数理解析研究所講究録
第 1741 巻 2011 年 28-33

局所順序極小構造について

和歌山大学・教育学部 川上 智博 (Tomohiro Kawakami)
筑波大学・数学系 竹内 耕太 (Kota Takeuchi)
阿南工業高等専門学校・一般教科 田中 広志 (Hiroshi Tanaka)
筑波大学・数学系 坪井 明人 (Akito Tsuboi)

概要

このノートでは，強局所順序極小構造に関する特徴づけを与える。その特徴づけから，関数の単調性定理およびセル分解に関する性質が導き出せる。また，特に実数上の局所順序極小構造に関していくつかの結果を与える。なお，このノートの詳細は，[6] にある。

1 準備

L を言語とし，M を L-構造とする。

定義 1. A を M の部分集合とする。

1. 任意の $n \in \omega$ に対して, $Def^n(A,M) := \{A^n \cap D : D$ は M^n の definable 部分集合$\}$ とし，$Def(A,M) := \bigcup_{n\in\omega} Def^n(A,M)$ とする。
2. $Def(M,M)$ を単に $Def(M)$ と表すこととする。

定義 2. A を M の部分集合とする。任意の $X \in Def^n(A,M)$ に対して，n 変数関係記号 P_X を用意し，$L_A := \{P_X : X \in Def(A,M)\}$ とする。A の局所構造 A_{dcf} を次の L_A-構造とする：

- A_{dcf} のユニバースは A である；
- 任意の $X \in Def(A,M)$ に対して，P_X の A_{dcf} での解釈は X である。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C64.
Key words and phrases. local o-minimality, cell decomposition, simple products.

注意 3. 一般には，$Def(A_{\mathrm{dcf}})$ と $Def(A,M)$ は一致しない。しかしながら，A が M の definable 部分集合のとき，$Def(A_{\mathrm{dcf}}) = Def(A,M)$ である。

以後，$\mathcal{M} = (M,<,\ldots)$ を全順序構造とする。M の部分集合 A が, 任意の $a,b \in A$ と $c \in M$ に対して, $a<c<b$ ならば $c \in A$ をみたすとき, A は M の凸集合であるという。さらに $\sup A, \inf A \in M \cup \{-\infty, +\infty\}$ のとき, A は M の区間であるという。構造 $\mathcal{M}$ の任意の definable 集合 $D \subseteq M$ が, 区間と点の有限和で表せるとき, $\mathcal{M}$ は順序極小構造であるという。順序極小構造に関する参考文献として [1], [3] などがある。

[4], [5], [8], [2] で局所順序極小構造，また [8] で強局所順序極小構造の概念が定義されている。

定義 4. $\mathcal{M} = (M,<,\ldots)$ を全順序構造とする。

1. 任意の $a \in M$ と任意の definable 集合 $X \subseteq M$ に対して，a を含む開区間 I が存在して，$X \cap I$ が区間と点の有限和で表せるとき，$\mathcal{M}$ は局所順序極小構造であるという。
2. 任意の $a \in M$ に対して，a を含む開区間 I が存在して，任意の definable 集合 $X \subseteq M$ に対して，$X \cap I$ が区間と点の有限和で表せるとき，$\mathcal{M}$ は強局所順序極小構造であるという。
3. 任意の $a \in M$ と任意の L-論理式 $\varphi(x,y)$ に対して，a を含む開区間 I が存在して，すべての $b \in M$ に対して，$\varphi(M,b) \cap I$ が区間と点の有限和で表せるとき，$\mathcal{M}$ は一様な局所順序極小構造であるという。

局所順序極小構造に関する性質として次のことが知られている ([8])。

事実 5. 1. 局所順序極小構造は基本同値に関して保存される。
2. 強局所順序極小構造は基本同値に関して保存されない。

局所順序極小構造の例をいくつか挙げる。

例 6. $\mathcal{M} = (\mathbb{Q},<,\{P_q(x,y)\}_{q\in\mathbb{Q}^+})$ とする。ただし，$P_q^{\mathcal{M}}(a,b) \iff a+\sqrt{2}q \le b$ と解釈する。このとき，$\mathcal{M}$ は局所順序極小構造である。ただし，$\mathcal{M}$ は一様な局所順序極小構造ではない。また $\mathcal{M}$ の ω-飽和な初等拡大も一様な局所順序極小構造ではない。

例 7. $\mathcal{M} = (\mathbb{Q},<,\{P_i(x)\}_{i\in\omega})$ とする。ここで，$P_i^{\mathcal{M}}(a) \iff a < 2^{-i}\sqrt{2}$ と解釈する。このとき，$\mathcal{M}$ は一様な局所順序極小構造である。ただし，$\mathcal{M}$ は強局所順序極小構造ではない。

飽和性を仮定すると次のことが言える。

命題 8. M を一様な局所順序極小構造かつ ω-飽和とする。このとき，M は強局所順序極小構造になる。

2 強局所順序極小

まず，強局所順序極小構造の特徴付けを与える。

定理 9. 次は同値である。

1. M は強局所順序極小構造である。
2. 任意の $a_1, \ldots, a_n \in M$ に対して，$a_i \in (I_i)^\circ$ となる右閉で左開な区間 I_i が存在して，$I = \bigcup_{1 \leq i \leq n} I_i$ とおくと，I_{dcf} は順序極小構造である (ただし $(I_i)^\circ$ は I の内点全体とする)。

1 変数関数の局所単調性に関して，次の定義がある ([8])。

定義 10. A を M の definable 部分集合，$f : A \to M$ を definable 写像とする。任意の $a \in M$ に対して，a を含む開区間 I が存在して，$A \cap I$ が区間と点の有限和で表せて，かつ各区間上で f が狭義単調増加，狭義単調減少または一定になるとき，f は局所単調性を持つという。任意の definable な 1 変数関数が局所単調性をもつとき，M は局所単調性を持つという。

[8] で，強局所順序極小構造は局所単調性を満たすことが示された。順序極小構造では関数の単調性に関して，連続性を含めることで出来る。しかしながら，局所順序極小構造の場合は一般には言えない。

例 11. M を順序極小構造，$a \in M$ とする。$f : \{a\} \times M \to M^2$ を $f(\langle a, b \rangle) = \langle b, a \rangle$ とする。このとき，$N = (M^2, <_{\mathrm{lcx}}, f)$ は M-definable 構造となる。よって N は強局所順序極小構造である。ただし $<_{\mathrm{lcx}}$ は辞書式順序とする。しかしながら，f は任意の点で連続でない。

定理 9 より，次の形の局所単調性が言える。

命題 12. M を強局所順序極小構造とする。A を M の definable 部分集合，$f : A \to M$ を definable 写像とする。このとき，任意の $a \in A$ に対して，a を含む開区間 I と $f(a)$

を含む開区間 J が取れて，$f^* = f \cap (I \times J)$ とおくと，f^* の定義域は区間と点の有限和で表せて，各区間上 f^* は一定，狭義単調増加かつ連続，または狭義単調減少かつ連続になる。

順序極小構造の場合とまったく同じように，局所順序極小構造に対して，セルが定義できる。このとき定理 9 より，次のことが言える。

命題 13. M を強局所順序極小構造とし，$a \in M^n$ とする。このとき，次が成り立つ。

1. $X_1, \ldots, X_m$ を M^n の definable 部分集合とする。このとき，a を含む open box B と B のセルによる有限分割 $\mathcal{P}$ が存在して，任意の $C \in \mathcal{P}$ に対して，$C \cap X_i \cap B = \emptyset$ または $C \subseteq X_i \cap B$ が成り立つ。
2. $X \subseteq M^n$ を definable 集合，$f : X \to M$ を definable 写像とする。このとき，$\langle a, f(a) \rangle$ を含む open box B が存在して，$f^* = f \cap B$ とおくと，f^* の定義域を有限個のセルに分ける分割 $\mathcal{P}$ が取れて，任意の $C \in \mathcal{P}$ に対して，$f^*|C$ は連続になる。
3. $X \subseteq M^{n+1}$ を definable 集合，$b \in M$ とする。また任意の $c \in M^n$ に対して，$X_c = \{d \in M : \langle c, d \rangle \in X\}$ を有限集合とする。このとき，a を含む open box B，b を含む開区間 I と自然数 K が存在して，任意の $c \in B$ に対して，$|X_c \cap I| \leq K$ が成り立つ。

3 Simple products

L_1, L_2, L を言語とする。各言語は関係記号だけを含むものとし，n 変数関数記号は $n+1$ 変数関係記号で解釈する。M_i を L_i-構造とし ($i = 1, 2$)，$N = M_1 \times M_2$ とする。

定義 14. 1. $A \subseteq {M_1}^n$，$B \subseteq {M_2}^n$ とする。このとき，

$$A * B := \{\langle \langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_n, b_n \rangle \rangle \in N^n : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A\ , \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in B\}$$

とおく。

2. N を L-構造とする。N が M_1 と M_2 の simple product であるとは，任意の $P(x_1, \ldots, x_n) \in L$ に対して，M_1-definable 集合 $A_1, \ldots, A_k \subseteq {M_1}^n$ と M_2-definable 集合 $B_1, \ldots, B_l \subseteq {M_2}^n$ が存在して，P^N が $A_i * {M_2}^n$ ($i = 1, \ldots, k$) と ${M_1}^n * B_i$ ($i = 1, \ldots, l$) のブール結合の和で表せるときをいう。

このとき，simple product に関して次のことが成り立つ。

定理 15. $M_i = (M_i, <^{M_i}, \ldots)$ $(i = 1, 2)$ を全順序構造の拡張とする。$N = (N, <^N, \ldots)$ を M_1 と M_2 の simple product とする。ここで，$<^N$ は辞書式順序とする。

1. M_2 を端点を持たない（強）局所順序極小構造とする。このとき，N は（強）局所順序極小構造である。
2. M_2 を順序極小構造とし（端点を持ってもよい），M_1 は離散順序であるとする。このとき，N は強局所順序極小構造である。

定理 15 より，次の構造が局所順序極小構造であることが分かる。

例 16. $A \subseteq \mathbb{Z}$ とする。このとき，構造 $(\mathbb{R}, +, <, P)$ は局所順序極小構造である。ただし，$P^{\mathbb{R}} = A$ である。

例 17. $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, <, \mathbb{Z}^*)$ を $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, \mathbb{Z})$ の飽和な基本拡大とする。P を 1 変数関係記号で $P^{\mathbb{R}^*} = \mathbb{Q}$ とする。このとき，$(\mathbb{R}^*, +, <, \mathbb{Z}^*)$ は局所順序極小構造である。

例 18. $(G, 0, +, -, <)$ を可除な全順序アーベル群とし，G_0 を G の部分群とする。またある $h \in G$ が存在して，任意の自然数 n と $a \in G_0 \setminus \{0\}$ に対して，$nh < |a|$ が成り立つとする。このとき，$(G, 0, +, -, <, P)$ は局所順序極小構造である。ただし，$P^G = G_0$ である。

4 実数上の局所順序極小構造

$(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ の拡張 M が局所順序極小構造ならば，順序極小構造になる。よって，乗法を含まない実数の局所順序極小拡張について考える。

注意 19.

1. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$(\mathbb{R}, +, <, a\mathbb{Z})$ は局所順序極小構造である。$a \in \mathbb{R}$ が無理数のとき，$(\mathbb{R}, +, <, \mathbb{Z}, a\mathbb{Z})$ は局所順序極小構造ではない。
2. $M = (\mathbb{R}, <, \ldots)$ を局所順序極小構造とする。$K \subseteq \mathbb{R}$ をコンパクトな definable 集合とする。このとき，K_{dcf} は順序極小構造である。

定理 20. M を $(\mathbb{R}, +, <, \mathbb{Z})$ の局所順序極小拡張とする。このとき，M は $\mathbb{Z}$ と $[0, 1)_{\mathrm{dcf}}$ の simple product で表せれる。

次の例は simple product にならない例である。

命題 21. e を自然対数の底, $E = \{e^n : n \in \omega\}$ とする。このとき, 構造 $(\mathbb{R}, +, <, E)$ は局所順序極小構造である。

参考文献

[1] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[2] A. Dolich, C. Miller and C. Steinhorn, *Structures having o-minimal open core* Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 3, 1371–1411.

[3] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248** London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[4] H. Friedman and C. Miller, *Expansions of o-minimal structures by sparse sets*, Fund. Math. 167 (2001), no. 1, 55–64.

[5] H. Friedman and C. Miller, *Expansions of o-minimal structures by fast sequences*, J. Symbolic Logic 70 (2005), no. 2, 410–418.

[6] T. Kawakami, K. Takeuchi, H. Tanaka and A. Tsuboi, *Locally o-minimal structures*, preprint.

[7] C. Miller and J. Tyne, *Expansions of o-minimal structures by iteration sequences*, Notre Dame J. Formal Logic 47 (2006), no. 1, 93–99.

[8] C. Toffalori and K. Vozoris, *Notes on local o-minimality*, MLQ Math. Log. Q. 55 (2009), no. 6, 617–632.