数理解析研究所講究録
第 1742 巻 2011 年 108-118



# 外力項付常微分方程式の周期解および漸近周期解の初期値問題について

東京都市大学・知識工学部
野原　勉*(Ben T. Nohara), 有本彰雄 (Akio Arimoto)
Faculty of Knowledge Engineering, Tokyo City University
東京都世田谷区玉堤 1-28-1　*drben@tcu.ac.jp

## 1　はじめに

$x=x(t)\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, $\dot{}=\frac{d}{dt}$, $\ddot{}=\frac{d^2}{dt^2}$ とする。本稿では，外力項を持つ２階常微分方程式

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t),\ \ t\geq 0 \tag{1}$$

において, 解が周期性を持つための初期値 $x(0),\dot{x}(0)$ の条件を解析する。ここで, $a,b\in\mathbb{R}$, また，$f$ は $f(t)=f(t+\omega)$ となる周期 $\omega>0$ を持ち，絶対可積分とする。

過去の研究において, $x=x(t)\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ として

$$\dot{x}=Ax+h(t),\ \ t\geq 0,\ h(t)=h(t+2\pi),\ A:n\times n\ \text{const. matrix} \tag{2}$$

に対してつぎの定理が成り立つことはよく知られている。

**定理 1** $A$ が $N\sqrt{-1}(N\in\mathbb{Z})$ の形の固有値を持たないとき，(2) は周期 $2\pi$ の解をただ一つ持つ。[1]

**定理 2** (2) が周期 $2\pi$ の解を持つためには

$$\int_0^{2\pi}\psi^T(t)h(t)dt=0 \tag{3}$$

が必要十分条件である。ここに，$\psi=(\psi^{(1)}\ldots\psi^{(m)})$ であり，$\psi^{(i)}$ は $\dot{y}=-A^Ty$ の $m$ 個の１次独立な周期 $2\pi$ の解を表す。[1]

しかし，筆者らの調べた限り，周期解を取りうる初期値の解析についてはあまり言及された研究は見当たらない。本稿は，(1) に対する初期値問題を扱い解の周期性における初期値について解析する。なお，問題の本質は変数 $x$ の次元には無く，したがって, (1) において２次元を扱っておけば十分である。

## 2 問題

今，

$$u(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{pmatrix},\ g(t)=\begin{pmatrix}0\\ f(t)\end{pmatrix} \tag{4}$$

とすると，(1) はつぎのように書くことができる。

$$\dot{u}(t)=Au(t)+g(t) \tag{5}$$

以下，(5) の周期解を考えるが，形式的に次のように場合分けする。$\lambda$ を２次方程式

$$\xi^2+a\xi+b=0 \tag{6}$$

の根とする。

1. $Re(\lambda)\neq 0$ かつ $1-e^{\omega A}$ が逆行列を持つ場合
2. (a) $\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2\neq 0$
   (b) $\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2=0$
3. (a) $Re(\lambda)=0$ かつ $1-e^{\omega A}$ が逆行列を持つ場合
   (b) $Re(\lambda)=0$ かつ $1-e^{\omega A}$ が逆行列を持たない場合

本稿では，頁数の制限のため上記の１と３について論説する。２については文献 [4] を参照のこと。

## 3 $Re(\lambda)\neq 0$ かつ $1-e^{\omega A}$ が逆行列を持つ場合

**定義 1** (5) において，$u^*(t)=u^*(t+\tilde{\omega})$ となる $\tilde{\omega}>0$ が存在するとき，$u^*(t)$ を周期 $\tilde{\omega}$ を持つ周期解という。特に，外力項と同じ周期 $\omega$ を持つ周期解を $\omega$-周期解という。

**注意 1** $u^*(t)$ が周期 $\tilde{\omega}$ を持つならば，$2\tilde{\omega}, 3\tilde{\omega}$ らも周期である。最小の周期をもってその周期解の周期という。[2]

**命題 1** (5) の $\omega$-周期解 $u^*(t)$ は,

$$u^*(t) = e^{\omega A}\left(1 - e^{\omega A}\right)^{-1} e^{tA} \int_t^{t+\omega} e^{-sA} g(s) ds \tag{7}$$

で与えられる。

[証明] (5) の解が $\omega$-周期解ならば, $u^*(t) = u^*(t+\omega)$ である。これより容易に (7) を示すことができる。■

**注意 2** 一般的には,

$$u^*(t) = e^{n\omega A}\left(1 - e^{n\omega A}\right)^{-1} e^{tA} \int_t^{t+n\omega} e^{-sA} g(s) ds,\ n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

であるが, これは (7) と等価である。

**命題 2** (5) において, 初期値を

$$u(0) = e^{\omega A}\left(1 - e^{\omega A}\right)^{-1} \int_0^{\omega} e^{-sA} g(s) ds \tag{9}$$

とすると

$$u(t) = u(t+\omega).$$

[証明] 略 ■

**定義 2** $u^*(t)$ を (5) の $\omega$-周期解とする。

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - u^*(t)\| = 0 \tag{10}$$

が成り立つとき, $u(t)$ を漸近周期解と言う。ただし, $\mathbb{R}^2$ におけるノルムを

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\| = \max\left(|u_1|, |u_2|\right) \tag{11}$$

で定義する。

**定理 3** $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ とする。初期値 $u_1(0) = x(0), u_2(0) = \dot{x}(0)$ が

$$-\lambda_2 u_1(0) + u_2(0) = -\lambda_2 u_1^*(0) + u_2^*(0) \tag{12}$$

を満足するならば, $u(t)$ は漸近周期解である。ただし, $u_1^*(0), u_2^*(0)$ は

$$u(0) = e^{\omega A}\left(1 - e^{\omega A}\right)^{-1} \int_0^{\omega} e^{-sA} g(s) ds$$

の成分を表す。

[証明] 二つの関係式：

$$u(t) = e^{tA}u(0) + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}g(s)ds,$$

$$u^*(t) = e^{tA}u^*(0) + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}g(s)ds$$

より

$$u(t) - u^*(t) = e^{tA}\big(u(0) - u^*(0)\big) \tag{13}$$

を得るが，ここで，行列 $A$ を Jordan 型 $A = VJV^{-1}$ に変形すると

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ V^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}$$

となり，

$$e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1},\ e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

を得るので，(13) より

$$u(t) - u^*(t) = V\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}V^{-1}\big(u(0) - u^*(0)\big). \tag{14}$$

これを計算すると

$$u(t) - u^*(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}V\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\big\{-\lambda_2\big(u_1(0) - u_1^*(0)\big) + \big(u_2(0) - u_2^*(0)\big)\big\} \\ e^{\lambda_2 t}\big\{\lambda_1\big(u_1(0) - u_1^*(0)\big) - \big(u_2(0) - u_2^*(0)\big)\big\} \end{pmatrix} \tag{15}$$

となり，仮定 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ より，定理が従う。■

以下，証明は定理 3 と同様にできるので結果のみ示す。

**定理 4** $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ とする。初期値 $u_1(0) = x(0), u_2(0) = \dot{x}(0)$ が

$$\lambda_1 u_1(0) - u_2(0) = \lambda_1 u_1^*(0) - u_2^*(0) \tag{16}$$

を満足するならば，$u(t)$ は漸近周期解である。

**注意 3** (1) $\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ あるいは (2) $Re(\lambda_1) > 0$ かつ $Re(\lambda_2) > 0$ の場合は，命題 2 に含まれる。

**定理 5** (1) $\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 < 0$ あるいは (2) $Re(\lambda_1) < 0$ かつ $Re(\lambda_2) < 0$ とする。任意の初期値 $u_1(0) = x(0), u_2(0) = \dot{x}(0)$ に対する解は漸近周期解である。

**注意 4** $\xi = u_1(0) - u_1^*(0)$, $\eta = u_2(0) - u_2^*(0)$ と置く。$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 < 0$ のとき,

$$W_1^s = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : -\lambda_2\xi + \eta = 0\},$$
$$W_2^u = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1\xi - \eta = 0\}$$

をそれぞれ安定多様体，不安定多様体と呼ぶ。同様に，$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ のとき，安定多様体，不安定多様体はそれぞれ

$$W_2^s = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1\xi - \eta = 0\},$$
$$W_1^u = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : -\lambda_2\xi + \eta = 0\}$$

となる。

$\lambda_1\lambda_2 < 0$ のとき，解が漸近周期解となるためには初期値は安定多様体上になければならず（定理 3，定理 4），また，$\omega$-周期解となるためには初期値は，$W_1^s \cap W_2^u$ または $W_1^u \cap W_2^s$ すなわち，二つの多様体上になければならない（命題 2）。

**例題 1** 外力を Jacobi の楕円函数とする。

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 10\mathrm{cn}(t, k)$$

母数 $k = 0.99$ として，$\omega$-周期解は (7) を計算することにより

$$x^*(t) = -\alpha\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{3\beta_n\theta_n}{(1+\theta_n^2)(4+\theta_n^2)}\sin\theta_n t - \frac{\beta_n(2+\theta_n^2)}{(1+\theta_n^2)(4+\theta_n^2)}\cos\theta_n t\Big)\Big]$$

と表せる。（cn 函数を Fourier 展開し有界収束定理を適用。）ここに,

$$\alpha = \frac{2\pi}{kK(k)},\ \beta_n = \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}},\ \theta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2K(k)},\ q = e^{-\pi K'(k)/K}$$

であり，$K(k), K'(k)$ はそれぞれ第 1 種完全楕円積分，補第 1 種完全楕円積分を表す。また，安定多様体を計算すると次のようになる。

$$W_1^s = \{(\xi, \eta) : 2\xi + \eta + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{1+\theta_n^2} = 0\}.$$

初期値を安定多様体上にとり $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, -\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\beta_n}{1+\theta_n^2} = -6.801755...)$ としたときの漸近周期解の様子を図 1 に示す。

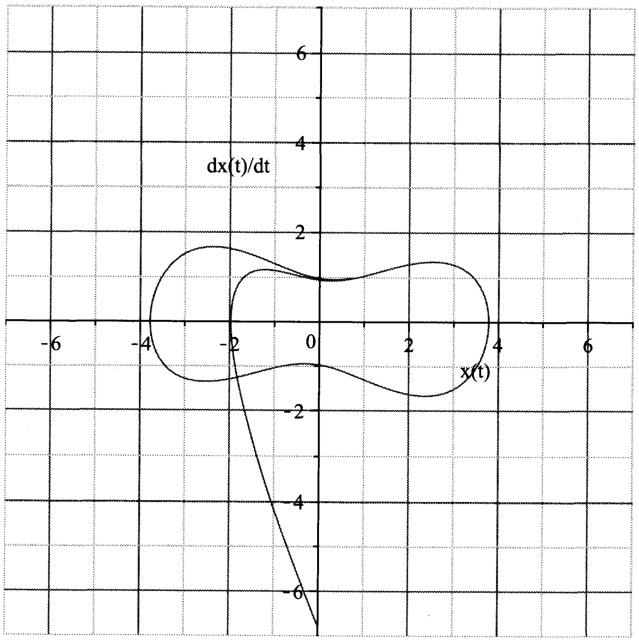


図 1: 初期値を $(0, -6.801755...)$ としたときの方程式 $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 10\mathrm{cn}(t, 0.99)$ の解軌跡の相図：漸近的に $\omega$-周期解に収束していることを表している。

# 4 $Re(\lambda) = 0$ かつ $1 - e^{\omega A}$ が逆行列を持つ場合

この場合，所与の方程式は

$$\Sigma_{b+} : \ \ddot{x} + bx = f(t), \ \ b > 0, \ t \geq 0, \ f(t) = f(t + \omega) \tag{17}$$

となり，同次方程式の固有値は $\pm i\sqrt{b}$ となる。$b < 0$ のときは，定理 3 が適用できる。

**定理 6** $\omega\sqrt{b} \neq 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ とする。$\Sigma_{b+}$ の $\omega$-周期解 $x^*(t)$ は

$$x^*(t) = \frac{1}{2\sqrt{b}\tan\omega\sqrt{b}/2}\int_t^{t+\omega}\cos\sqrt{b}(t-s)f(s)ds - \frac{1}{2\sqrt{b}}\int_t^{t+\omega}\sin\sqrt{b}(t-s)f(s)ds \tag{18}$$

で表すことができる。初期値を $x(0) = x^*(0), \dot{x}(0) = \dot{x}^*(0)$ とすると，解は $\omega$-周期解である。

[証明] 前章より $\Sigma_{b+}$ の $\omega$-周期解は

$$u^*(t) = e^{\omega A}\left(1 - e^{\omega A}\right)^{-1} e^{tA}\int_t^{t+\omega} e^{-sA}g(s)ds$$

で表すことができる。ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

簡単な計算により

$$e^{\omega A} = \begin{pmatrix} \cos\omega\sqrt{b} & \dfrac{\sin\omega\sqrt{b}}{\sqrt{b}} \\ -\sqrt{b}\sin\omega\sqrt{b} & \cos\omega\sqrt{b} \end{pmatrix},$$

$$\left(1 - e^{\omega A}\right)^{-1} = \frac{1}{2\left(1-\cos\omega\sqrt{b}\right)} \begin{pmatrix} 1-\cos\omega\sqrt{b} & \dfrac{\sin\omega\sqrt{b}}{\sqrt{b}} \\ -\sqrt{b}\sin\omega\sqrt{b} & 1-\cos\omega\sqrt{b} \end{pmatrix}$$

となり，これを使うことにより (18) を得ることができる。また，

$$u(t) - u^*(t) = V \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{b}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{b}t} \end{pmatrix} V^{-1}\left(u(0) - u^*(0)\right)$$

より，初期値を $u(0) = u^*(0)$ とすれば解は $\omega$-周期解となる。■

**定義 3** $\Sigma_{b+}$ の解 $x(t)$ が $\omega$-周期解以外の周期解を持つとき，その解を隠れ周期解といい，その周期を隠れ周期という。

**定理 7** $p, q \in \mathbb{Z}$ とし，$\dfrac{\omega}{2\pi/\sqrt{b}} = \dfrac{p}{q}$ を仮定する。ただし，$p, q$ は既約とする。$\Sigma_{b+}$ において，隠れ周期 $\hat{\omega}$ を持つ隠れ周期解 $x^\#(t) = x^\#(t+\hat{\omega})$ が存在する必要十分条件は

$$\int_0^{p\omega} f(s)\sin\sqrt{b}s\,ds = 0, \quad \int_0^{p\omega} f(s)\cos\sqrt{b}s\,ds = 0 \tag{19}$$

であり，このとき，隠れ周期解は

$$x^\#(t) = x(0)\cos\sqrt{b}t + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}t + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^t f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)\,ds \tag{20}$$

で表せる。ここに，$\hat{\omega} = p\omega$ or $2\pi q/\sqrt{b}$ である。

**注意 5** 定理7において，$p/q = m > 1, m \in \mathbb{Z}$ のときに形成される隠れ周期の状態を sub-harmonics という。また，$p/q \neq m, m \in \mathbb{Z}$ のときに形成される隠れ周期の状態を ultra-sub-harmonics という [3]。

[証明] $\Sigma_{b+}$ の解は，$u(t) = e^{tA}u(0) + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}g(s)ds$ と書かれるので，これに $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ を代入して

$$x(t) = x(0)\cos\sqrt{b}t + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}t + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^t f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)ds \tag{21}$$

を得る。隠れ周期は，$\dfrac{\omega}{2\pi/\sqrt{b}} = \dfrac{p}{q}$ より

$$\hat{\omega} = p\omega = \frac{2\pi q}{\sqrt{b}} \tag{22}$$

となる。まず，(21) より

$$x(t+\hat{\omega}) = x(0)\cos\sqrt{b}(t+\hat{\omega}) + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}(t+\hat{\omega}) + \\ + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^{t+\hat{\omega}} f(s)\sin\sqrt{b}(t+\hat{\omega}-s)ds =$$

となるが，$\hat{\omega}\sqrt{b} = 2\pi q$ の関係を使い上式は

$$\begin{aligned} &= x(0)\cos\sqrt{b}t + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}t + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^{t+\hat{\omega}} f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)ds = \\ &= x(0)\cos\sqrt{b}t + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}t + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^{t} f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)ds + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_t^{t+\hat{\omega}} f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)ds \end{aligned} \tag{23}$$

ここで，上式の最後の項は

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\hat{\omega}} f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)ds &= \sin\sqrt{b}t\int_t^{t+\hat{\omega}} f(s)\cos\sqrt{b}sds - \\ &\quad - \cos\sqrt{b}t\int_t^{t+\hat{\omega}} f(s)\sin\sqrt{b}sds \end{aligned} \tag{24}$$

となるが，一般性を失うことなく $t \in [(k-1)\hat{\omega}, k\hat{\omega}), k \in \mathbb{N}$ ととることにより

$$\int_t^{t+\hat{\omega}} f(s)\cos\sqrt{b}sds = \int_t^{k\hat{\omega}} f(s)\cos\sqrt{b}sds + \int_{k\hat{\omega}}^{t+\hat{\omega}} f(s)\cos\sqrt{b}sds =$$

となるが，第２項に変数変換 $v = s - \hat{\omega}$ を施すことにより，$f(v+\hat{\omega}) = f(v+p\omega) = f(v)$ であるので

$$= \int_t^{k\hat{\omega}} f(s) \cos\sqrt{b}s ds + \int_{(k-1)\hat{\omega}}^t f(v) \cos\sqrt{b}v dv =$$
$$= \int_{(k-1)\hat{\omega}}^{k\hat{\omega}} f(s) \cos\sqrt{b}s ds =$$

再度，変数変換 $w = s - (k-1)\hat{\omega}$ を施すと

$$= \int_0^{\hat{\omega}} f(w) \cos\sqrt{b}w dw = \text{const.} \tag{25}$$

を得る。同様にして，

$$\int_t^{t+\hat{\omega}} f(s) \sin\sqrt{b}s ds = \int_0^{\hat{\omega}} f(w) \sin\sqrt{b}s ds = \text{const.} \tag{26}$$

したがって，(23)(24)(25)(26) より

$$x(t+\hat{\omega}) = x(0)\cos\sqrt{b}t + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}t + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^t f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)ds = x(t)$$

となる必要十分条件として

$$\int_0^{p\omega} f(s)\sin\sqrt{b}s ds = 0, \quad \int_0^{p\omega} f(s)\cos\sqrt{b}s ds = 0$$

を得る。■

**系 1** $\Sigma_{b+}$ において，$\dfrac{\omega}{2\pi/\sqrt{b}} = \text{irrational number}$ を仮定すると，隠れ周期解は存在しない。すなわち，$\omega$-周期解以外の解は周期を形成しない。

[証明] 背理法により容易に証明できる。■

**注意 6** 系１において $\omega$-周期解以外の有界な解を擬似周期解という。

**例題 2** $\dfrac{\omega}{2\pi/\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の場合。

$$\ddot{x} + x = \sin\sqrt{2}t$$

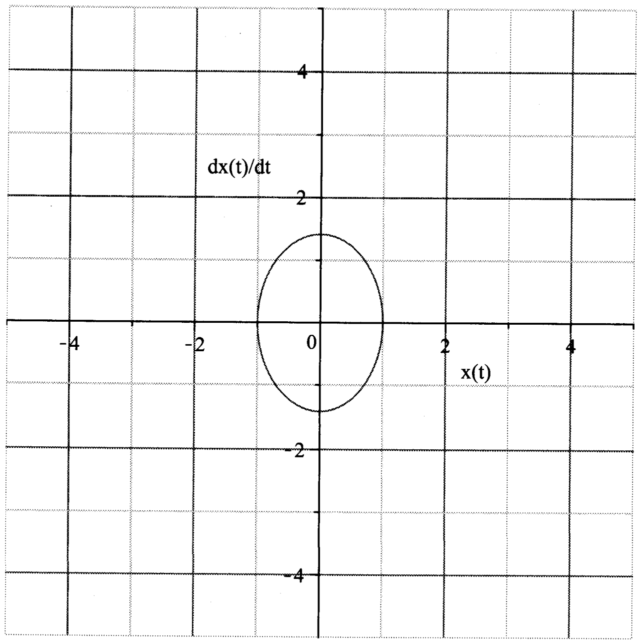


図 2: 初期値を $(0, -\sqrt{2})$ としたときの方程式 $\ddot{x} + x = \sin\sqrt{2}t$ の $\omega$-周期解の相図。

$\omega$-周期解は

$$x^*(t) = -\sin\sqrt{2}t$$

と表せる。初期値を $(x(0), \dot{x}(0)) = (x^*(0), \dot{x}^*(0)) = (0, -\sqrt{2})$ にとると $\omega$-周期解の軌跡を図 2 のように得ることができる。

図 3 は，初期値を $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 1)$ としたときの擬似周期解の様子を時刻 $t = 0$ から $t = 600$ まで示したものである。

# 5 $Re(\lambda) = 0$ かつ $1 - e^{\omega A}$ が逆行列を持たない場合

**定理 8** $\dfrac{\omega}{2\pi/\sqrt{b}} = n, n = 2, 3, \ldots$ とする。$\Sigma_{b+}$ は，隠れ周期解を持たない。また，$\omega$-周期解となる必要十分条件は

$$\int_0^\omega f(s)\sin\sqrt{b}s ds = 0, \quad \int_0^\omega f(s)\cos\sqrt{b}s ds = 0 \tag{27}$$

であり，$\omega$-周期解は

$$x^*(t) = x(0)\cos\sqrt{b}t + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}t + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^t f(s)\sin\sqrt{b}(t-s)ds \tag{28}$$

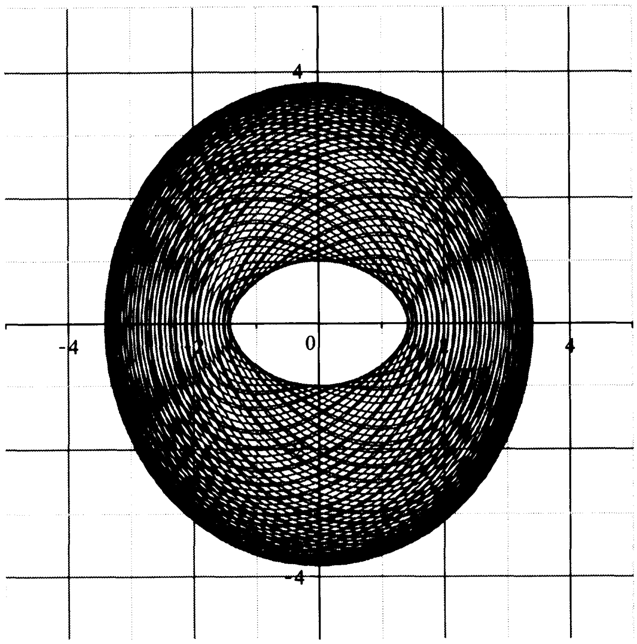


図 3: 初期値を $(0,1)$ としたときの方程式 $\ddot{x}+x=\sin\sqrt{2}t$ の擬似周期解の相図。

で表すことができる。

[証明] 定理 7 と同様に証明できる。■

**注意 7** 定理 8 において $\omega$-周期解を形成する状態を ultra-harmonics という [3]。

# 参考文献


[1] 福原満洲雄，佐藤常三，古谷茂，常微分方程式 III, 岩波講座現代応用数学, 160/161, 1958.

[2] Verhulst,F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 1990.

[3] Wiggins,S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2003.

[4] Nohara,B.T., Arimoto,A., Periodic And Asymptotically Periodic Solutions of Differential Equations With An External Force, Preprint, 2010.