数理解析研究所講究録
第 1739 巻 2011 年 226-233

チャールズ・バベッジ“Essays on the Philosophy of Analysis”のうち“Of Games”について

神戸大学大学院国際文化学研究科　異文化研究交流センター　野村恒彦 (Tsunehiko Nomura)
Intercultural Research Center
Kobe University Graduate School of Intercultural Studies

はじめに

昨年は“Essays on the Philosophy of Analysis”*1 のうち“Analysis of the Essay of Games” (f.4r-f.15v) について報告した。昨年の報告でも述べたように“Analysis of the Essay of Games”は、今回報告する“Of Games”の下書きとも考えられる内容を持っている。その理由は昨年の報告にあるように、以下のとおりである。

1. “Of Games”に書かれている数式と同じ数式が記述されていること。
2. “Of Games”とは異なり清書されていないこと。
3. “Of Games”の方が“Analysis of the Essay of Games”より詳細な議論がなされていること。

これら“Analysis of the Essay of Games”の内容をふまえ、“Of Games”について述べることとした。

なお“Essays on the Philosophy of Analysis”の成立については、昨年に報告しているところであり、ここではふれない。また“Essays on the Philosophy of Analysis”は大部な手稿となっているため、各章ごとに論じる形態を採ることにした。従って全体を俯瞰することを目的とした論考は、すべての章を論じた後に行いたいと考える。

1 “Essays on the Philosophy of Analysis”について

“Essays on the Philosophy of Analysis”はバベッジ (Charles Babbage) が残した未刊行の手稿である。バベッジはケンブリッジ大学生時代に解析協会 (The Analytical Society) を友人たちと組織して、大陸解析学を導入しようとした。1821 年頃成立した本手稿は*2 、バベッジの関心がどのようなものであったかが伺えるとともに、19 世紀初頭の英国数学の状況を論じるための貴重な文献である。

“Essays on the Philosohpy of Analysis”にはいくつかの章があるが、それぞれに付された題名を昨年の報告同様掲げることとする (表 1)。これらを見てもその主題は多岐にわたっており、バベッジの関心の広さが確かめられる。また全体として“Analysis of the Essay of Games”と同様に、本章でも数式の変形や定数の具体的数値による場合分けが数多く見ることができる。これらは既に報告したように、n 進法による数値表記に関係しているものである。しかもバベッジが“Analysis of the Essay of Games”及び本章で述べていることで重要な点は、n 進法としての表記だけではなく、それらの特殊な場合についても考察していることにある。そのことについては次節で述べることとしたい。

なお、“Of Games”については、既存の文献においての中で活字として印刷されたものは全く見あたない。しかし“Analysis of the Essay of Games”とは異なり下書きのような乱雑な筆跡とはなっておらず、発表を前提として執筆されたものであると考えることができる (資料参照)。

*1 Ch. Babbage, “Essays on the Philosophy of Analysis”, British Museum Additional Manuscripts 37202.
*2 J. M. Dubbey, The Mathematical Works of Charles Babbage, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978), (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004), p.93.

題名
Title
Index
Analysis of the Essay of Games
Of Games
General Notions Respecting Analysis
Of Induction
Of Generalization
Of Analogy
Of Artifices
Of Questions Requiring the Invention of New Modes of Analysis
Merits for Invention and the Philosophy of Analysis
On Notation
Analogy
Induction
Des rapprochements
Of Artifices
Abstraction
Notation
Games
Notation
Continuity
Preface
Invention

表 1　“Essays on the Philosohpy of Analysis” のフォリオに付された章題

2 “Of Games” (f.16r-f.40v) について

前述したように本章の前に位置する “Analysis of the Essay of Games” は、“Of Games” の下書きとも考えられる内容を持っている。その理由も既に記したとおりである。

本稿で論じるのは、“Of Games” という章題が付されているフォリオであるが、その内容は大きく次のように分けることができる。

1. 数字の末尾 n 桁が自乗しても変化しない数値を求めること
2. 数字の順序を入れ替えたものの積
3. n 進法についての議論
4. 数字の桁を入れ替える際の記号法

なお、“Of Games” のフォリオのうち 6v, 17v, 18v, 19v, 20v, 22v, 23v, 24v, 25v, 26v, 27v, 28v, 30v, 31v, 32v, 33v, 34v, 35v, 36v, 37v, 39v が空白のページとなっている。

“Of Games” は前述したように 4 つの部分に大別できるが、f.16r から始まる「数字の末尾 n 桁が自乗しても変化しない数値を求めること」から、議論していきたい[*3]。

まず、バベッジは $(cx^2+bx+a)^2$ という数式に注目する。これを展開すると次式のようになる。

$$cx^4+2bcx^3+(2ab+b^2)x^2+2abx+a^2$$

数字の末尾 n 桁が自乗しても変化しない数値を求めることが目的であるから、末尾 1 桁目を考えれば $a^2=a$ となる。ところが a^2 は 2 桁になる可能性があるため、与えられた数値は 10 進法 $(x=10)$ とすれば、a^2 は $a^2=10p+a$ のように記述することができる。a が 10 より小さい場合 (これは 10 進法に従っているため当然である。) に、この数式が成り立つためには、$a=0$ と $p=0$、$a=1$ と $p=0$、$a=5$ と $p=2$ 及び $a=6$ と $p=3$ の組み合わせしかない。従って求める数値は 0、1、5、6 ということになる。実際に計算してみると、このことは容易に確かめることができる。

上の議論は下 1 桁を対象としたものであるが、下 2 桁を対象とすると次のようになる。

まず下 1 桁目は先の議論をそのまま適用できるが、下 2 桁目を考えに入れると $(cx^2+bx+a)^2$ の展開式から、$2ab+p=10p'+b$ という式が提示される[*4]。そして、先程求めた $a=0$ と $p=0$、$a=1$ と $p=0$、$a=5$ と $p=2$ 及び $a=6$ と $p=3$ の組み合わせを使用する。まず $a=0$ と $p=0$ の場合には、$b=0$ と $p'=0$ となる。次に $a=1$ と $p=0$ の場合には、$2b=10p'+b$ となり、$b=10p'$ となる。ここで b が 10 より小さいとすれば、$b=0$ と $p'=0$ となる。

第 3 の場合は $a=5$ と $p=2$ の組み合わせである。それぞれ代入すると、以下の式が得られる。

$$2\cdot 5b+2=10p'+b \text{ or } 96=10p'-2$$

$$b=\frac{10p'-2}{9}$$

これが成り立つのは、$b=2$ と $p'=2$ の組み合わせである。

最後の $a=6$ と $p=3$ の組み合わせの場合であるが、これまでの議論と全く同様にして $b=7$ と $p'=3$ が得られる。

その結果計算から得られた数値は、00、01、25、76 となる。ここで a は数字の 1 桁目、b は数字の 2 桁目になることに留意しておく必要がある。この 00、01、25、76 という 4 つの数字を自乗してみると、得られた数値の下 2 桁は元の数になっていることがわかる。

次に「数字の順序を入れ替えたものの積」についてであるが、ここで次のような式をバベッジは示す[*5]。これは求める内容をそのまま表した式である。

$$(Ax+B)(Bx+A)=ABx^2+(A^2+B^2)x+AB$$

この式は、$N=ax^2+bx+a$ のように書くこともできる。そして $N=2268$ という例を掲げて、次のように論を進めている。

[*3] Babbage, *op. cit.*, f.16r-17r.

[*4] 展開式のうち下 2 桁に関係しているのは、最後の 2 項すなわち $2abx+a^2$ である。ここで下 1 桁目をあらわす a^2 が 2 桁になった場合を考えると (繰り上がった数値は先の議論の p である。) 、下 2 桁目の数値は $2ab+p$ となる。これが元の数の下 2 桁目と同じ数値になることから (この下 2 桁目も繰り上がる可能性がある。)、$2ab+p=10p'+b$ となる。

[*5] *Ibid.*, f.18r-19r.

N が 2268 であることから、a は 22 よりは小さい。また N の 1 桁目が 8 であることから、a の 1 桁目も 8 である。以上のことより a は 18 となる。すると先程の式は、次のようになる。

$$2268 = 1800 + 450 + 18$$

ここで、$2268 = 18x^2 + 45x + 18$ と比較すると、A は 6 となり、B は 3 となる。従って、$N = 2268 = 63 \times 36$ が得られる (求める数値は 63 と 36 で、数字の順序を入れ替えたものとなっている)。

続いて、「n 進法の議論について」が始まる[*6]。

ここで、n 進法についてバベッジの行っている議論の内容を確認しておきたい。

まずバベッジは次のような 6 桁の数字 N を考える (この数字は既に r 進法で表記されていることに注意されたい。)[*7]。$1N$ は $abcdef$ という数字である。次に最上桁の数字を最下桁に移動して得た $bcdefa$ が $2N$ となったとする。同じように 6 回繰り返して $fabcde$ が $6N$ となったとする。すると各数字は以下のように表すことができる。

$$\begin{array}{ll} abcdef & 1N \\ bcdefa & 2N \\ cdefab & 3N \\ defabc & 4N \\ efabcd & 5N \\ fabcde & 6N \end{array}$$

次にそれぞれの列の和を求めると、次式のようになる

$$(a+b+c+d+e+f)(1+r+r^2+\ldots+r^5) = (1+2+3+\ldots+6)$$

ここで r のべきの最大のものを p とすれば (数字は $p+1$ 桁となる)、N を求める式は以下のようになる

$$N = \frac{2(a+b+c+\ldots)}{p \cdot p+1} \cdot \frac{r^p - 1}{r-1}$$

さらに $k, k' \ldots$ が $r-1$ の因数であり $k < p$ と考えると、$a+b+c+\ldots = S$ とすれば S は $S = kk' \ldots v$ で表されることができるとバベッジは主張するが、それらの条件として以下が提示される[*8]。

1. $p =< r$
2. $S = kk'k'' \ldots v$ としていることから、$k \quad k' \ldots$ は S の因数となる。そして、$k \quad k' \ldots$ について、それぞれの k で、$k =< p$ が成立する。
3. $a+b+c+\ldots = S$ とすれば、$S = kk'k'' \ldots v < p(r-1)$ が成立する。

第 1 の条件である $p =< r$ は、r が最大のべきである p と等しいか、少ない数となることである。例えば 6 進数の場合 (r=6) において、7 桁の数字 ($p = 7$) を考えると ($p > r$)、0, 1, 2, 3, 4, 5 の数字で各桁が異なった 7 桁の数字は作ることができないことは容易に理解できる。

[*6] *Ibid.*, f.19r-36r.
[*7] バベッジは r 進法の表記で以下の議論を進めている。
[*8] Babbage, *op. cit.*, f.21r.

第 2 の条件については、S は r 進法で表された数値である $a+b+c+\ldots$ の合計であり、$a,b,c\ldots$ はそれぞれ r を超えることはなく、また $r-1$ の因数を $k,k',k''\ldots$ とすれば必ず S はそれらで割り切れることを意味している。

r は進法の基準となる値であるから、係数 (a, b 等) はそれぞれ r を超える値とはなり得ないので、$S<p(r-1)$ は成立する。

バベッジは本章の中で r が 3 から 12 まで、及び 17 の場合を検討している。まず r が 3 の場合 (2 進数) についてであるが、バベッジは次のように説明を行っている。

$r=3$ であれば前述の条件により、p は 2 もしくは 3、k は 2 となる。ここで、$p=2$ の場合を考えると、$S=kv<p(r-1)$ であることから、$S=2v<2(3-1)=4$ となり、$v=1$ が得られる。N を求める式は次のようになる。

$$N=\frac{2}{2\cdot 3}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}=\frac{8}{3\cdot 2}$$

ここで得られた $\frac{8}{3\cdot 2}$ は分数となってしまい、N は分数ではあり得ないことから条件にはあわない (impossible) こととなる。

以下、バベッジは r の数値が 12 までと 17 の場合を計算しているが、条件に合致したものとして次のような場合を掲げている*9。

$r=7$ の場合において、$p=<r=7$ から $p=2,3,4,5,6,7$ となり、$n-1=6$ の因数は 2 及び 3 なので $k=2\quad k'=3$ となり、また $S<p(r-1)=6p$ なので p が 2 から 7 の場合において、$S<12,18,24,30,36,42$ となる。

ここで $p=4$ の場合を考えてみると S は $6v$ と表せるので、

$$N=\frac{2\cdot 6v}{4\cdot 5}\cdot\frac{7^4-1}{7-1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2400}{6}v=\frac{1240}{5}v=240v$$

v は $S=2\cdot 3v$ であり、$p=4$ の場合は $S<24$ なので、$v=1,2,3$ となる。すると N の値は、240, 480, 720 となるが、これらをそれぞれ 7 進数で表すと 462, 1254, 2541 である。ここで S の値について考えてみると、$v=1$ の場合 462 で $S=4+6+2=10$ となるが、$S=6v=6$ となり一致しない。次に $v=2$ の場合は 1254 で $S=1+2+5+4=12$ となり、$S=6v=12$ であるから一致する。$v=3$ の場合は同様の議論で一致しないことがわかる。従って、$v=2$ すなわち $S=12$ の場合が求める解である。この時には以下のようになり、各桁の数字を入れ替えると元の数の整数倍になっていることが確認できる。

$$\begin{array}{rcll}
1254 & = & 1N & \text{(10 進数表記では 480)}\\
2541 & = & 2N & \text{(10 進数表記では 960)}\\
4125 & = & 3N & \text{(10 進数表記では 1440)}\\
5412 & = & 4N & \text{(10 進数表記では 1920)}\\
6666 & = & 5N & \text{(10 進数表記では 2400)}
\end{array}$$

最後にバベッジは「数字の桁を入れ替える際の記号法」についての議論を行っている*10

まず $abcd$ で表される数値を考える。ここでそれぞれの文字が左から数えて何文字目にあたるかを新たな記号を用いて表すことにする。それによると、$abcd$ は次のようになる。

---

*9 *Ibid.*, f.24r.

*10 *Ibid.*, f.37r-40v.

$$a((1), b((2), c((3), d((4)$$

これを $adbc$ と変化させた場合、先程の表現は次のように変化する。

$$a((1), d((4-2), b((2+1), c((3+1)$$

ここで元の位置より右側に移動した場合はプラスで表し、左側に移動した場合はマイナスで表記する。そして移動した個数を数値で表し、最初の位置を基準にして表すことにする。すなわち $d((4-2)$ は、d という文字が最初は左から数えて 4 文字目であったが、次の位置は最初の位置より 2 つ左側に移動したことを示している。また、括弧内に表示された数式を計算することにより、その文字の現在位置を知ることができるとしている。

さらに、これらを一般化して左から数えて n 文字目の数値が x 回移動後に k 文字目の位置にあったとした場合に、次のように表されるとしている[*11]。

$$\int_n (x, k)$$

残念ながら、ここからさらに議論を発展させるような記述は、フォリオには見受けられない。

3 まとめ

"Essays on the Philosophy of Analysis" は、既に述べたように 19 世紀の英国数学の状況を知る上で非常な貴重な文献である。その中でも本稿で論じた "Of Games" は、"Analysis of the Essay of Games" と同様に、バベッジが関心を持っていた対象の一端を示すものである。

昨年報告のとおり、n 進法をゲームとして考察の対象とすることについては非常に興味深いものと考えられる。"Of Games" での議論はいわゆる「数字遊び」の範疇に入るものであるが、その遊びのルールを一般化し、さらに数式化して、その解を数式から求めようとすることが考えられていることがわかる。

「数字の順序を入れ替える」ことと n 進法に関する議論の関連性については不明な点が多いが、ある定まったルールを数式化して解を求めようとする試みは、"Analysis" という言葉の意味を考えるのに重要な点を指摘しているように考えられる。

しかしバベッジを含む 19 世紀当時の英国の数学者が抱いていた "Analysis" という語句の正確な解釈については、次章以下での論議を踏まえて考察していく必要があるため今後の課題としたい。

[*11] *Ibid.*, f. 40r.　フォリオには n 文字目での表記はなく、1 文字目、2 文字目としての表記のみである (n が 1、2 と表記されている)。

参考文献

[1] Babbage, Ch., "Essays on Philosophy of Analysis", British Museum Additional Manuscripts 37202.

[2] Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978), (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004).

(資料)

Of Games 16

§ 11 Several questions respecting numbers may be proposed which fall under the class of enquiries which it is the object of the present chapter to discuss. They are not however in general so far removed from the ordinary analysis as many already considered. A few examples will therefore be sufficient for the present section. We commence with one of the simplest. Let it be required to find a number ending with k figures such that all its powers shall terminate with the same k figures. This question was proposed in the Annales des Mathématiques Tom 5 p.220 and in the same volume are given several solutions by M. Tédenat, M. F. Français and M. Gergonne; and my only reason for adding to their number is that the one I shall propose is perhaps the most direct. Let the number be $N = a + br + cr^2 + dr^3 + \ldots$ r being the root of the system of notation. If the square of N terminates with the same k figures as N itself then it is manifest that all its powers will possess the same property.

$$N^2 = a^2 + 2ab\,r + \begin{matrix} 2ac \\ +b^2 \end{matrix}\, r^2 + \begin{matrix} 2bc \\ +2ad \end{matrix}\, r^3 + \begin{matrix} 2ae \\ 2bd \\ +c^2 \end{matrix}\, r^4 +$$

if $k = 1$ we must have $a^2 = 10p + a$ $a < 10$ this is only possible for

$$a = 0 \quad 1 \quad 5 \quad 6 \quad \text{in which cases}$$
$$p = 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3$$

if $k = 2$ we must also have $2ab + p = 10p' + b$ the first value $a = 0$ $p = 0$ gives $b = 0$ $p' = 0$ the second or $a = 1$ $p = 0$ gives

$$2b = 10p' + b \quad \text{or} \quad b = 10p'$$

and since $b < 10$ we must have $p' = 0$ $b = 0$ hence the two last figures are 01: if $a = 5$ $p = 2$ we have

$$10b + 2 = 10p' + b \quad \text{or} \quad 9b = 10p' - 2$$

$$b = \frac{10p' - 2}{9}$$

hence $b = 2$ $p' = 2$ and the two last figures are