数理解析研究所講究録
第1745巻2011年1-4

臼井三平先生の業績紹介

朝倉政典(北大理)

臼井先生は、京都大学大学院にて代数幾何学を(故)永田雅宣先生のもとで専攻されました。その頃から現在に至るまで一貫してHodge理論の研究に邁進してこられました。60歳をすぎた今でも、いや今まで以上に活発に研究を行っています。この記事では先生の業績(+思い出)をご紹介したいと思いますが、全くの不勉強者が筆を執ったため、十分な内容紹介ができなかったこと、また最近の研究成果にまで及ばなかったことを最初にお詫びしておきます。

先生がHodge理論の研究を始められた当時、Griffithsを中心とするスクールがアメリカで一派をなしており、彼らによるHodge理論の論文が次々と発表されていました(例えばCompositio Mathematica 50巻(1983)を独占するという快挙もありました!)。Hodge理論が最も活況だった時代でした。臼井先生は、特にトレリ問題(周期写像が単射になるかどうかを問う問題)に大変興味をお持ちでした。先生の学位論文は、Griffithsらによるホッジ構造の無限小変形の理論を用いて、トレリ問題の無限小版、すなわち周期写像が接空間の上で単射になっていることを(ある多様体に対し)示したというものです([1])。その後もトレリ問題への関心は尽きず、Kunev曲面のTorelli型の定理([2])など、多くの優れた研究成果をあげ、常にこの分野の最前線でご活躍されました。

筆者が、先生に初めてお会いした時、先生は、Griffithsさんに強い憧れを抱いていらっしゃいました。Griffithsスクールの人々が海を越えて自由に議論し合う様子を語ってくださり、日本にもそんなスクールを作るのが夢だ、とおっしゃっておられました。ところで、臼井先生は見事な顎髭をたくわえたダンディーな方です。その風貌と相まって、筆者はたちまち先生を日本のGriffithsであるかのような印象をもってしまいました(ちなみにGriffithsさんも大変ダンディーな方です)。臼井先生は、清水勇二さん斎藤政彦さん今野一宏さん足利正さんらと共に「Hodge理論と代数幾何学」という研究集会を毎年開いておられました。そこでは第一線で活躍する研究者から若い学生までみんないっしょに様々な議論を交わしていました。筆者もそこへ何度か参加し貴重な経験をさせていただきました。また2000年には「代数幾何学2000」という大変大きな国際研究集会を主催されました。臼井先生はこのような研究集会を通して、若い人たちの研究意欲が鼓舞されることを望んでおられたようです。ご自身の研究に対する姿勢もさることながら、後進を育てようという真摯な思いも強く、そのことにも深く感じ入ることたびたびでした。

90年代なかばごろから臼井先生はLog幾何学を研究しはじめました。Log幾何学は、今ではHodge理論になくてはならない理論ですが、もともとは、Fontaine-Illusie-加藤らによってp進Hodge理論の方で大発展・大成功した理論でした。一方、あの当時、複素幾何学の範疇でLog幾何学を研究していた研究者はそれほど多くはなかった

のではないかと記憶します。臼井先生は、そのような時期にいち早く Log 幾何学に目をつけ、Hodge 理論の研究に取り込もうとされた方の一人です。そして、先生にとってこの分野で最初の仕事となる、半安定族の topological triviality を証明されました ([4] [1])。これがどのような定理かを簡単に説明させていただきます。代数多様体の半安定退化族も含む Log smooth 族に対して Log Riemann-Hilbert 対応と呼ばれるものが、加藤和也・中山能力によって確立されました。半安定族ですから退化ファイバーをもつのですが、不思議なことに、コホモロジーのレベルでは、まるで退化してない族を扱っているかのような振る舞いをするです。そのからくりを多様体のレベルで明らかにしたのが臼井先生の上記業績です。この結果を Log Riemann-Hilbert 対応に付け加えて、半安定退化族に対して、Log Hodge 構造が定義できるようになりました。Log Hodge 理論における基本的な定理のひとつです。

臼井先生が Log 幾何学の研究で成果を挙げておられたころ (あるいはそれ以前から)、加藤和也先生もまた Log 幾何の Hodge 理論への応用を真剣に模索しておられたようです。そのときすでに Hodge 構造の分類空間のコンパクト化に焦点を当てて考えておられたようです。

Hodge 構造の分類空間 $\Gamma\backslash D$ は Griffiths によって導入され、詳しく研究されてきました。特に D が Hermite 対称領域になる場合 (たとえばアーベル多様体のモジュライや K3 曲面のモジュライなどがそうです) は、多くの人たちによって詳しく研究されてきました。Hermite 対称領域である場合の著しい性質のひとつとして、Baily-Borel の定理により、射影空間内に埋め込むことができます。従って $\Gamma\backslash D$ は代数多様体の構造をもちます。従って代数多様体としてのコンパクト化が可能になります。その他にも、(アーベル多様体のモジュライの場合の) 佐武コンパクト化、トロイダルコンパクト化をはじめさまざまなコンパクト化が昔から考えられてきました。しかし、いずれも Hermite 対称領域という条件下での話でした。そうでない空間、たとえば幾何種数が２以上の曲面の２次コホモロジーや Calabi-Yau 多様体の３次コホモロジーの Hodge 構造の分類空間などの場合にも、$\Gamma\backslash D$ のよいコンパクト化を作れないか、ということを Griffiths が問題提起しました。これを Griffiths の夢といいます。ところが、この壮大な問題は、どう攻略していったらいいか分からないくらい困難な問題で、何十年もの間何の進展もありませんでした。

臼井先生と加藤先生が共同研究をスタートさせたのは、筆者が阪大へ研究生としてやってくる 1〜2 年前だったそうです。筆者が阪大へ来て間もないころ、臼井先生から「明日、加藤和也さんがいらっしゃって議論するんだけど、君も来ないか？」と言われました。今から思えば、無知無学な一学生に共同研究の場を開放しようというのですから、なんと度量の広いことでしょう。それで、厚顔無恥な筆者は、なんの準備もせずに、ひょっこりその場にあらわれたわけです。すると加藤先生が、せっかくだからと、臼井先生と今どんな問題に取り組んでいるかを筆者のために説明してくださいました (なんという幸運！)。説明された内容は、すでに臼井・加藤の理論の核心をつくものだったと記憶しています。Hodge 構造の分類空間のコンパクト化を構成したいが、境界にどんな点をもってくるべきか？それはべき零軌道であり、つまり Log 構造付の点の上

[1]論文の仕上げに際しては、中山能力さんと幾度となく議論を重ねたとのことです。

の Log Hodge 構造であろう。いいかえると Log Hodge 構造の分類空間を構成することができれば Griffiths の夢が実現できるだろう、そんな内容だったと思います。しかし、技術的な困難が多すぎて、うまくいくかどうか分からない、ともおっしゃっておられました。筆者はそのとき二、三のアホな質問をした気がしますが、全体よく理解せずに口走ったものですから、きっとお二人は内心苦笑いをされていたに違いありません。

さて正直言うと、筆者がその日にもったお二人の共同研究に対する印象は、実は悲観的なものでした。問題があまりにも巨大すぎるし、また漠然としていてつかみどころがないように思われたからです。なにしろ、Griffiths が長年夢見ていた理論です。そんなにすぐにできるはずがない、というのが浅はかなる筆者の邪険なる予想でした。ところが、二人の研究に対するエネルギーはすさまじく、佐武コンパクト化、Borel-Serre コンパクト化、べき零軌道・SL_2 軌道定理など、関係しそうな理論をすさまじい勢いで洗い出していきました。そして、(阪大でお二人の共同研究を初めて覗かせていただいてから) 約 1 年後には "generalized analytic space" [2] という新しい概念を生み出しました。そのとき、臼井先生は、完全ではないけれどもかなりいい線まで来た、とおっしゃっていたのを覚えています。実際、その概念の発見が契機となって、臼井・加藤のコンパクト化の理論は急速に発展していきました。Hermite 対称領域でない分類空間のコンパクト化の問題は、広大な未開領域であったと書きました。臼井・加藤のコンパクト化の理論は、この問題に対する突破口を拓いた研究であり、最初の成功した理論となりました。

数年後、九州大学に臼井先生が集中講義に来られ、臼井・加藤のコンパクト化について講義されました。それはすばらしい名講義でした (いまでもそのときのノートは大事に保管してあります)。筆者は深く感動し、1 週間の最後に、自分もいつかこんな素晴らしい研究ができるようになりたいです、と申しあげました (相変わらず恥知らずでした‥)。さて、そのころになると、臼井・加藤の理論は大部分が完成しプレプリントが広く出回っていました。そしてついに 2009 年 (臼井先生還暦の年!) にプリンストン大学から Annals of Mathematics Studies として刊行されました ([5])。そこでは、Polarized Log Hodge 構造を表現する空間 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ が構成されています。$\Gamma\backslash D_\Sigma$ が Hausdorff generalized analytic space であり、偏極 Log Hodge 構造の良モジュライであることの証明には、先に登場したさまざまなコンパクト化を関係づけた基本図式が使われています。この空間こそ Griffiths が夢みた空間です。

臼井先生は、[5] の刊行後は、おもに混合 Hodge 構造の分類空間のコンパクト化に取り組んでおられます。加藤先生をはじめ中山能力さんら共同研究者とともに、現在も精力的に研究に取り組んでおられます。臼井・加藤理論はいまも力強く発展を続けており、一体どこまで行ってしまうのだろうと目を見張るばかりです。先日、臼井先生

---

[2] 臼井先生は、Log 幾何学の研究を始める以前 (論文 [4] 以前) から、Torelli 問題への応用を念頭に $\Gamma\backslash D$ のトロイダル部分コンパクト化について研究しておられました。特に [3] では、一般の D に対して、$\Gamma\backslash D$ に一番簡単な退化に対する境界成分を付け加えるかたちのトロイダル部分コンパクト化を調べておられました。ここで初めて、この空間を Hausdorff にするためには slit を持たせるのがよいようだということを観察したそうです。一方、加藤先生もまた臼井先生とは独立に同じ問題を研究しておられました。あるとき、Log 幾何学の研究会に出席のためパリに滞在中だった加藤先生から臼井先生のところへお電話があり、[3] での観察について話をされました。これがきっかけとなって、お二人の共同研究がスタートしたそうです。お二人は、議論の結果、「analytic space with slits」というものが必要だという結論に達し、その後、strong topology が導入されて「generalized analytic space」になっていったとのことです。

の研究室にお邪魔した際には、うず高く積み上げられたプレプリントを見て先生のエネルギッシュな研究意欲に驚嘆しました。一方、臼井先生は阪大で多くの学生を指導され、後進の育成にも熱心に取り組んでおられます。かくいう筆者も(最悪の学生だったにも関わらず)先生から親切にご指導をいただきました。

2002 年の秋だったと思います。臼井先生が大病を患ったという知らせを受けました。僕の数倍はタフな方だと思っていましたので大変ショックでした。あれから十年近く、先生はいまも経過観察を受け、免疫療法を受けておられます。病気との付き合いにはわれわれには理解できない苦労があるだろうと思います。しかし先生は、そんなご自身の運命を呪うこともなく、いつも前向きで笑顔をたやされません。その陰には苦労を分かち合う奥様の存在があるだろうと想像します。還暦祝賀会の最後に先生がスピーチしている横で、奥様が涙ぐんでおられました。このようなお二人をみて僕も心打たれ目頭が熱くなりました。

この記事では、もう一人の世話人である池田京司氏と共同執筆で、臼井先生の業績を詳しく紹介することになっていました。ところが、最初に筆を取った筆者が、先生との思い出を中心に書き始めてしまったため、共同執筆にふさわしくない内容になってしまいました。それで、池田さんの了承を得て、筆者が一人で書くことにさせていただきました。池田さんにはご迷惑をおかけしたことを改めてお詫びします。記事について、多くの有益なコメントを下さり、また誤っている箇所をご指摘していただいた臼井、加藤両先生に深く感謝します。もちろん、内容に関する一切の責任が筆者にあることはいうまでもありません。

References

[1] Local Torelli theorem for some nonsingular weighted complete intersections. Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), pp. 723–734,

[2] Effect of automorphisms on variation of Hodge structure J. Math. Kyoto Univ. 21-4 (1981), 645–672.

[3] Complex structures on partial compactifications of arithmetic quotients of classifying spaces of Hodge structures. Tôhoku Math. J. 47-3 (1995), 405–429.

[4] Recovery of vanishing cycles by log geometry. Tohoku Math. J. (2) 53-1 (2001), 1–36.

[5] Kato, Kazuya and Usui, Sampei, Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures. Annals of Mathematics Studies, 169. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.