数理解析研究所講究録
第 1741 巻 2011 年 20-27

デファイナブル C^rG 写像の横断的条件について

川上智博

640-8510 和歌山市栄谷 930
和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,\ldots)$ において、デファイナブル C^rG 写像の横断的条件について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張 $\mathcal{M}=(\mathbb{R},+,\cdot,<,\ldots)$ に限っても、[7] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関する性質が [2] などにまとめられている。また、[8] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,\ldots)$ で考えるものとする。

2. 準備

稠密線形で端点をもたない順序 $<$ をもった順序体 $(R,+,\cdot,<)$ が実体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

2010 *Mathematics Subject Classification*. 14P10, 57S05, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, デファイナブル C^r 群, デファイナブル C^rG 多様体, 横断的条件, デファイナブリーコンパクト.

(1) R の元 $x_1, \ldots, x_n$ で、$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1$ となるものは存在しない。

(2) 任意の R の元 $y_1, \ldots, y_m$ に対して、$y_1^2 + \cdots + y_m^2 = 0$ ならば、$y_1 = \cdots = y_m = 0$ である。

実体 $(R, +, \cdot, <)$ が実閉体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

(1) [多項式に関する中間値定理] 任意の $f(x) \in R[x]$ に対して、$a < b$ かつ $f(a) \neq f(b)$ ならば、$f([a, b]_R)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。ただし、$[a, b]_R = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ とする。

(2) $R[i] = R[x]/(x^2 + 1)$ が代数閉体となる。

$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \cdots)$ が順序極小 (o-minimal) とは、R の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、$(a, b)_R = \{x \in R | a < x < b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。

実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ は、順序極小であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

ここでは、特に断らない限り、実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \ldots)$ で考察する。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg} = \{x \in \mathbb{R} | x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. *(1)* 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル写像とは、f のグラフ $(\subset R^n \times R^m)$ がデファイナブル集合となることである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル関数 $f : [0, 1)_R \to X$ に対して、極限点 $\lim_{x \to 1-0} f(x)$ が X 内に存在することである。ただし、$[0, 1)_R = \{x \in R | 0 \leq x < 1\}$ とする。デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリー連結とは、X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y, Z で、$X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクトであるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクトとは限らない。連結デファイナブル集合は、デ

ファイナブリー連結であるが、デファイナブル連結集合は、連結とは限らない。たとえば、$R = \mathbb{R}_{alg}$ ならば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | 0 \le x \le 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブリー連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.3 ([6]). R^n のデファイナブル集合 X に対して、X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

位相空間論でよく知られている、コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.4. *$X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合、$f : X \to Y$ をデファイナブル写像とする。X がデファイナブリーコンパクト (デファイナブリー連結) ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト (デファイナブリー連結) である。*

デファイナブル関数に対して、中間値の定理が成り立つ。

定理 2.5 (中間値の定理). $[a,b]_R = \{x \in R | a \le x \le b\}$ 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ に対して、$a < b$ かつ $f(a) \neq f(b)$ ならば、$f([a,b]_R)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。

定義 2.6. *(1)* R^n のデファイナブル部分集合 G がデファイナブル群とは、G が群であって、群演算 $G \times G \to G$ と $G \to G$ がデファイナブルとなることである。

(2) デファイナブル群 G がデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とは、G がデファイナブリーコンパクトとなることである。

定義 2.7. G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。G から $O_n(R)$ への群準同型が表現とは、それがデファイナブルであることである。ただし、$O_n(R)$ は、R の n 次直交群とする。G の表現空間とは、G の表現から誘導される直交作用をもった R^n のことである。デファイナブル G 集合とは、G の表現空間の G 不変デファイナブル部分集合のことである。

直交表現のみに制限して考えることにより、定理3.3で述べる管状 G 近傍の存在を証明することができる。

$X \subset R^n, Z \subset R^m$ をデファイナブル集合とし、$f : X \to Z$ をデファイナブル写像とする。f がデファイナブル同相写像とは、デファイナブル写像 $h : Z \to X$ が存在して、$f \circ h = id_Z$ かつ $h \circ f = id_X$ となることである。また、f がデファイナブリー固有とは、Z

の任意のデファイナブリーコンパクト部分集合 C に対して、$f^{-1}(C)$ がデファイナブリーコンパクトとなることである。

$X \subset R^n, Z \subset R^m$ をデファイナブル開集合とし、$f : X \to Z$ をデファイナブル写像とする。f がデファイナブル C^r 写像とは、f が C^r 写像となることである。デファイナブル C^r 写像 f がデファイナブル C^r 微分同相写像とは、f が C^r 微分同相写像となることである。

定義 2.8. r を非負整数または ∞ とする。Hausdorff 空間 X が n 次元デファイナブル C^r 多様体とは、X の有限開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$、$R^n$ の有限個の開集合 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と有限個の同相写像 $\{\phi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して、$U_\lambda \cap U_\nu \neq \emptyset$ となる λ, ν に対して、$\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu)$ がデファイナブルかつ $\phi_\nu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu) \to \phi_\nu(U_\lambda \cap U_\nu)$ がデファイナブル C^r 微分同相写像となることである。

このとき、$(U_\lambda, \phi_\lambda)$ をデファイナブル C^r 座標近傍系という。

定義 2.9. デファイナブル C^r 多様体 G がデファイナブル C^r 群とは、G が群であって、群演算 $G \times G \to G$ と $G \to G$ がデファイナブル C^r 写像となることである。

定理 2.10. *(1)* G をデファイナブル群とする。任意の自然数 r に対して、G は、デファイナブル C^r 群同型を除いて、ただひとつのデファイナブル C^r 群構造をもつ。

(2) $\mathcal{N}$ が実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張かつ C^∞ セル分解性質をもつならば、*(1)* において、$r = \infty$ とすることができる。

R^n のデファイナブル部分集合 X に対して、オイラー数 $\chi(X)$ をデファイナブルホモロジー的にも定義することができる。

定理 2.11 ([1]). G が無限位数デファイナブリーコンパクトデファイナブル群ばらば、$\chi(G) = 0$ である。

定理2.11において、無限位数の条件は必要である。G が位数 k の有限群ならば、$\chi(G) = k$ となる。

系 2.12. $R = \mathbb{R}$ かつ G が 1 次元以上のコンパクト *Lie* 群ならば、$\chi(G) = 0$ である。

定理 2.13. *(1) (デファイナブル三角形分割).* $S \subset R^n$ をデファイナブル集合、$S_1, \ldots, S_k$ を S のデファイナブル部分集合とする。このとき、R^n の有限単体複体 K とデファイナブル写像 $\phi : S \to R^n$ が存在して、ϕ は、S と各 S_i を K の開単体の和集合にデファイナブル同相的に写す。S がデファイナブリーコンパクトならば、$K = \phi(S)$ とできる。

(2) (部分的デファイナブル自明性). X, Z をデファイナブル集合とし、$f: X \to Z$ をデファイナブル写像とする。このとき、Z のデファイナブル集合への有限分割 $\{T_i\}_{i=1}^k$ とデファイナブル同相写像 $\phi_i : f^{-1}(T_i) \to T_i \times f^{-1}(z_i)$ が存在して、$f|f^{-1}(T_i) = p_i \circ \phi_i$, $(1 \leq i \leq k)$ とできる。ただし、$z_i \in T_i$、$p_i : T_i \times f^{-1}(z_i) \to T_i$ は射影とする。
(3) (デファイナブル商空間の存在). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とし、X をデファイナブル G 集合とする。このとき、軌道空間 X/G はデファイナブル集合であって、射影 $\pi : X \to X/G$ は全射デファイナブルリー固有デファイナブル写像である。
(4) (デファイナブル C^r 関数の零点集合). $A \subset R^n$ をデファイナブル閉集合とし、r を自然数とする。デファイナブル C^r 関数 $f: R^n \to R$ が存在して、$A = f^{-1}(0)$ となる。

定義 2.14. r を非負整数または ∞ とし、G をデファイナブル C^r 群とする。デファイナブル C^r 多様体 X と X 上の群作用 ϕ の組 (X, ϕ) がデファイナブル C^rG 多様体とは、$\phi : G \times X \to X$ がデファイナブル C^r 写像となることである。

デファイナブル C^rG 多様体を表すときは、(X, ϕ) と書くのを省略して、X と書く。

3. 横断的条件

以下では、$r \geq 1$ とする。

定義 3.1. G をデファイナブル C^r 群とする。

(1) G の表現空間 Ω の G 不変デファイナブル C^r 部分多様体をデファイナブル C^rG 部分多様体という。

(2) Y を G の l 次元表現空間 Ω のデファイナブル C^rG 部分多様体とする。任意の $y \in Y$ に対して、$T_y(Y)$ で y における Y の接ベクトル空間を表すとする。Y の接束 $T(Y)$ を $\cup_{y \in Y}\{y\} \times T_y(Y) \subset R^{2l}$ と定義する。

(3) 任意の $y \in Y$ に対して、$N_y(Y)$ で Ω の通常の内積に関する $T_y(Y)$ の直交補空間を表すとする。Y の法束 $N(Y)$ を $\cup_{y \in Y}\{y\} \times N_y(Y) \subset R^{2l}$ と定義する。

[5] の議論により、以下の補題を得る。

補題 3.2. 定義 *3.1* の R^{2l} は G 表現空間 Ξ となり、$\Omega \times \{0\}$ は G 不変で、$T(Y)$ と $N(Y)$ は Ξ のデファイナブル $C^{r-1}G$ 部分多様体となる。

定義 3.1 の $T(Y)$ に関しては、Y が G の表現空間のデファイナブル C^rG 部分多様体と仮定しない、デファイナブル C^rG 多様体の仮定のみで、$T(Y)$ はデファイナブル $C^{r-1}G$ 多様体となることを証明することができる。

$X \subset R^n, Y \subset R^m$ をデファイナブル C^r 部分多様体とする。デファイナブル C^r 写像 $f: X \to Y$ が沈みこみとは、任意の $x \in X$ に対して、x における f の微分 $(df)_x : T_x(X) \to T_{f(x)}Y$ が全射となることである。

定理 3.3 (管状 G 近傍の存在 [4]). G をデファイナブル C^r 群とする。X を境界をもたない G 表現空間 Ω のデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^rG 部分多様体とする。このとき、X の Ω における G 不変デファイナブル開近傍 V とデファイナブル $C^{r-1}G$ 沈めこみ $\theta : V \to X$ が存在して、$\theta|X = id_X$ となる。

命題 3.4. Ω, Ξ をデファイナブル C^r 群の G の表現空間とする。$X \subset \Omega, Y \subset \Xi$ をデファイナブル C^rG 部分多様体とし、Y をデファイナブリーコンパクトかつ境界がないとする。$f : X \to Y$ をデファイナブル C^rG 写像、D を Ξ の単位開球体とする。このとき、デファイナブル $C^{r-1}G$ 写像 $F : X \times D \to Y$ が存在して、$F(x, 0) = f(x)$ かつ $x \in X$ を固定するとき、$F_x : D \to Y, F_x(d) = F(x, d)$ は、デファイナブル $C^{r-1}G$ 沈めこみとなる。

定義 3.5. $f : X \to Y$ をデファイナブル C^r 写像とする。点 $x \in X$ が f の臨界点とは、すべての f の一階微分が x で 0 となることである。x が f の臨界点のとき、$f(x)$ を f の臨界値という。

Sard の定理のデファイナブル版として、以下が成立する。

定理 3.6 ([1]). $X \subset R^n, Y \subset R^m$ をデファイナブル C^1 部分多様体とし、$f : X \to Y$ をデファイナブル C^1 写像とする。このとき、f の臨界値全体の集合は、デファイナブルかつその次元は $\dim Y$ より小さくなる。

$R = \mathbb{R}$ のとき、定理 3.6 の拡張が [3] でなされている。

定義 3.7. X, Y を R^n のデファイナブル C^r 部分多様体とし、Z を Y のデファイナブル C^r 部分多様体とする。デファイナブル C^r 写像 $f : X \to Y$ が Z と横断的とは、$f(x) \in Z$ となるすべての $x \in X$ に対して、$(df)_x(T_xX) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y$ となることである。

デファイナブル C^rG 多様体 X がアフィンとは、X がある G 表現空間のあるデファイナブル C^rG 部分多様体とデファイナブル C^rG 微分同相となることである。

定理 3.8 ([4]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 群とする。X, Y, D をアフィンデファイナブル C^rG 多様体で、Y と D は境界がないとし、$F: X \times D \to Y$ をデファイナブル C^rG 写像とする。Z を Y のデファイナブル C^rG 部分多様体で境界がないとする。F と $F|\partial(X \times D)$ が Z と横断的ならば、$\dim D$ より小さい次元の G 不変デファイナブル集合の外の任意の点 d に対して、f_d と $f_d|\partial X$ は Z と横断的である。ただし、$f_d: X \to Y, f_d(x) = F(x, d)$ とする。

定義 3.9. G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 群、X, Y をデファイナブル C^rG 多様体とし、$f, h: X \to Y$ をデファイナブル C^rG 写像とする。f が h とデファイナブリー C^rG ホモトピックとは、デファイナブル C^rG 写像 $F: X \times [0,1]_R \to Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、$f(x) = F(x, 0)$ かつ $h(x) = F(x, 1)$ となることである。ただし、$[0,1]_R = \{t \in R | 0 \leq t \leq 1\}$ 上の G 作用は自明とする。

定理 3.10 ([4]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 群とし、X, Y をアフィンデファイナブル C^rG 多様体で、Y はデファイナブリーコンパクトかつ境界がないとする。このとき、任意のデファイナブル C^rG 写像 $f: X \to Y$ と任意の Y のデファイナブル C^rG 部分多様体 Z に対して、デファイナブル $C^{r-1}G$ 写像 $h: X \to Y$ が存在して、h は f とデファイナブリー $C^{r-1}G$ ホモトピックかつ h と $h|\partial X$ は Z と横断的である。

定理 3.11 ([4]). $R = \mathbb{R}$ とし、G をコンパクトデファイナブル C^r 群とする。X, Y をアフィンデファイナブル C^rG 多様体で、Y はコンパクトかつ境界がないとする。$f: X \to Y$ をデファイナブル C^rG 写像とし、Z を境界のない Y のデファイナブル C^rG 部分多様体とする。$f|\partial X$ が Y と横断的かつ ∂X がコンパクトならば、デファイナブル $C^{r-1}G$ 写像 $h: X \to Y$ が存在して、h は f とデファイナブリー $C^{r-1}G$ ホモトピック、$f|\partial X = h|\partial X$ かつ h は Z と横断的である。

定理 3.8 の証明のアイデア.

X, Y, D がアフィンなので、ある G 表現空間のデファイナブル C^rG 部分多様体としてよい。Sard の定理のデファイナブル版である定理 3.6 を用いて、$\dim D$ より小さい次元のデファイナブル集合 A の外の任意の点 d に対して、f_d と $f_d|\partial X$ は Z と横断的であるようにできる。G 表現空間は、直交表現空間なので、A は G 不変にとれる。

定理 3.10 の証明のアイデア.

定理 3.8 を用いる。

定理3.11の証明には、定理3.8と以下の定理3.12が必要である。定理3.12は、定理2.13 (4) の同変版である。

定理 3.12 ([4]). $R=\mathbb{R}$ とし、G をコンパクトデファイナブル C^r 群とする。A を G 表現空間 Ω の G 不変デファイナブル閉集合とする。G 不変デファイナブル C^r 関数 $f:\Omega\to R$ が存在して、$A=f^{-1}(0)$ となる。

References

[1] A. Berarducci and M. Otero, *Intersection theory for o-minimal manifolds*, Ann. Pure Appl. Logic **107** (2001), 87–119.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] T. Kawakami, *Affineness of definable C^r manifolds and its applications*, Bull. Korean Math. Soc. 40, (2003), 149-157.

[4] T. Kawakami, *A transverse condition of definable C^rG maps*, to appear.

[5] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, 1991.

[6] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.

[7] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.

[8] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.