その組合せ論的性質調べた[NS1], [NS2], affine Grassmannianの幾何学とのより詳細な関係を調べた[KNS1], [KNS2]等が挙げられる．また最近ではquiverの表現論との関係も明らかになりつつある([KamS], [BK], [S])．

1.2. ここで1つ注意しておきたいことは，MV polytopeを用いた方法で実現されているのは，有限次元単純Lie代数に付随するcrystalのみで，affine型をはじめとする一般のKac-Moody Lie代数に付随するcrystalに関しては，その方法を与えていないという点である．

幾何学的な立場から，Mirković-Vilonen cycleの概念をaffineの場合に拡張しようという試みはいくつか知られているが，関連する幾何学の難しさから，現時点では十分に整備されているとは言えない状況にあると思う．今回の小論では，とりあえずaffine Grassmanian等の幾何学的な背景を忘れて，純粋に組合せ論的な立場からMV polytopeの概念をaffine型に拡張する試みを紹介したい．以下では，affine型の場合の中で最も基本的な$A_{n-1}^{(1)}$型の場合に限定して話をすすめる．

1.3. ただし，拡張すると言っても，MV polytopeの概念を直接$A_{n-1}^{(1)}$型の場合に拡張するわけではなく，MV polytopeと同値なデータである "Berenstein-Zelevinsky data" なる概念を$A_{n-1}^{(1)}$型の場合に拡張することになる．ここで，有限のA型の場合に限定してMV polytopeとBerenstein-Zelevinsky dataの関係を簡単におさらいしておく．

$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_m$を$A_m$型のfundamental weights，$W = \mathfrak{S}_{m+1}$をWeyl群として，

$$\Gamma := \bigcup_{w\in W,\ 1\le i\le m} w\Lambda_i$$

とおき，$\gamma \in \Gamma$をchamber weightと呼ぶ．

まずKamnitzer ([Kam1])にしたがってBerenstein-Zelevinsky datumの定義を述べよう．chamber weightsでパラメトライズされた整数の組

$$\mathbf{M} := (M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \qquad (M_\gamma \in \mathbb{Z})$$

が不等式

$$M_{ws_i\Lambda_i} + M_{w\Lambda_i} + \sum_{j\neq i} a_{j,i} M_{w\Lambda_j} \leq 0 \quad (\forall\, w \in W,\ 1 \leq \forall\, i \leq m), \tag{1.3.1}$$

および，

関係式：$a_{i,j} = a_{j,i} = -1$ かつ $ws_i > w$, $ws_j > w$ のとき

$$M_{ws_i\Lambda_i} + M_{ws_j\Lambda_j} = \min\{M_{w\Lambda_i} + M_{ws_is_j\Lambda_j}, M_{ws_js_i\Lambda_i} + M_{w\Lambda_j}\} \tag{1.3.2}$$

を満たすとき，Berentein-Zelevinsky datum (BZ datum) であるという．ただし $>$ は Bruhat order である．不等式 (1.3.1) は edge inequality (EI)，関係式 (1.3.2) は tropical Plücker relation（TP）と呼ばれる．

BZ datum $\mathbf{M} := (M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 対して，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 内の polytope[1]

$$P(\mathbf{M}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, \gamma \rangle \geq M_\gamma \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}$$

を考える．このとき次が知られている．

Proposition 1.3.1 ([Kam1])．$P(\mathbf{M})$ の頂点は

$$\mu_w := \sum_{i=1}^{n} M_{w\Lambda_i} w h_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \qquad (w \in W)$$

で与えられる．ここに h_i $(1 \leq i \leq n)$ は simple coroot である．すなわち，$P(\mathbf{M})$ は $\mu_\bullet := (\mu_w)_{w\in W}$ の convex hull である．

したがって，有限の A_m 型の場合には，BZ datum $\mathbf{M}$ を与えることと，MV polytope $P(\mathbf{M})$ を与えることは同値である[2]．今回は（MV polytope ではなく）BZ datum $\mathbf{M}$ の方を affine 型に拡張することになる．

Acknowledgment. この研究は筑波大学の内藤聡，佐垣大輔両氏との共同研究に基づく．

2. 有限 A 型の場合（復習）

2.1. Berenstein-Zelevinsky data. BZ datum の定義はすでに introduction で述べたが，後の都合で多少フォーミュレーションを替える必要があるので，(繰り返しになるが) もう一度述べておく．

$I = [l+1, l+m]$ を $\mathbb{Z}$ の有限区間とし，$\mathfrak{g}_I$ を A_m 型 simple Lie algebra とする．Lie algebra としては，もちろん $\mathfrak{g}_I$ は $\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{C})$ と同型であるが，$\mathfrak{g}_I$ の simple root は $(1, \cdots, m$ ではなく）I で index 付けされているものとする．以下 $\mathfrak{h}_I$ を $\mathfrak{g}_I$ の Cartan subalgebra，α_i $(i \in I)$ を simple roots，h_i $(i \in I)$ を simple coroots，Λ_i $(i \in I)$ を fundamental weights，$W_I \cong \mathfrak{S}_{m+1}$ を Weyl 群とする．

$\Gamma_I := \bigcup_{i\in I} W_I \Lambda_i$ を I に付随する chamber weight の集合と呼ぶ．I に付随する BZ datum とは，Γ_I でパラメトライズされた整数の組 $\mathbf{M} = (M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_I}$ であって、edge inequalities（EI）と tropical Plücker relations（TP）と呼ばれる２つの条件を満たすもののことをいう．オリジナルの Kamniter [Kam1], [Kam2] 等、多くの文献では introduction にあるような記法を用いているし，一般の（有限）ルート系に対する BZ datum を書こうとすると，どうしてもこのような記法を用いざるを得ない．一方，話を A 型に限定した場合には，以下に述べる Maya 図形によるパラメトリゼーションも可能となる．この方法はいろいろと便利な点もあるので，今回はこちらを採用して全てを書き下すことにする．

$\widetilde{I} = [l+1, l+m+1]$ とし，$\widetilde{I}$ の部分集合の全体を $\mathcal{M}_I$ と書く．また $\mathcal{M}_I^\times := \mathcal{M}_I \setminus \{\phi, \widetilde{I}\}$ とおく．(あまり一般的でない呼称かも知れないが) この小論では $\mathcal{M}_I$ の元を、区間 I に付随する Maya 図形と呼ぶことにする。このとき，Γ_I と $\mathcal{M}_I^\times$ の間には以下に述べるような 1 対 1 対

[1] 話を A 型に限定しているので，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^\vee$ と $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は自然に同型であることに注意．

[2] この同値は A 型に限らず，全ての有限型の場合に成り立つ．

応がある．まず，fundamental weight Λ_i $(i \in I)$ には，$[l+1,i]$ を対応させる．$W_I \cong \mathfrak{S}_{m+1}$ は，$\widetilde{I}$ に自然に（かつ transitive に）作用しているので，このことを用いて $w\Lambda_i$ $(w \in W_I)$ と $w([l+1,i])$ を対応させる．これにより，Γ_I と $\mathcal{M}_I^{\times}$ の間の 1 対 1 対応が構成出来る．この同一視 $\Gamma_I \cong \mathcal{M}_I^{\times}$ のもとに BZ datum の定義を書き直すと，次のようになる．

Definition 2.1.1. $\mathcal{M}_I^{\times}$ でパラメトライズされた整数の集合 $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^{\times}}$ が次の 2 条件を満たす時，I に付随する *BZ datum* であるという．

(BZ-1) *Edge inequalities (EI)*：任意の異なる 2 元 $i,j \in \widetilde{I}$ と，$\mathbf{k} \cap \{i,j\} = \phi$ なる $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I$ に対して，

$$M_{\mathbf{k}i} + M_{\mathbf{k}j} \leq M_{\mathbf{k}ij} + M_{\mathbf{k}}$$

が成り立つ．ただし $M_{\mathbf{k}ij}$ は $M_{\mathbf{k}\cup\{i,j\}}$ 表す．他の記号も同様．また $M_{\phi} = M_{\widetilde{I}} = 0$ と定める．

(BZ-2) *Tropical Plücker relations (TP)*：任意の $\widetilde{I}$ の 3 元 $i<j<k$ と，$\mathbf{k} \cap \{i,j,k\} = \phi$ なる $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I$ に対して，

$$M_{\mathbf{k}ik} + M_{\mathbf{k}j} = \min\{M_{\mathbf{k}ij} + M_{\mathbf{k}k},\ M_{\mathbf{k}jk} + M_{\mathbf{k}i}\}$$

が成り立つ．

BZ datum $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^{\times}}$ であって，正規化条件

(BZ-0) $M_{[i+1,l+m+1]} = 0$ for any $i \in I$

を満たすものの全体を $\mathcal{BZ}_I$ と書く．

$\mathcal{BZ}_I$ 上に crystal structure を定めよう．$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^{\times}} \in \mathcal{BZ}_I$ に対し，

$$\mathrm{wt}(\mathbf{M}) := \sum_{i\in I} M_{[l+1,i]}\alpha_i^I,$$

$$\varepsilon_i(\mathbf{M}) := -\left(M_{[l+1,i]} + M_{[l+1,i+1]\setminus\{i\}} - M_{[l+1,i-1]} - M_{[l+1,i+1]}\right),$$

$$\varphi_i(\mathbf{M}) := \varepsilon_i(\mathbf{M}) + \langle h_i, \mathrm{wt}(\mathbf{M})\rangle.$$

と定める．ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}_I \times \mathfrak{h}_I \to \mathbb{C}$ は canonical pairing. EI から $\varepsilon_i(\mathbf{M})$ は非負整数であることに注意しよう．

Proposition 2.1.2 ([Kam2]). $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^{\times}} \in \mathcal{BZ}_I$ とする．

(1) $\varepsilon_i(\mathbf{M}) > 0$ の時，次の条件を満たす $\mathbf{M}' = (M'_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^{\times}} \in \mathcal{BZ}_I$ が一意的に存在する：

 (i) $M'_{[l+1,i]} = M_{[l+1,i]} + 1$,

 (ii) $M'_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}}$ *for all* $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times} \setminus \mathcal{M}_I^{\times}(i)$.

ただし $\mathcal{M}_I^{\times}(i) := \{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times} \mid i \in \mathbf{k}$ かつ $i+1 \notin \mathbf{k}\}$.

(2) 次の条件を満たす $\mathbf{M}'' = (M''_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^{\times}} \in \mathcal{BZ}_I$ が一意的に存在する：

 (i) $M''_{[l+1,i]} = M_{[l+1,i]} - 1$,

 (ii) $M''_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}}$ *for all* $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times} \setminus \mathcal{M}_I^{\times}(i)$.

$\mathcal{BZ}_I$ 上の Kashiwara operators $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ を

$$\widetilde{e}_i\mathbf{M} := \begin{cases} \mathbf{M}' & (\varepsilon_i(\mathbf{M}) > 0), \\ 0 & (\varepsilon_i(\mathbf{M}) = 0), \end{cases} \qquad \widetilde{f}_i\mathbf{M} := \mathbf{M}''$$

と定める．

Theorem 2.1.3 ([Kam2]). 6 つ組 $\left(\mathcal{BZ}_I; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ は *crystal* の公理を満たし，*crystal* として $\left(B(\infty); \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ と同型である．

別の正規化条件

(BZ-0') $M_{[l+1,i]} = 0$ for any $i \in I$

を考え，これを満たすものの全体を $\mathcal{BZ}_I^e$ と書く．$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times}$ を BZ datum として，新しい整数の組 $\mathbf{M}^* = (M^*_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times}$ を $M^*_{\mathbf{k}} := M_{\mathbf{k}^c}$ で定める．ただし $\mathbf{k}^c = \widetilde{I}\setminus\mathbf{k}$ である．このとき $\mathbf{M}^*$ も BZ datum となる．この写像を $*$ と書くことにすれば，$*$ は BZ data 全体の集合上の involutive な自己同型を定める．特に $\mathbf{M}\in\mathcal{BZ}_I$ ならば，$\mathbf{M}^*\in\mathcal{BZ}_I^e$ であり，この対応は $\mathcal{BZ}_I$ と $\mathcal{BZ}_I^e$ の間の全単射を誘導する．

BZ datum $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times}\in\mathcal{BZ}_I^e$ に対し，

$$\mathrm{wt}(\mathbf{M}) := \mathrm{wt}(\mathbf{M}), \quad \varepsilon_i^*(\mathbf{M}) := \varepsilon_i(\mathbf{M}^*), \quad \varphi_i^*(\mathbf{M}) := \varphi_i(\mathbf{M}^*)$$

とおく．Proposition 2.1.2, Theorem 2.1.3 の簡単な帰結として次が示される．

Corollary 2.1.4 ([S]). $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times}\in\mathcal{BZ}_I^e$ とする．

(1) $\varepsilon_i^*(\mathbf{M}) > 0$ の時，次の条件を満たす $\mathbf{M}' = (M'_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times}\in\mathcal{BZ}_I^e$ が一意的に存在する：

(i) $M'_{[i+1,l+m+1]} = M_{[i+1,l+m+1]} + 1$,

(ii) $M'_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}}$ *for all* $\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times\setminus\mathcal{M}_I^\times(i)^*$.

ただし $\mathcal{M}_I^\times(i)^* := \{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times \mid i\notin\mathbf{k}$ かつ $i+1\in\mathbf{k}\}$.

(2) 次の条件を満たす $\mathbf{M}'' = (M''_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times}\in\mathcal{BZ}_I$ が一意的に存在する：

(i) $M''_{[i+1,l+m+1]} = M_{[i+1,l+m+1]} - 1$,

(ii) $M''_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}}$ *for all* $\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^\times\setminus\mathcal{M}_I^\times(i)^*$.

(3) $\mathcal{BZ}_I^e$ 上の *Kashiwara operators* $\widetilde{e}_i^*$, $\widetilde{f}_i^*$ を

$$\widetilde{e}_i^*\mathbf{M} := \begin{cases}\mathbf{M}' & (\varepsilon_i^*(\mathbf{M}) > 0),\\ 0 & (\varepsilon_i^*(\mathbf{M}) = 0),\end{cases} \qquad \widetilde{f}_i^*\mathbf{M} := \mathbf{M}''$$

と定める．このとき，

$$\widetilde{e}_i^* = *\circ\widetilde{e}_i\circ *, \qquad \widetilde{f}_i^* = *\circ\widetilde{f}_i\circ *.$$

(4) $\left(\mathcal{BZ}_I^*; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\right)$ は *crystal* であり，さらに $\left(B(\infty); \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\right)$ と同型である．

2.2. Lusztig data.

Definition 2.2.1. $\Delta_I^+ := \{\ (i,j)\in\widetilde{I}^2 \mid i < j\ \}$ でパラメトライズされる非負整数の組 $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Delta_I^+}$ を I に付随する *Lusztig datum* と呼び，その全体の集合を $\mathcal{B}_I$ と書く．

以下 $\mathcal{B}_I$ 上に 2 つの crystal structure を定める．Lusztig datum $\mathbf{a}\in\mathcal{B}_I$ に対し，

$$\mathrm{wt}(\mathbf{a}) = -\sum_{i\in I} r_i(\mathbf{a})\alpha_i^I, \quad \text{ただし} \quad r_i(\mathbf{a}) = \sum_{s=n+1}^{i}\sum_{t=i+1}^{n+m+1} a_{s,t} \quad (i\in I)$$

と定める．また $i\in I$ に対し，

$$A_k^{(i)}(\mathbf{a}) := \sum_{s=n+1}^{k}(a_{s,i+1} - a_{s-1,i}) \quad (n+1\le k\le i),$$

$$A_k^{*(i)}(\mathbf{a}) := \sum_{t=k+1}^{n+m+1}(a_{i,t} - a_{i+1,t+1}) \quad (i\le k\le n+m)$$

とおく．ただし $a_{n,i} = a_{i+1,n+m+2} = 0$ とした．

$$\varepsilon_i(\mathbf{a}) := \max\left\{A^{(i)}_{n+1}(\mathbf{a}), \cdots, A^{(i)}_{i}(\mathbf{a})\right\}, \quad \varphi_i(\mathbf{a}) = \varepsilon_i(\mathbf{a}) + \langle h_i, \mathrm{wt}(\mathbf{a})\rangle,$$

$$\varepsilon^*_i(\mathbf{a}) := \max\left\{A^{*(i)}_{i}(\mathbf{a}), \cdots, A^{*(i)}_{n+m}(\mathbf{a})\right\}, \quad \varphi^*_i(\mathbf{a}) = \varepsilon^*_i(\mathbf{a}) + \langle h_i, \mathrm{wt}(\mathbf{a})\rangle$$

とおく．また

$$k_e := \min\left\{n+1 \le k \le i \;\middle|\; \varepsilon_i(\mathbf{a}) = A^{(i)}_k(\mathbf{a})\right\},$$

$$k_f := \max\left\{n+1 \le k \le i \;\middle|\; \varepsilon_i(\mathbf{a}) = A^{(i)}_k(\mathbf{a})\right\},$$

$$k^*_e := \max\left\{i \le k \le n+m \;\middle|\; \varepsilon^*_i(\mathbf{a}) = A^{*(i)}_k(\mathbf{a})\right\},$$

$$k^*_f := \min\left\{i \le k \le n+m \;\middle|\; \varepsilon^*_i(\mathbf{a}) = A^{*(i)}_k(\mathbf{a})\right\}$$

とし，与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_I$ に対して，$\mathbf{a}^{(\sharp)} = \left(a^{(\sharp)}_{s,t}\right)$ $(\sharp = 1,2,3,4)$ を

$$a^{(1)}_{s,t} = \begin{cases} a_{k_e,i} + 1 & (s = k_e,\ t = i), \\ a_{k_e,i+1} - 1 & (s = k_e,\ t = i+1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$$a^{(2)}_{s,t} = \begin{cases} a_{k_f,i} - 1 & (s = k_f,\ t = i), \\ a_{k_f,i+1} + 1 & (s = k_f,\ t = i+1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$a^{(3)}_{s,t} = \begin{cases} a_{i,k^*_e+1} - 1 & (s = i,\ t = k^*_e + 1), \\ a_{i+1,k^*_e+1} + 1 & (s = i+1,\ t = k^*_e + 1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$$a^{(4)}_{s,t} = \begin{cases} a_{i,k^*_f+1} + 1 & (s = i,\ t = k^*_f + 1), \\ a_{i+1,k^*_f+1} - 1 & (s = i+1,\ t = k^*_f + 1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める．このとき $\mathcal{B}_I$ 上の Kashiwara operators を次のように定義する:

$$\widetilde{e}_i\mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{0} & (\text{if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) = 0), \\ \mathbf{a}^{(1)} & (\text{if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) > 0), \end{cases} \qquad \widetilde{f}_i\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(2)},$$

$$\widetilde{e}^*_i\mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{0} & (\text{if } \varepsilon^*_i(\mathbf{a}) = 0), \\ \mathbf{a}^{(3)} & (\text{if } \varepsilon^*_i(\mathbf{a}) > 0), \end{cases} \qquad \widetilde{f}^*_i\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(4)}.$$

Proposition 2.2.2 ([R],[S]). $\left(\mathcal{B}_I; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$, $\left(\mathcal{B}_I; \mathrm{wt}, \varepsilon^*_i, \varphi^*_i, \widetilde{e}^*_i, \widetilde{f}^*_i\right)$ はともに *crystal* で，さらに *crystal* として $B(\infty)$ と同型である．

2.3. BZ data と Lusztig data の対応.

Definition 2.3.1 ([BFZ]). $\mathbf{k} = \{k_{n+1} < k_{n+2} < \cdots < k_{n+u}\} \in \mathcal{M}^\times_I$ を *Maya* 図形とする．このとき，次の条件を満たす整数の組 $C = (c_{p,q})_{n+1 \le p \le q \le n+u}$ を **k**-*tableau* と呼ぶ：

$$c_{p,p} = k_p, \qquad c_{p,q} \le c_{p,q+1}, \qquad c_{p,q} < c_{p+1,q}.$$

Lusztig datum $\mathbf{a} = (a_{i,j}) \in \mathcal{B}_I$ に対し，整数の組 $\mathbf{M}(\mathbf{a}) = (M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}))_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}^\times_I}$ を

$$M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}) := -\sum_{j=n+1}^{n+u}\sum_{i=n+1}^{k_j-1} a_{i,k_j} + \min\left\{ \sum_{n+1 \le p < q \le n+u} a_{c_{p,q}, c_{p,q}+(q-p)} \;\middle|\; \begin{array}{c} C = (c_{p,q}) \text{ は} \\ \mathbf{k}\text{-tableau} \end{array} \right\}$$

で定義する．また写像 $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{M}(\mathbf{a})$ を Φ_I と書く．

Theorem 2.3.2 ([BFZ],[S]). Φ_I は $\mathcal{B}_I$ から $\mathcal{B}Z_I^e$ への全単射を与え，さらに *crystal* としての同型 $\left(\mathcal{B}_I;\mathrm{wt},\varepsilon_i^*,\varphi_i^*,\widetilde{e}_i^*,\widetilde{f}_i^*\right)\xrightarrow{\Phi_I}\left(\mathcal{B}Z_I^e;\mathrm{wt},\varepsilon_i^*,\varphi_i^*,\widetilde{e}_i^*,\widetilde{f}_i^*\right)$ を誘導する.

合成 $\mathcal{B}_I \xrightarrow{\Phi_I} \mathcal{B}Z_I^e \xrightarrow{*} \mathcal{B}Z_I$ を考えることで次を得る.

Corollary 2.3.3. 全単射 $*\circ\Phi_I:\mathcal{B}_I\to\mathcal{B}Z_I$ は同型

$$\left(\mathcal{B}_I;\mathrm{wt},\varepsilon_i^*,\varphi_i^*,\widetilde{e}_i^*,\widetilde{f}_i^*\right)\xrightarrow{*\circ\Phi_I}\left(\mathcal{B}Z_I;\mathrm{wt},\varepsilon_i,\varphi_i,\widetilde{e}_i,\widetilde{f}_i\right)$$

を誘導する.

3. 無限区間への拡張

3.1. Berenstein Zelevinsky data associated to $\mathbb{Z}$.

Definition 3.1.1. (1) $r\in\mathbb{Z}$ を整数とする. $\mathbb{Z}$ の部分集合 $\mathbf{k}$ が荷電 r の *Maya* 図形であるとは，非負整数 p, q が存在して

$$\mathbb{Z}_{\le r-p}\subset\mathbf{k}\subset\mathbb{Z}_{\le r+q},\quad |\mathbf{k}\cap\mathbb{Z}_{>r-p}|=p$$

を満たすことをいう. 荷電 r の *Maya* 図形全体を $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r)}$ と書き，$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}:=\bigcup_{r\in\mathbb{Z}}\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r)}$ とおく.
(2) 荷電 r の *Maya* 図形 $\mathbf{k}$ に対し, $\mathbf{k}^c:=\mathbb{Z}\setminus\mathbf{k}$ とおく. これを荷電 r の反 *Maya* 図形と呼び，その全体を $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r),c}$ と書く. また $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{c}:=\bigcup_{r\in\mathbb{Z}}\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r),c}$ とする.

定義から，荷電 r の Maya 図形 $\mathbf{k}$ は,

$$\mathbf{k}=\{k_j\mid j\in\mathbb{Z}_{\le r}\};\quad k_{j-1}<k_j\ (j\le r),\quad k_j=j\ (j\ll r)$$

なる整数の列と思える. 同様に，荷電 r の反 Maya 図形 $\mathbf{k}$ は

$$\mathbf{k}=\{k_j\mid j\in\mathbb{Z}_{>r}\};\quad k_j<k_{j+1}\ (j>r),\quad k_j=j\ (j\gg r)$$

なる整数の列と思える. 写像 $c:\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}\to\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c$ を $\mathbf{k}\mapsto\mathbf{k}^c$ で定めると，これは全単射となる. 以後，逆写像も同じ記号で c と書くことにしよう.

$I=[l+1,l+m]$ とし,

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I):=\left\{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}\mid\mathbf{k}=\mathbb{Z}_{\le n}\cup\mathbf{k}_I,\ \text{for some }\mathbf{k}_I\in\mathcal{M}_I^{\times}\right\},$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I):=\left\{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c\mid\mathbf{k}=\mathbf{k}_I\cup\mathbb{Z}_{\ge n+m+2},\ \text{for some }\mathbf{k}_I\in\mathcal{M}_I^{\times}\right\}$$

とおく. 写像 $\mathrm{res}_I:\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)\to\mathcal{M}_I^{\times}$ を $\mathbf{k}\mapsto\mathbf{k}_I$ で定めると，res_I は全単射である. $\mathbf{k}\in\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ に対し, $\Omega_I(\mathbf{k}):=(\mathrm{res}_I)^{-1}\big(\widetilde{I}\setminus\mathrm{res}_I(\mathbf{k})\big)$ とおく. このとき $\Omega_I(\mathbf{k})\in\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ であり，写像 $\Omega_I:\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)\to\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ は全単射となる. 全単射 $\mathrm{res}_I^c:\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I)\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}_I^{\times}$ および，全単射 $\Omega_I^c:\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I)\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ を同様に定める. このとき次の補題が容易に確かめられる.

Lemma 3.1.2. (1) *Maya* 図形 $\mathbf{k}$ が $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ に属することと，反 *Maya* 図形 $\mathbf{k}^c$ が $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I)$ に属することは同値である.
(2) 任意の $\mathbf{k}\in\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ に対し，次が成り立つ.

$$(\mathrm{res}_I^c)^{-1}\big(\widetilde{I}\setminus\mathrm{res}_I(\mathbf{k})\big)=\mathbf{k}^c,\qquad\mathrm{res}_I^{-1}\big(\widetilde{I}\setminus\mathrm{res}_I^c(\mathbf{k}^c)\big)=\mathbf{k},\tag{3.1.1}$$

$$(\mathrm{res}_I^c)^{-1}\big(\mathrm{res}_I(\mathbf{k})\big)=\Omega_I^c(\mathbf{k}^c),\qquad\mathrm{res}_I^{-1}\big(\mathrm{res}_I^c(\mathbf{k}^c)\big)=\Omega_I(\mathbf{k}),\tag{3.1.2}$$

$$\big(\Omega_I(\mathbf{k})\big)^c=\Omega_I^c(\mathbf{k}^c),\qquad\big(\Omega_I^c(\mathbf{k}^c)\big)^c=\Omega_I(\mathbf{k}).\tag{3.1.3}$$

$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ を $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ でインデックス付けされた整数の組とする．このような $\mathbf{M}$ に対し，$\mathbf{M}_I := (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)}$ とおく．このとき，全単射 $\mathrm{res}_I : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_I^{\times}$ によって，$\mathbf{M}_I$ は $\mathcal{M}_I^{\times}$ でインデックス付けされた整数の組と思える．同様に，$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}}$ に対して，$\mathbf{M}_I := (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}(I)}$ は $\mathcal{M}_I^{\times}$ でインデックス付けされた整数の組と思える．

Definition 3.1.3. (1) 整数の組 $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}}$ が $\mathbb{Z}$ に付随する *BZ datum* であるとは，次が満たされることをいう：

(1-a) $\mathbb{Z}$ の任意の有限区間 K に対し，$\mathbf{M}_K = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_K^{\times}}$ は $\mathcal{BZ}_K$ の元である．

(1-b) 各 $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}$ に対し，有限区間 I が存在して，*such that*

(1-i) $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}(I)$,

(1-ii) $J \supset I$ なる任意の有限区間 J に対し，$M_{\Omega_J^{\mathrm{c}}(\mathbf{k})} = M_{\Omega_I^{\mathrm{c}}(\mathbf{k})}$.

(2) 整数の組 $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ が $\mathbb{Z}$ に付随する *e-BZ datum* であるとは，次が満たされることをいう：

(2-a) $\mathbb{Z}$ の任意の有限区間 K に対し，$\mathbf{M}_K = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_K^{\times}}$ は $\mathcal{BZ}_K^{\mathrm{e}}$ の元である．

(2-b) 各 $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ に対し，有限区間 I が存在して，$\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ かつ，上記 (1-ii) と同様の条件が満たされる．

$\mathbb{Z}$ に付随する BZ data 全体の集合を $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$，$\mathbb{Z}$ に付随する e-BZ data 全体の集合を $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{e}}$ と書く．

与えられた $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し，新しい整数の組 $\mathbf{M}^* = (M_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ を

$$M_{\mathbf{k}}^* := M_{\mathbf{k}^{\mathrm{c}}}$$

で定める．このとき，有限区間の場合と同様に次が成り立つ．

Lemma 3.1.4. $\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し，$\mathbf{M}^*$ は $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{e}}$ の元である．さらに $* : \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{e}}$ は全単射である．

以下，上記全単射の逆写像も同じ記号で $*$ と書くことにする．

$\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し，(上の $\mathbf{M}^*$ とは別の) 新しい整数の組 $\Theta(\mathbf{M}) = (\Theta(M)_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ を次のように定める．$\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ を固定し，その補集合 $\mathbf{k}^{\mathrm{c}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}$ を考える．$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}^{\mathrm{c}}})_{\mathbf{k}^{\mathrm{c}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ であったので，$\mathbf{k}^{\mathrm{c}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}$ に対し，Definition 3.1.3 の条件 (1-b) を満たすような有限区間 I が存在する．このとき Lemma 3.1.2 (1) から，$\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ となることがわかる．そこで，$\Theta(M)_{\mathbf{k}} := M_{(\mathrm{res}_I^{\mathrm{c}})^{-1}(\mathrm{res}_I(\mathbf{k}))}$ とおくと，これは上の有限区間 I の取り方に依らず定まる．実際，Lemma 3.1.2 の (3.1.2) より，$(\mathrm{res}_I^{\mathrm{c}})^{-1}(\mathrm{res}_I(\mathbf{k})) = \Omega_I^{\mathrm{c}}(\mathbf{k}^{\mathrm{c}})$ である．したがって Definition 3.1.3 の条件 (1-b) から，$\Theta(\mathbf{M})_{\mathbf{k}}$ は I の取り方に依らずに定まる．

3.2. Kashiwara operators on BZ data associated to $\mathbb{Z}$. まず $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ 上に raising Kashiwara operators $\widetilde{e}_p$ $(p \in \mathbb{Z})$ の作用を定める．$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\varepsilon_p(\mathbf{M}) := -\Big(\Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\le p}} + \Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\le p-1} \cup \{p+1\}} - \Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\le p+1}} - \Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\le p-1}}\Big)$$

とおく．このとき $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ の定義から，$\varepsilon_p(\mathbf{M})$ は非負整数となることがわかる．

$\varepsilon_p(\mathbf{M}) = 0$ の場合には，$\widetilde{e}_p\mathbf{M} = 0$ とおく．他方，$\varepsilon_p(\mathbf{M}) > 0$ の場合には，$\widetilde{e}_p\mathbf{M} = (M'_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}}$ を以下のように定義する．各 $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{c}}$ に対し，有限区間 I を十分大きく取り，

$$M'_{\mathbf{k}} := \big(\widetilde{e}_p\mathbf{M}_I\big)_{\mathrm{res}_I^{\mathrm{c}}(\mathbf{k})}$$

と定める．ここで $\mathbf{M}_I \in \mathcal{BZ}_I$ であったので，$\widetilde{e}_p\mathbf{M}_I$ はすでに定義されていることに注意しよう．この定義が well-defined であるためには，上の定義が有限区間 I の取り方に依らないことを言わねばならないが，それは Definition 3.1.3 の条件 (1-b) から比較的容易に従う．

次に lowering Kashiwara operators $\widetilde{f}_p$ $(p \in \mathbb{Z})$ の作用を定義しよう．アイデアは上の場合とほぼ同様である．$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{Z}}} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し，$\widetilde{f}_p\mathbf{M} = (M''_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{Z}}}$ を次のように定める．各 $\mathbf{k} \in \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{Z}}$ に対し，有限区間 I を十分大きく取り，

$$M''_{\mathbf{k}} := (\widetilde{f}_p\mathbf{M}_I)_{\mathrm{res}^{\mathrm{c}}_I(\mathbf{k})}$$

と定める．このとき Definition 3.1.3 の条件 (1-b) から，この定義が well-defined であることが従う．

Proposition 3.2.1 ([NSS1]). 任意の $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{Z}}} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し，$\widetilde{e}_p\mathbf{M}$ (*resp.* $\widetilde{f}_p\mathbf{M}$) は $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ (*resp.* $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$) に含まれる．

後の議論では $\mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}}$ 上の $*$-Kashiwara operators $\widetilde{e}^*_p$, $\widetilde{f}^*_p$ も必要になる．こちらも併せて定義しておこう．

$\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}}$ に対し，$\varepsilon^*_p(\mathbf{M}) := \varepsilon_p(\mathbf{M}^*)$ $(p \in \mathbb{Z})$ とおき，$\mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}}$ 上の Kashiwara operators $\widetilde{e}^*_p$ および $\widetilde{f}^*_p$ を

$$\widetilde{e}^*_p\mathbf{M} := \begin{cases} (\widetilde{e}_p(\mathbf{M}^*))^* & (\varepsilon^*_p(\mathbf{M}) > 0), \\ 0 & (\varepsilon^*_p(\mathbf{M}) = 0), \end{cases} \qquad \widetilde{f}^*_p\mathbf{M} := (\widetilde{f}_p(\mathbf{M}^*))^*$$

で定める．以下の Lemma は上の Proposition の簡単な帰結である．

Corollary 3.2.2. 任意の $\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し，$\widetilde{e}^*_p\mathbf{M}$ (*resp.* $\widetilde{f}^*_p\mathbf{M}$) は $\mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ (*resp.* $\mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}}$) に含まれる．

4. Berenstein-Zelevinsky data of type $A^{(1)}_{n-1}$

4.1. Root datum of type $A^{(1)}_{n-1}$. 以下，3 以上の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ を固定する．$\widehat{\mathfrak{g}}$ を $A^{(1)}_{n-1}$ 型 affine Lie algbera，$\widehat{\mathfrak{h}}$ をその Cartan subalgebra，$\widehat{h}_i \in \widehat{\mathfrak{h}}$ $(i \in \widehat{I} := \{0, 1, \cdots, l-1\})$ を simple coroot，$\widehat{\alpha}_i \in \widehat{\mathfrak{h}}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widehat{\mathfrak{h}}, \mathbb{C})$ $(i \in \widehat{I})$ を simple root とする．$\widehat{\mathfrak{g}}$. このとき $\langle \widehat{h}_i, \widehat{\alpha}_j \rangle = \widehat{a}_{ij}$ $(i, j \in \widehat{I})$ である．ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle : \widehat{\mathfrak{h}} \times \widehat{\mathfrak{h}}^* \to \mathbb{C}$ は canonical pairing，$\widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})_{i,j\in\widehat{I}}$ は index set を $\widehat{I}$ とする $A^{(1)}_l$ 型 Cartan matrix で，その行列成分 $\widehat{a}_{ij}$ は

$$\widehat{a}_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j), \\ -1 & (|i - j| = 1 \text{ or } l - 1), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で与えられる．

4.2. BZ data of type $A^{(1)}_{n-1}$. $\mathbb{Z}$ 上の全単射 τ を $j \mapsto \tau(j) := j + 1$ $(j \in \mathbb{Z})$ で定め，$\sigma := \tau^n$ とおく．$\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し，$\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{Z}}$ でインデックス付けされた整数の組 $\sigma(\mathbf{M})$ および $\sigma^{-1}(\mathbf{M})$ を

$$\sigma(\mathbf{M})_{\mathbf{k}} = \mathbf{M}_{\sigma^{-1}(\mathbf{k})}, \quad \sigma^{-1}(\mathbf{M})_{\mathbf{k}} = \mathbf{M}_{\sigma(\mathbf{k})} \quad (\mathbf{k} \in \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{Z}})$$

で定める．このとき $\sigma(\mathbf{M})$ と $\sigma^{-1}(\mathbf{M})$ はともに $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ の元であり，全単射 $\sigma^{\pm} : \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ が誘導される．また，$\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}}$ に対しても同様の方法で組 $\sigma^{\pm}(\mathbf{M})$ を定義することが出来，全単射 $\sigma^{\pm} : \mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{BZ}^{\mathrm{e}}_{\mathbb{Z}}$ が誘導される．

Lemma 4.2.1 ([NSS1]). (1) $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}$ 上，Θ と σ は可換である．
(2) 任意の $\mathbf{M} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し，$\varepsilon_p(\sigma(\mathbf{M})) = \varepsilon_{\sigma^{-1}(p)}(\mathbf{M})$.
(3) 任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対し，$\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ 上の作用素として $\sigma \circ \widetilde{e}_p = \widetilde{e}_{\sigma(p)} \circ \sigma$ かつ $\sigma \circ \widetilde{f}_p = \widetilde{f}_{\sigma(p)} \circ \sigma$ が成り立つ．ただし $\sigma(0) = 0$ と解釈するものとする．

Definition 4.2.2.

$$\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma} := \{\mathbf{M} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}} \mid \sigma(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\}, \quad (\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma} := \{\mathbf{M} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e} \mid \sigma(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\}$$

とおく．$\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ (*resp.* $(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma}$) の元を $A_{n-1}^{(1)}$ 型 *BZ* (*resp. e-BZ*) *datum* と呼ぶ．

$A_{n-1}^{(1)}$ 型 BZ data の全体 $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ 上に crystal structure を定めよう．まず $\mathbf{M} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ と $p \in \widehat{I}$ に対し，

$$\mathrm{wt}(\mathbf{M}) := \sum_{p \in \widehat{I}} \Theta(\mathbf{M})_{\mathbb{Z}_{\le p}} \widehat{\alpha}_p, \quad \widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{M}) := \varepsilon_p(\mathbf{M}), \quad \widehat{\varphi}_p(\mathbf{M}) := \widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{M}) + \langle \widehat{h}_p, \mathrm{wt}(\mathbf{M}) \rangle$$

とおく．
次に Kashiwara operators の作用を定義したい．次の Lemma に注意しよう．

Lemma 4.2.3 ([NSS1]). 2 つの整数 $q, q' \in \mathbb{Z}$ は $|q - q'| \ge 2$ を満たすとする．このとき $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}$ から $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ への作用素として $\widetilde{e}_q \widetilde{e}_{p'} = \widetilde{e}_{q'} \widetilde{e}_q$ かつ $\widetilde{f}_q \widetilde{f}_{q'} = \widetilde{f}_{q'} \widetilde{f}_q$.

この Lemma のもとに，$\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ 上の Kashiwara operators を以下のように定める．$\mathbf{M} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$, $p \in \widehat{I}$ とする．もし $\widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{M}) = 0$ なら，$\widehat{e}_p\mathbf{M} := 0$ とおく．$\widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{M}) > 0$ の時は，新しい整数の組 $\widehat{e}_p\mathbf{M} = (M'_{\mathbf{k}})$ を

$$M'_{\mathbf{k}} := \left(e_{L(\mathbf{k},p)}\mathbf{M}\right)_{\mathbf{k}} \quad \text{for each } \mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{c}$$

で定義する．ここに $L(\mathbf{k}, p) := \{q \in p + n\mathbb{Z} \mid q \in \mathbf{k} \text{ and } q+1 \notin \mathbf{k}\}$，$e_{L(\mathbf{k},p)} := \prod_{q \in L(\mathbf{k},p)} \widetilde{e}_q$ である．定義から $L(\mathbf{k}, p)$ は有限集合で，しかも任意の異なる 2 元 $q, q' \in L(\mathbf{k}, p)$ は，$|q - q'| > 2$ を満たす．従って Lemma 4.2.3 より，$e_{L(\mathbf{k},p)}$ は積の順序の取り方に依らずに定まる well-defined な作用素である．
lowering Kashiwara operators の作用も同様の方法で定める．$f_{L(\mathbf{k},p)} := \prod_{q \in L(\mathbf{k},p)} \widetilde{f}_q$ とし，整数の組 $\widehat{f}_p\mathbf{M} = (M''_{\mathbf{k}})$ を

$$M''_{\mathbf{k}} := \left(f_{L(\mathbf{k},p)}\mathbf{M}\right)_{\mathbf{k}} \quad \text{for each } \mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{c}$$

とおく．$f_{L(\mathbf{k},p)}$ が well-defined であることは前の場合と同様である．

Proposition 4.2.4 ([NSS1]). (1) $\widehat{e}_p\mathbf{M} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma} \cup \{0\}$ かつ $\widehat{f}_p\mathbf{M} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$.
(2) 組 $\left(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 *crystal* である．

$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{c}$ でインデックス付けされた整数の組であって，各 $\mathbf{k}$-成分が全て 0 であるようなものを $\mathbf{O}$ と書く．$\mathbf{O} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ となることは明らかであろう．crystal $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ の，$\mathbf{O}$ を含む (crystal としての) 連結成分を $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O})$ と書く．

Theorem 4.2.5 ([NSS1]). $\left(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O}); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型の $B(\infty)$ と *crystal* として同型である．

有限区間の場合と同様の方法で，$(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma}$ 上にも crystal structure を定めることができる．定義から $* \circ \sigma = \sigma \circ *$ が成り立つことは容易にわかる．しかがって全単射 $* : \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e}$ の $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ への制限は，再び全単射 $* : \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma}$ を定める．そこで $\mathbf{O} \in \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ の $*$ による像を $\mathbf{O}^*$ と書く．これは $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ でインデックス付けされた整数の組であって，全ての成分が 0 であるようなものに他ならない．

与えられた $\mathbf{M} = (\mathcal{B}Z^{e}_{\mathbb{Z}})^{\sigma}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\mathrm{wt}(\mathbf{M}) := \mathrm{wt}(\mathbf{M}^*), \quad \widehat{\varepsilon}^*_p(\mathbf{M}) := \widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{M}^*), \quad \widehat{\varphi}^*_p(\mathbf{M}) := \widehat{\varepsilon}^*_p(\mathbf{M}) + \langle \widehat{h}_p, \mathrm{wt}(\mathbf{M}) \rangle,$$

$$\widehat{e}^*_p\mathbf{M} := \begin{cases} (\widehat{e}_p(\mathbf{M}^*))^* & (\widehat{\varepsilon}^*_p(\mathbf{M}) > 0), \\ 0 & (\widehat{\varepsilon}^*_p(\mathbf{M}) = 0), \end{cases} \qquad \widehat{f}^*_p := (\widehat{f}_p(\mathbf{M}^*))^*$$

とおく．次の corollary は Theorem 4.2.5 から容易に従う．

Corollary 4.2.6 ([NSS2]). (1) 組 $\left((\mathcal{B}Z^{e}_{\mathbb{Z}})^{\sigma}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}^*_p, \widehat{\varphi}^*_p, \widehat{e}^*_p, \widehat{f}^*_p\right)$ は $A^{(1)}_{n-1}$ 型 *crystal* である．
(2) $(\mathcal{B}Z^{e}_{\mathbb{Z}})^{\sigma}(\mathbf{O}^*)$ で *crystal* $(\mathcal{B}Z^{e}_{\mathbb{Z}})^{\sigma}$ の $\mathbf{O}^* \in (\mathcal{B}Z^{e}_{\mathbb{Z}})^{\sigma}$ を含む連結成分を表す．このとき $\left((\mathcal{B}Z^{e}_{\mathbb{Z}})^{\sigma}(\mathbf{O}^*); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}^*_p, \widehat{\varphi}^*_p, \widehat{e}^*_p, \widehat{f}^*_p\right)$ は，*crystal* として $A^{(1)}_{n-1}$ 型の $B(\infty)$ と同型である．

5. 無限サイズの LUSZTIG DATA

Definition 4.2.2 で定義された "$A^{(1)}_{n-1}$ 型の BZ data" なるものは，単にそう名前を付けたという以上のものではなく,「なぜこれが affine 型の BZ data なのか？」という疑問は当然湧く．実際，BZ data を定める条件である edge inequality や Tropical Plücker relation を affine の場合に拡張したわけではない．しかしながら，我々は上の定理が成り立つことを根拠に，今回定義した "$A^{(1)}_{n-1}$ 型の BZ data" が,『BZ data の $A^{(1)}_{n-1}$ 型への拡張』と呼んでいいものだろうと考えているわけである．

ただし，前節で考えている $\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{O})$ は，文字通り $\mathbf{O}$ を含む crystal としての連結成分として定義されるものなので，その全体像は今のところよくわからない．また $\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}$ の中に $\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{O})$ 以外の連結成分があるかどうかもわからない[3]．

そこで，本節以降では "$A^{(1)}_{n-1}$ 型の Lusztig data" を用いて $\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{O})$ を実現する方法を与える．以下に述べるように $A^{(1)}_{n-1}$ 型の Lusztig data は，$A^{(1)}_{n-1}$ の canonical basis をパラメトライズする際に用いられる multisegment と本質的に同じ概念で，こちらはそれなりに由緒正しいものである．これ以降の議論の目標は，$A^{(1)}_{n-1}$ 型の Lusztig data 全体と $\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{O})$ の間の同型を具体的に構成し，その同型によって，$\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{O})$ の全体像を "理解" することである．

5.1. Definition of Lusztig data.

Definition 5.1.1. (1) $\Delta^+_{\mathbb{Z}} := \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i < j\}$ でインデックス付けされた非負整数の組 $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta^+_{\mathbb{Z}}}$ が $\mathbb{Z}$ に付随する *Lusztig datum* であるとは，正の整数 $N_{\mathbf{a}} > 0$ が存在して,

$$j - i \geq N_{\mathbf{a}} \text{ならば,} \quad a_{i,j} = 0 \tag{5.1.1}$$

を満たすことをいう．$\mathbb{Z}$ に付随する *Lusztig data* 全体の集合を $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と書く．
(2) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とする．$\mathbb{Z}$ に付随する *Lusztig datum* $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Delta^+_{\mathbb{Z}}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ が，条件

$$\text{任意の } (i,j) \in \Delta^+_{\mathbb{Z}} \text{に対し,} \quad a_{i,j} = a_{i+n,j+n} \tag{5.1.2}$$

を満たす時，$A^{(1)}_{n-1}$ 型 *Lusztig datum* であるという．$A^{(1)}_{n-1}$ 型 *Lusztig data* 全体の集合を $\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}$ と書く．
(3) *Lusztig datum* $\mathbf{a} \in \mathcal{B}^{(1)}_{l-1}$ が以下の条件を満たす時，*aperiodic* であるという．

任意の $(i,j) \in \Delta^+_{\mathbb{Z}}$ に対し，n 個の非負整数の列 $\{a_{i,j}, a_{i+1,j+1}, \cdots, a_{i+n-1,j+n-1}\}$ の中に，少なくとも 1 つ 0 が存在する．

$\mathcal{B}^{(1),ap}_{l-1}$ で *aperiodic* な *Lusztig data* 全体の集合を表す．

集合 $\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}$ は，以下に述べる multisegment 全体の集合と自然に同一視される．

[3]実は「$\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{O})$ は $\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}$ と一致しているのではないか？」とも考えているが，特に根拠があるわけではないので、今のところ $\mathcal{B}Z^{\sigma}_{\mathbb{Z}}$ 全体の構造に関しては不明な点が多い．

Definition 5.1.2. (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の長さ r の *segment* とは，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に値を取る連続する r 個の元の列

$$\boxed{x_1 \,|\, x_2 \,|\, \quad \cdots \quad \,|\, x_r}$$

のことをいう．ただし $x_p = i + p - 1$ $(1 \leq p \leq r)$ *for some* $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の *segment* の *multiset* を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の *multisegment* と呼び，その全体を $\mathbf{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ と書く．

与えられた $(i,j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^{+}$ に対し，$x_1 = i \bmod n\mathbb{Z}$ で始まる長さ $r = j-i$ の segment を対応させる．この対応で $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ から $\mathbf{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ への全単射が構成される．このとき，各 $(i,j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^{+}$ に対し，$a_{i,j}$ は対応する segment の multiplicity に他ならない．

また，同一視 $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)} \cong \mathbf{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ のもとで，$\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ が aperiodic であるということは，対応する multisegment が Lusztig ([L4]) の意味で aperiodic であるということに他ならない．後でも触れるが，aperiodic な multisegment 全体の集合は，$A_{n-1}^{(1)}$ 型の量子包絡環のベキ零部分代数の標準基底（$A_{n-1}^{(1)}$ 型の $B(\infty)$ と言っても良い）をパラメトライズすることが知られている ([L4]).

5.2. Kashiwara operators on $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$. 与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$A_k^{(p)}(\mathbf{a}) := \sum_{s \leq k} (a_{s,p+1} - a_{s-1,p}) \quad (k \leq p),$$

$$A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) := \sum_{t \geq k+1} (a_{p,t} - a_{p+1,t+1}) \quad (k \geq p)$$

とおく．条件 (5.1.1) により，右辺は有限和であり，さらに there exist k_1 and k_2 such that

$$A_k^{(p)}(\mathbf{a}) = 0 \quad (k \leq k_1), \qquad A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) = 0 \quad (k \geq k_2)$$

なる k_1, k_2 が存在することに注意しよう．したがって

$$\varepsilon_p(\mathbf{a}) := \max\left\{ A_k^{(p)}(\mathbf{a}) \;\middle|\; k \leq p \right\}, \qquad \varepsilon_p^*(\mathbf{a}) := \max\left\{ A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) \;\middle|\; k \geq p \right\}$$

と定めれば，これらは非負整数である．ここで

$$\mathcal{K}(p;\mathbf{a}) := \left\{ k \;\middle|\; k \leq p,\ \varepsilon_p(\mathbf{a}) = A_k^{(p)}(\mathbf{a}) \right\}, \quad \mathcal{K}^*(p;\mathbf{a}) := \left\{ k \;\middle|\; k \geq p,\ \varepsilon_p^*(\mathbf{a}) = A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) \right\}$$

とおこう．$\mathcal{K}(p;\mathbf{a})$ は上に有界なので，$k_f = k_f(p;\mathbf{a}) := \max\{k \mid k \in \mathcal{K}(p;\mathbf{a})\}$ は意味を持つ．他方，一般に $\mathcal{K}(p;\mathbf{a})$ は下に有界ではない．しかし，もし $\varepsilon_p(\mathbf{a}) > 0$ であるならば，$\mathcal{K}(p;\mathbf{a})$ は有限集合となる．したがって，この場合に限り $k_e = k_e(p;\mathbf{a}) := \min\{k \mid k \in \mathcal{K}(p;\mathbf{a})\}$ は意味を持つ．同様に，$\varepsilon_p^*(\mathbf{a}) > 0$ なる $\mathbf{a}$ に対してのみ $k_e^* = k_e^*(p;\mathbf{a}) := \max\{k \mid k \in \mathcal{K}^*(p;\mathbf{a})\}$ と定め，一般の $\mathbf{a}$ に対して $k_f^* = k_f^*(p;\mathbf{a}) := \min\{k \mid k \in \mathcal{K}^*(p;\mathbf{a})\}$ とおく．

以上の準備のもとに，$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ 上の Kashiwara operators $\widetilde{e}_p$, $\widetilde{f}_p$, $\widetilde{e}_p^*$, $\widetilde{f}_p^*$ $(p \in \mathbb{Z})$ が有限区間の場合と同様の方法で定義される．

5.3. Crystal structure on $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$. $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ 上に $A_{n-1}^{(1)}$ 型の crystal structure を定義しよう．まず次は容易に示せる．

Lemma 5.3.1. $p \in \widehat{I} = \{0, 1, \cdots, n-1\}$，$\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ とする．このとき任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対し，次が成り立つ．

$$A_k^{(p)} = A_{k+rn}^{(p+rn)}, \quad A_k^{*(p)} = A_{k+rn}^{*(p+rn)}, \quad \varepsilon_p(\mathbf{a}) = \varepsilon_{p+rn}(\mathbf{a}), \quad \varepsilon_p^*(\mathbf{a}) = \varepsilon_{p+rn}^*(\mathbf{a}),$$

$$k_e(p+rn;\mathbf{a}) = k_e(p;\mathbf{a}) + rn, \qquad k_f(p+rn;\mathbf{a}) = k_f(p;\mathbf{a}) + rn,$$

$$k_e^*(p+rn;\mathbf{a}) = k_e^*(p;\mathbf{a}) + rn, \qquad k_f^*(p+rn;\mathbf{a}) = k_f^*(p;\mathbf{a}) + rn.$$

与えられた $p \in \widehat{I}$ と $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ に対し,

$$\mathrm{wt}(\mathbf{a}) := -\sum_{p \in \widehat{I}} r_p(\mathbf{a})\widehat{\alpha}_p, \qquad \text{where } r_p(\mathbf{a}) := \sum_{s \le p} \sum_{t \ge p+1} a_{s,t},$$

$$\widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{a}) := \varepsilon_p(\mathbf{a}), \quad \widehat{\varepsilon}_p^*(\mathbf{a}) := \varepsilon_p^*(\mathbf{a}), \quad \widehat{\varphi}_p := \widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{a}) + \langle \widehat{h}_p, \mathrm{wt}(\mathbf{a}) \rangle, \quad \widehat{\varphi}_p^* := \widehat{\varepsilon}_p^*(\mathbf{a}) + \langle \widehat{h}_p, \mathrm{wt}(\mathbf{a}) \rangle$$

とおく．ここで条件 (5.1.1) により，$r_p(\mathbf{a})$ の定義の右辺は有限和であることに注意しよう．さらに以下の等式の成立も容易に示せる：$|q - q'| > 2$ なる 2 整数 $q, q' \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\widetilde{e}_q \widetilde{e}_{q'} = \widetilde{e}_{q'} \widetilde{e}_q, \quad \widetilde{f}_q \widetilde{f}_{q'} = \widetilde{f}_{q'} \widetilde{f}_q, \quad \widetilde{e}_q^* \widetilde{e}_{q'}^* = \widetilde{e}_{q'}^* \widetilde{e}_q^*, \quad \widetilde{f}_q^* \widetilde{f}_{q'}^* = \widetilde{f}_{q'}^* \widetilde{f}_q^*.$$

したがって，以下の作用素は well-defined である．

$$\widehat{e}_p := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \widetilde{e}_{p+rl}, \quad \widehat{f}_p := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \widetilde{f}_{p+rl}, \quad \widehat{e}_p^* := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \widetilde{e}_{p+rl}^*, \quad \widehat{f}_p^* := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \widetilde{f}_{p+rl}^*.$$

さらに 5.3.1 から，$\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ の上記作用素たちによる像は $\mathcal{B}_{l-1}^{(1)} \cup \{0\}$ に含まれる．より強く，次が成り立つ．

Proposition 5.3.2. [NSS2] 組 $\left(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$，および組 $\left(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p^*, \widehat{\varphi}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*\right)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 *crystal* である．

以下，$\left(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$ および $\left(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p^*, \widehat{\varphi}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*\right)$ の，より詳細な構造を調べよう．

Definition 5.3.3. *Lusztig datum* $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ が *maximal element* であるとは，任意の $p \in \widehat{I}$ に対して $\widehat{\varepsilon}_p(\mathbf{a}) = 0$ が成り立つときをいう．$\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ の *maximal element* 全体を $\mathrm{Max}(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)})$ と書く．

非負整数の無限列 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots)$ であって，$z_l = 0$ ($l \gg 1$) なるものを考える．また，このような $\mathbf{z}$ の全体を $\mathcal{Z}$ と書く．$\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ に対し，$\mathbf{a}_{\mathbf{z}} = ((a_{\mathbf{z}})_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ を $(a_{\mathbf{z}})_{i,j} := z_{j-i}$ で定める．他方，$\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ に対し，非負整数の無限列 $\mathbf{z}(\mathbf{a}) = (z(\mathbf{a})_1, z(\mathbf{a})_2, \cdots) \in \mathcal{Z}$ を $z(\mathbf{a})_l := \min\{a_{i,j} \mid j - i = l\}$ for $l \ge 1$ で定め，$\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z}) := \{\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)} \mid \mathbf{z}(\mathbf{a}) = \mathbf{z}\}$ とおく．このとき構成から次は明らかである．

$$\mathcal{B}_{n-1}^{(1)} = \bigsqcup_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z}) \tag{5.3.1}$$

かつ

$$\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{0}) = \mathcal{B}_{n-1}^{(1),ap}, \quad \text{ただし } \mathbf{0} := (0, 0, \cdots) \in \mathcal{Z}.$$

以上の記法のもとに，次が成り立つ．

Lemma 5.3.4. (1) $\mathrm{Max}(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}) = \{\mathbf{a}_{\mathbf{z}} | \mathbf{z} \in \mathcal{Z}\}$ である．さらに，各 $\mathbf{z} = (z_l) \in \mathcal{Z}$ に対し，$\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z})$ は唯一の *maximal element* $\mathbf{a}_{\mathbf{z}}$ を含む．

(2) *Lusztig datum* $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ が *maximal* であることと，任意の $p \in \widehat{I}$ に対して $\widehat{\varepsilon}_p^*(\mathbf{a}) = 0$ であることは同値．

定義から $\mathrm{wt}(\mathbf{a}_{\mathbf{z}}) = -m(\mathbf{z})\delta$ は容易にわかる．ここに $m(\mathbf{z}) = \sum_{l \ge 1} n z_l$．また $\delta := \sum_{p \in \widehat{I}} \widehat{\alpha}_p$ は null root である．

P を $A_{n-1}^{(1)}$ 型の weght lattice，$\lambda \in P$ とする．ただ 1 つの元からなる集合 $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ を考え，ここに 2 つの $A_{n-1}^{(1)}$ 型の crystal structure $(T_\lambda; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p)$ and $(T_\lambda; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p^*, \widehat{\varphi}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*)$

を次のように定める：まず $\mathrm{wt}(t_\lambda) = \lambda$ とおく．さらに $p \in \widehat{I}$ に対し，$\widehat{\varepsilon}_p(t_\lambda) = \widehat{\varphi}_p(t_\lambda) = \widehat{\varepsilon}^*_p(t_\lambda) = \widehat{\varphi}^*_p(t_\lambda) = -\infty$, $\widehat{e}_p t_\lambda = \widehat{f}_p t_\lambda = \widehat{e}^*_p t_\lambda = \widehat{f}^*_p t_\lambda = 0$ とおく．

写像 $\mathcal{T} : \mathcal{B}^{(1)}_{l-1}(\mathbf{z}) \to \mathcal{B}^{(1)}_{l-1}(\mathbf{0}) \otimes T_{-m(\mathbf{z})\delta}$ を

$$\mathbf{a} \quad \mapsto \quad \mathbf{a}(0) \otimes t_{-m(\mathbf{z})\delta}$$

で定める．このとき，次が成り立つ．

Theorem 5.3.5 ([LTV]). (1) 各 $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ に対し，組 $\left(\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}(\mathbf{z}); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$ および，組 $\left(\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}(\mathbf{z}); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}^*_p, \widehat{\varphi}^*_p, \widehat{e}^*_p, \widehat{f}^*_p\right)$ は $A^{(1)}_{n-1}$ 型 *crystal* である．

(2) $\left(\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}(\mathbf{0}); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$ と $\left(\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}(\mathbf{0}); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}^*_p, \widehat{\varphi}^*_p, \widehat{e}^*_p, \widehat{f}^*_p\right)$ は，いずれも *crystal* として $A^{(1)}_{n-1}$ 型の $B(\infty)$ と同型である．

(3) 写像 $\mathcal{T} : \mathcal{B}^{(1)}_{l-1}(\mathbf{z}) \to \mathcal{B}^{(1)}_{l-1}(\mathbf{0}) \otimes T_{-m(\mathbf{z})\delta}$ は，*crystal* としての同型を与える．

(4) 分解 (5.3.1) は，$\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}$ の *crystal* としての連結成分への分解を与える．より正確に，$\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}$ の *crystal* の *crystal* としての構造は，次のように記述される．

$$\mathcal{B}^{(1)}_{n-1} \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(B(\infty) \otimes T_{-m\delta}\right)^{\oplus p(m)},$$

ただし $p(m)$ は $m \geq 0$ の分割数．

Remark . Leclerc-Thibon-Vasserot が [LTV] で導入している $\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}$ 上 ($\mathbf{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 上と言っても良い) は，正確には $\left(\mathcal{B}^{(1)}_{n-1}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}^*_p, \widehat{\varphi}^*_p, \widehat{e}^*_p, \widehat{f}^*_p\right)$ の方である．したがって，厳密に言えば，彼らが証明したのは上記定理の半分だけであるが，残りの部分は全く同じ議論で証明出来るので，“[LTV] の定理” と呼ぶことにした．

6. BZ data arising from Lusztig data of Infinite size

6.1. 主定理． 以上の準備のもとに，今回の主結果を述べたい．そのために，いくつか準備をする．

無限サイズの Lusztig datum $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Delta^+_{\mathbb{Z}}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と有限区間 $I = [l+1, l+m]$ を考える．このとき，$\Delta^+_I = \{(i,j) \mid l+1 \leq i < j \leq l+m+1\}$ は自然に $\Delta^+_{\mathbb{Z}}$ の部分集合と思える．そこで $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ から定まる，Δ^+_I でインデックス付けされた非負整数の組 $\mathbf{a}^I = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Delta^+_I}$ を考える．定義から $\mathbf{a}^I \in \mathcal{B}_I$ となることは，明らかであるが，より強く次が成り立つ．

Lemma 6.1.1 ([NSS2]). 与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ に対し，以下の２条件を満たす有限区間 I_0 が存在する：(i) $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I_0)$ かつ，(ii) $J \supset I_0$ なる任意の有限区間 J に対し，$M_{\mathrm{res}_J(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^J) = M_{\mathrm{res}_{I_0}(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^{I_0})$.

与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ に対して上のような有限区間 I_0 を取り，$M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}) := M_{\mathrm{res}_{I_0}(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^{I_0})$ と定める．上の Lemma から，この定義は I_0 の取り方に依らない．さらに $\mathbf{M}(\mathbf{a}) := (M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}))_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ とし，$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ から $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ でインデックス付けされた整数の組のなす集合への写像 $\Phi_{\mathbb{Z}}$ を $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{M}(\mathbf{a})$ で定める．

注意すべきは，このように定義された写像 $\Phi_{\mathbb{Z}}$ が単射ではない，ということである．実際，次が成り立つ．

Lemma 6.1.2 ([NSS2]). 任意の $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ に対し，$\Phi_{\mathbb{Z}}(\mathbf{a}_{\mathbf{z}}) = \mathbf{O}^*$ である．

しかし，定義域を $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap} = \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}(\mathbf{0})$ に制限した場合には，単射となる．より強く，次が成り立つ．

Theorem 6.1.3 ([NSS2]，主定理)**.** 写像 $\Phi_{\mathbb{Z}}$ による $\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}$ の像は $(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma}(\mathbf{O}^*)$ に一致する．さらにこの写像は *crystal* としての同型

$$\Phi_{\mathbb{Z}} : \left(\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p^*, \widehat{\varphi}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*\right) \xrightarrow{\sim} \left((\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma}(\mathbf{O}^*); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p^*, \widehat{\varphi}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*\right)$$

を誘導する．

また，Theorem 6.1.3 から次は容易に従う．

Corollary 6.1.4 ([NSS2])**.** 全単射 $* \circ \Phi_{\mathbb{Z}} : \mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap} \xrightarrow{\Phi_{\mathbb{Z}}} (\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma}(\mathbf{O}^*) \xrightarrow{*} \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O})$ は *crystal* としての同型 $\left(\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p^*, \widehat{\varphi}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*\right) \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O}); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$ を誘導する．

6.2. もう一つの具体的表示式． 5節の始めに述べた「$\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O}$ の全体像を affine 型の Lusztig data を介して理解する」という目標からすれば，Corollary 6.1.4 でも十分なのであるが，同型対応の構成の途中に $(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{e})^{\sigma}(\mathbf{O}^*)$ を用いているために，もう一つわかりにくい点もある．話の最後に affine 型の Lusztig data から $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O}$ への同型対応をダイレクトに構成する方法を紹介したい．

まず，有限区間の場合を考える．$I = [n+1, n+m]$ を有限区間，$\mathbf{k} = \{k_{n+1} < \cdots < k_{n+u}\} \in \mathcal{M}_I^{\times}$ とする．I に付随する Lusztig datum $\mathbf{a}^I = (a_{i,j}^I)_{(i,j)\in\Delta_I^+} \in \mathcal{B}_I$ に対し，整数の組 $\mathbf{M}'(\mathbf{a}^I) = (M'_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}^I))_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_I^{\times}}$ を

$$M'_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}^I) := -\sum_{i=n+1}^{n+u}\sum_{j=k_i+1}^{n+m+1} a_{k_i,j}^I + \min\left\{ \sum_{n+1\le p<q\le n+u} a_{c_{p,q},c_{p,q}+(q-p)}^I \;\middle|\; \begin{array}{c} C=(c_{p,q}) \text{ は} \\ \mathbf{k}\text{-tableau.} \end{array} \right\}$$

で定める．また写像 Φ'_I を $\mathbf{a}^I \mapsto \mathbf{M}'(\mathbf{a}^I)$ で定義する．

この Φ'_I を持ちいることで，$\mathcal{B}_I$ から $\mathcal{B}Z_I$ への同型を直接構成出来る (Corollary 2.3.3 を参照)．

Proposition 6.2.1 ([NSS2])**.** 任意の $\mathbf{a}^I \in \mathcal{B}_I$ に対して，$\Phi'_I(\mathbf{a}^I) = \mathbf{M}'(\mathbf{a}^I)$ は $\mathcal{B}Z_I$ の元である．さらに $\Phi'_I : \mathcal{B}_I \to \mathcal{B}Z_I$ は *crystal* としての同型

$$\left(\mathcal{B}_I; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right) \xrightarrow{\Phi'_I} \left(\mathcal{B}Z_I; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$$

を誘導する．

話を無限区間の場合に戻そう．無限サイズの Lusztig data $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Delta_{\mathbb{Z}}^+} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ に対し，その I への制限を $\mathbf{a}^I = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Delta_I^+}$ と書く．このとき $\mathbf{a}^I$ が $\mathcal{B}_I$ の元となるのは明らかであろう．前節までの議論と同様の論法で，次が示せる．

Theorem 6.2.2 ([NSS2])**.** (1) 与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{c}$ に対し，有限区間 I_0 が存在して，$J \supset I_0$ なる任意の有限区間 J に対し，$M'_{\mathrm{res}_J^c(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^J) = M'_{\mathrm{res}_{I_0}^c(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^{I_0})$ が成り立つ．

(2) $M'_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}) := M'_{\mathrm{res}_{I_0}^c}(\mathbf{k})(\mathbf{a}^{I_0})$ とおく．このとき，整数の組 $\mathbf{M}'(\mathbf{a}) := (M'_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}))_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c}$ は $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}$ の元である．すなわち，写像 $\Phi'_{\mathbb{Z}} : \mathcal{B}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}$ が $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{M}'(\mathbf{a})$ によって定まる．

(3) $\Phi'_{\mathbb{Z}}$ の定義域を $\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}$ に制限したものは，$\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}$ から $\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O})$ への全単射を与える．さらにこの全単射は *crystal* としての同型

$$\left(\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}; \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right) \xrightarrow{\Phi'_{\mathbb{Z}}} \left(\mathcal{B}Z_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O}); \mathrm{wt}, \widehat{\varepsilon}_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{e}_p, \widehat{f}_p\right)$$

を誘導する．

References

[A] J. E. Anderson, *A polytope calculus for semisimple groups*, Duke. Math. J. **116** (2003), 567-588.

[BK] P. Baumann and J. Kamnitzer, *Preprojective algebras and MV polytopes*, arXiv:1009.2469.

[BFZ] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. Math. **122** (1996), 49-149. N. Enomoto and M. Kashiwara, *Symmetric crystals for* $\mathfrak{gl}_\infty$, Publ. RIMS. **44** (2008), 837-891.

[Kam1] J. Kamnitzer, *Mirković-Vilonen cycles and polytopes*, Ann. of Math. **171** (2010), 245-294.

[Kam2] J. Kamnitzer, *The crystal structure on the set of Mirković-Vilonen polytopes*, Adv. Math. **215** (2007), 66-93.

[KamS] J. Kamnitzer and C. Sadanand, *Modules with* 1*-dimensional socle and components of Lusztig quiver varieties in type A*, arXiv:1009.0272.

[K1] M. Kashiwara, *Crystallizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), 465-516.

[K2] M. Kashiwara, *Global crystal base of quantum groups*, Duke Math. J. **69** (1993), 455-485.

[K3] M. Kashiwara, *Crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula*, Duke Math. J. **71** (1993), 839-858.

[K4] M. Kashiwara, *Bases Cristallines des Groupes Quantiques*, Cours Spécialisés Vol. **9**, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. J. **89** (1997), 9-36.

[KNS1] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, *Polytopal Estimate of Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal*, arXiv:0912.0586.

[KNS2] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, *Tensor products and Minkowski sums of Mirković-Vilonen polytopes*, arXiv:1010.0777.

[LTV] B. Leclerc, J-Y. Thibon, and E. Vasserot, *Zelevinsky's involution at roots of unity*, J. Reine Angew. Math. **513** (1999), 33–51.

[L1] G. Lusztig, *Singularities, character formulas and a q-analogue of weight multiplicities*, Astérisque **101-102** (1983), 208-229.

[L2] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized universal enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447-498.

[L3] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves, and quantized universal enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365-421.

[L4] G. Lusztig, *Affine quivers and canonical bases*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 111-163.

[L5] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progr. Math. **110** (1993), Birkhäuser.

[MV1] I. Mirković and K. Vilonen, *Perverse sheaves on affine Grassmannians and Langlands Duality*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 13-24.

[MV2] I. Mirković and K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. **166** (2007), 95-143.

[NS1] S. Naito and D. Sagaki, *A modification of the Anderson-Mirković cinjecture for Mirković-Vilonen polytopes in types B and C*, J. Algebra **320** (2008), 387-416

[NS2] S. Naito and D. Sagaki, *Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and on opposite Demazure crystal*, Adv. Math. **221** (2009), 1804-1842.

[NSS1] S. Naito, D. Sagaki and Y. Saito, *Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, I: Construction of affine analogs*, arXiv: 1009.4526.

[NSS2] S. Naito, D. Sagaki and Y. Saito, *Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, II: Explicit description*, in preparation.

[R] M. Reineke, *On the coloured graph structure of Lusztig's canonical basis*, Math. Ann. **307** (1997), 705-723.

[S] Y. Saito, *PBW basis of quantum universal enveloping algebras*, Publ. RIMS. **30** (1994), 209-232.

[Sa] A. Savage, *Geometric and combinatorial realizations of crystal graphs*, Alg. Rep. Theory **9** (2006), 161-199.