

# Splitting curves in double covers, elliptic surfaces and Zariski pairs

首都大学東京・理工学研究科  
徳永浩雄 (Hiro-o Tokunaga)  
Graduate School of Science and Engineering,  
Tokyo Metropolitan University

## イントロダクション

本稿では、すべての代数多様体は複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義されているものとする。  $\Sigma$  は非特異射影曲面とし、  $f' : Z' \rightarrow \Sigma$  は 2 次被覆とする。 すなわち、  $Z'$  は正規曲面で、  $f'$  は次数が 2 の全射有限射である。  $Z'$  の canonical resolution ([7] 参照) を  $\mu : Z \rightarrow Z'$  で表す ( $Z'$  が非特異の時は  $\mu$  は恒等写像である)。  $f := f' \circ \mu$  とおき、  $Z$  の被覆変換から誘導される involution を  $\sigma_f$  で表す。  $f'$  の分岐因子を  $\Delta_{f'}$  であらわす。  $\Delta_{f'} = \Delta_f$  であることに注意しておく。

**定義 0.1**  $D$  は  $\Sigma$  上の既約曲線とする。  $D$  が以下の条件を満たすとき、  $D$  は  $f$  に対し splitting curve であるという:  $D$  の引き戻し  $f^*D$  が

$$f^*D = D^+ + D^- + E,$$

ただし、  $D^+ \neq D^-$ ,  $\sigma_f^*D^+ = D^-$ ,  $f(D^+) = f(D^-) = D$  で  $\text{Supp}(E)$  は  $\mu$  の例外集合に含まれる、という形にかける。

2 次被覆  $f' : Z' \rightarrow \Sigma$  が分岐因子  $\Delta_{f'}$  から一意的に定まるとする。 すなわち、被約因子  $\Delta_{f'} (= \Delta_f)$  で分岐する 2 次被覆が  $f' : Z' \rightarrow \Sigma$  のみであるとする。 この設定の下で  $D$  が  $f$  に対し splitting curve であるとき、 “ $\Delta_f$  は mod  $D$  で平方剰余である” という。

**注意 0.1**  $\Sigma$  が単連結のとき、  $\Sigma$  の 2 次被覆は分岐因子のみから定まることが注意されたい。

Definition 0.1 の用語は初等整数論のそれに負っている。  $\Sigma$  が単連結のとき、 Legendre 記号にならって一つの記号を導入しておく<sup>1</sup>。  $B$  は  $\Sigma$  上の被約因子とする。  $B$

<sup>1</sup>この表記は安易すぎるかもしれないが、便利である。

で分岐する 2 次被覆が一意的に存在するとき,  $\Sigma$  上の既約因子  $D$  に対し,

$$(B/D) = \begin{cases} 1 & \text{if } B \text{ は mod } D \text{ で平方剰余} \\ -1 & \text{if } B \text{ は mod } D \text{ で平方非剰余} \end{cases}$$

とおく. 例えば,  $\Sigma$  が射影平面  $\mathbb{P}^2$  のときは, 偶数次の被約曲線  $B$  と, 既約曲線  $D$  について,  $(B/D)$  は well-defined である.

Splitting curve は二面体被覆の存在・構成の研究及びその応用である Zariski pair の研究等において自然にあらわれる対象である (例えば, [2], [17], [18] 参照). また, 島田による Lattice Zariski pair の研究でも, 重要な役割を果たしている ([13]). ここでは, そうした分岐被覆の研究やトポロジーへの応用を視野にいれて, 射影平面  $\mathbb{P}^2$  上の偶数次の曲線  $B$  と低次の既約曲線  $D$  に関し,  $(D/B)$  の値がどうなるか考察したい. さて, 以下では

(\*)  $B$  と  $D$  は各々の非特異点でしか交わらないものとする.

条件 (\*)のもと,  $\exists x \in B \cap D$  に対して,  $x$  における  $B$  と  $D$  の交点数が奇数ならば,  $(B/D) = -1$  となることは容易にわかる. 従って,  $B$  と  $D$  の各交点での交点数は偶数でなければならない. この条件を満たす曲線として, *even tangential curve* と呼ばれるものを導入する.

**定義 0.2**  $D_1$  と  $D_2$  は非特異射影曲面上の被約因子で共通な既約成分は持たないものとする.  $D_1$  と  $D_2$  が以下の条件を満たすとき,  $D_1$  と  $D_2$  は even tangential である, または  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) は  $D_2$  (resp.  $D_1$ ) に even tangential であるという.

(i)  $\forall x \in D_1 \cap D_2$  に対して,  $x \notin \text{Sing}(D_1) \cup \text{Sing}(D_2)$ .

(ii)  $\forall x \in D_1 \cap D_2$  に対して,  $x$  での  $D_1$  と  $D_2$  の交点数  $I_x(D_1, D_2)$  は偶数である.

**注.** ここでは相異なる交点の数  $\#(D_1 \cap D_2)$  については注意を払っていない.

以上の準備のもと, 我々の主問題はつぎの様に定式化される:

**問題 0.1**  $B$  は偶数次の被約な平面曲線とする.

(i)  $B$  に関して even tangential な曲線をもとめ,  $(B/D)$  の値を求めよ.

(ii)  $(B/D)$  の値は補空間  $\mathbb{P}^2 \setminus (B + D)$  のトポロジーに何らかの影響を与えるか?

本稿では, その第一のステップとして,  $B$  が既約 2 次曲線  $C$ ,  $D$  が 4 次以下の曲線の場合に問題 0.1 を考察する.  $C$  で分岐する 2 次被覆  $Z_C$  が  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  であることから, 以下の事実は容易にわかる:

- $D$  が直線または、2次曲線のとき、 $(C/D) = 1$ .
- $\deg D = 3$  のとき,
  - $D$  が非特異ならば  $(C/D) = -1$ ,
  - $D$  が node をもつならば  $(C/D) = 1$ ,
  - $D$  が cusp をもつとき,  $D$  に even tangential conic は存在しない.

従って  $\deg D = 4$  のときが最初の興味深い場合と考えられる. こうした状況のもと, 問題をより正確に書くと以下のようなになる:

**問題 0.2** 既約な4次曲線  $Q$  を固定する.

1.  $Q$  の even tangential conic  $C$  に対して,  $(C/Q)$  を決定せよ.
2.  $(C/Q)$  の値が補空間  $\mathbb{P}^2 \setminus (C + Q)$  のトポロジーに与える影響について論ぜよ.

本稿では問題 0.2, 1 にまず答を与える (定理 0.1, 命題 1.1). 続いて,  $Q$  上の非特異点  $x$  を通る even tangential conic がいくつあるかということについて特別な場合に関して考察する. 結果を述べるため, すこし記号を準備する.

- $\Xi_Q$ :  $Q$  の特異点の型の集合.  $Q$  の特異点は高々単純特異点のみに限る事に注意する. なお, 特異点の型を表す記号については [3] にあるものを利用する.
- $l_x \cap Q$ :  $l_x$  が  $Q$  と交わる状態を表す. そのため, 以下の記号を導入する.
  - $s$ :  $I_x(l_x, Q) = 2$  または  $3$  で,  $l_x$  は  $Q$  の他の点と横断的に交わる.
  - $b$ :  $l_x$  は 2重接線または  $I_x(l_x, Q) = 4$ .
  - $sb$ :  $I_x(l_x, Q) = 2$  かつ  $l_x$  は  $Q$  の 2重点を通る.

$\tilde{Q}$  は  $Q$  の正規化,  $g(\tilde{Q})$  はその種数を表すものとする. このとき, 次の事実が従う:

**定理 0.1**  $Q$  をひとつ固定する.  $C$  は  $Q$  の even tangential conic とすると, 以下の事実が成立する:

- $g(\tilde{Q}) = 0$  のとき,  $\forall C$  に対して,  $(C/Q) = 1$ .
- $g(\tilde{Q}) \geq 2$  のとき,  $\forall C$  に対して,  $(C/Q) = -1$ .
- $g(\tilde{Q}) = 1$  のとき, 以下の事実が成立する:

- $\Xi_Q \neq 2A_1, A_3$  のとき,  $\forall C$  に対して  $(C/Q) = -1$  である.
- $\Xi_Q = 2A_1, A_3$  のときは下記の表の通り:  
 $\#ETC$  は  $x$  を通る *even tangent conic* の数,  $\#QRETC$  は  $x$  を通る *even tangent conic* で  $(C/Q) = 1$  を満たすものの数を表すものとする.

No.	$\Xi_Q$	$l_x$	$\#ETC$	$\#QRETC$
1	$A_3$	$s$	7	1
2	$A_3$	$b$	2	0
3	$A_3$	$sb$	4	1
4	$2A_1$	$s$	13	1
5	$2A_1$	$b$	6	0
6	$2A_1$	$sb$	7	1

**注意 0.2** 任意の既約な 4 次曲線についても,  $Q$  の非特異点  $x$  を通る even tangential conic の数は求めることができる. 詳しくは, [20] 参照.

定理 0.1 の応用のひとつとして  $C + Q$  を分岐集合とする  $\mathbb{P}^2$  の二面体被覆<sup>2</sup>について考察しよう. これは, 問題 0.2, 2 へのひとつの答となっている. 実際, 以下の主張が成立する:

**定理 0.2**  $Q$  は既約な 4 次曲線,  $C$  は  $Q$  の *even tangential conic* とし,  $f_C : Z_C \rightarrow \mathbb{P}^2$  は  $C$  で分岐する 2 次被覆とする. 5 以上の素数  $p$  に対して,  $C + Q$  を分岐因子とする  $\mathbb{P}^2$  の  $D_{2p}$ -被覆<sup>3</sup>  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  が存在するならば, 以下の性質がなりたつ.

(i)  $\pi$  は  $C$  に沿って 2 重に,  $Q$  に沿って  $p$  重に分岐する.

(ii)  $(C/Q) = 1$  である. さらに,  $f_C^*Q = Q^+ + Q^-$ , とおくと,  $Q^+$  は  $Q^-$  に線形同値である,

逆に, 上記の (ii) が成立するとき, 3 以上のすべての  $n$  に対し  $C$  に沿って 2 重,  $Q$  に沿って  $n$  重に分岐する  $D_{2n}$ -被覆が存在する.

定理 0.2 の系として以下の事実が直ちに従う:

**系 0.1**  $p$  は 5 以上の素数とする.  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (C + Q))$  から  $D_{2p}$  への全射が存在する必要十分条件は,  $(C/Q) = 1$  かつ  $Q^+ \sim Q^-$  である.

紙数の制約もあるので, 本稿では, 定理 0.1 の証明の概略を与え, 系 0.1 を利用して得られる Zariski pair の例を与えるにとどめる. 詳しくは, [20] を参照されたい.

<sup>2</sup>二面体被覆, 一般に, Galois 被覆については, [1] を参照されたい.

<sup>3</sup> $D_{2p}$  は位数が  $2p$  の二面体群,  $D_{2n}$  も同様.

# 1 4次曲線に沿って分岐する $\mathbb{P}^2$ の2次被覆と有理楕円曲面

定理 0.1 の後半の証明するため,  $(C/Q)$  の値を求める公式をあたえる必要がある. そのために, [17] で考えたように  $Q$  と  $Q$  上の非特異点  $x$  に対し, 有理楕円曲面  $\mathcal{E}_x^Q$  を対応させることを考える.

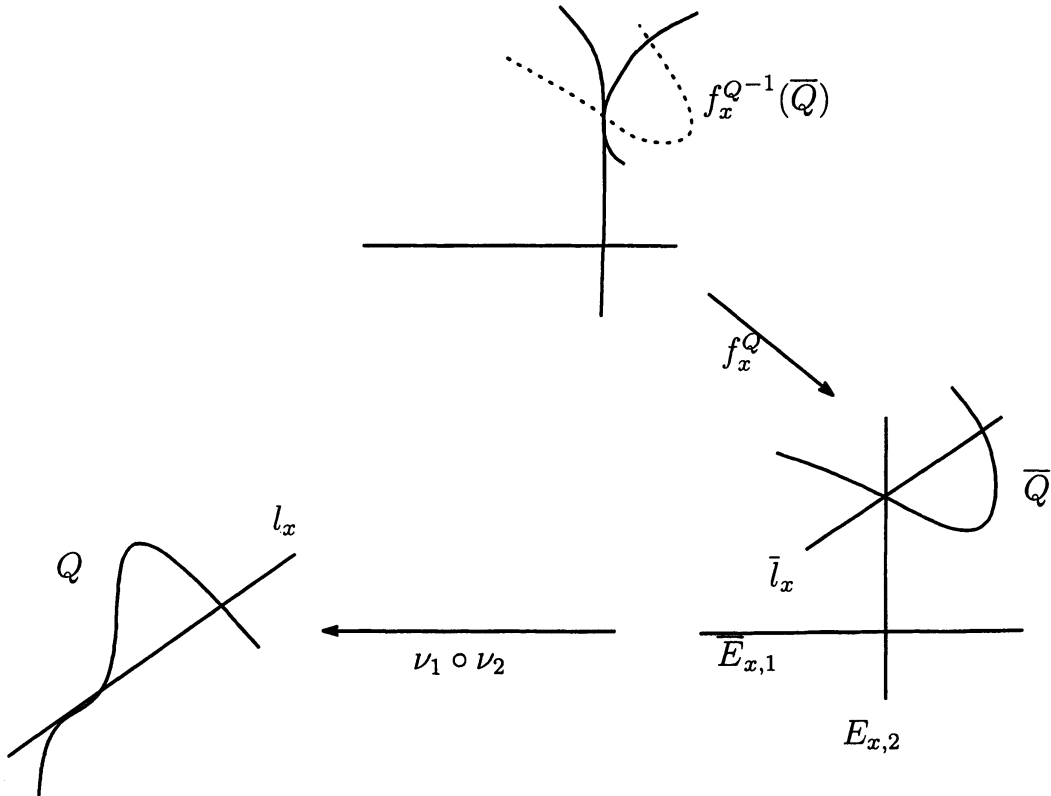
$\nu_1: \mathbb{P}_x^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  は点  $x$  でのブローアップとする.  $l_x$  の proper transform を  $\bar{l}_{x,1}$  で,  $\nu_1$  の例外曲線を  $E_{x,1}$  で表す. つづいて, 点  $\bar{l}_{x,1} \cap E_{x,1}$  でのブローアップを  $\nu_2: \hat{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_x^2$  とし,  $\bar{l}_{x,1}, E_{x,1}$  の proper transform をそれぞれ  $\bar{l}_x, \bar{E}_{x,1}$  で表し,  $\nu_2$  の例外曲線を  $E_{x,2}$  で表す.

$f_x^Q: \mathcal{E}' \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^2$  は  $\bar{E}_{x,1}$  と  $\bar{Q}$  に沿って分岐する 2次被覆とする. ただし,  $\bar{Q}$  は  $Q$  の  $\nu_2 \circ \nu_1$  に関する proper transform とする.  $\mu_x^Q: \mathcal{E}_x^Q \rightarrow \mathcal{E}'$  は  $\mathcal{E}'$  の canonical resolution とし,  $f_x^Q := \mu_x^Q \circ f_x^Q$  とおく. このとき,  $\mathcal{E}_x^Q$  は以下の条件をみたす:

- (i)  $x$  を通る  $\mathbb{P}^2$  の直線束  $\Lambda_x$  は relatively minimal な elliptic fibration  $\varphi_x^Q: \mathcal{E}_x^Q \rightarrow \mathbb{P}^1$  を誘導する. また,  $\mathcal{E}_x^Q$  は有理曲面である.
- (ii)  $\bar{E}_{x,1}$  は  $\varphi_x^Q$  の canonical な section  $O$  を与える.  $\mathcal{E}_x^Q$  の section 全体の集合  $\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  (または, generic fiber の  $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ -rational point 全体) には,  $O$  を単位元とするアーベル群の構造がはいる. この群は Mordell-Weil 群と呼ばれるものである.  $\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  やその lattice 構造については, [14] を参照. さらに,  $\mathcal{E}_x^Q$  の covering transformation  $\sigma_{f_x^Q}$  が誘導する  $\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  上の involution  $\sigma_{f_x^Q}^*$  は  $\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  の群の逆演算と一致する.
- (iii)  $E_{x,2}$  及び  $\bar{l}_x$  は  $\mathcal{E}_x^Q$  の可約な特異ファイバーの既約成分を定める.  $E_{x,2}$  及び  $\bar{l}_x$  を既約成分として含む特異ファイバーのタイプについては以下の通りである. ただし, 特異ファイバーのタイプは [9] の表記に従っている.

I <sub>2</sub> 型	$l_x$ が $x$ 以外に相異なる 2 点で $Q$ と交わる時.
III 型	$l_x$ が $x$ で 3 重に接するとき.
I <sub>3</sub> 型	$l_x$ が 2 重接線のとき.
IV 型	$l_x$ が 4 重接線のとき.
I <sub>n</sub> ( $n \geq 4$ ) 型	$l_x$ が $A_{n-2}$ 型の $Q$ の特異点を通るとき.

以下の図は  $l_x$  が 3 重接線のときに, III 型特異ファイバーが現われる様子を表している.



(iv)  $\mathcal{E}_x^Q$  の他の特異ファイバーは  $\Lambda_x$  のメンバーで  $Q$  と 3 点以下で交わるものに対応して現われる. それらのタイプについては, [11, Table 6.2] を参照.

**注意 1.1** 可約な特異ファイバーを 1 個以上もつ有理楕円曲面  $\mathcal{E}$  で section を持つものは, いつも上記の形で得られる. すなわち, ある 4 次曲線  $Q$  とその非特異点  $x$  が存在し,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x^Q$  となっている.

さて,  $C$  を  $x$  を通る even tangential conic としよう.  $\mathcal{E}_x^Q$  を構成する手順をたどれば以下の事実がわかる:

- $C$  は  $\mathcal{E}_x^Q$  の preimage は 2 つの既約成分からなり, それぞれ  $\varphi_x^Q$  の section である. これらを  $s_C^\pm$  と表す.  $\mathcal{E}_x^Q$  の構成の仕方から  $s_C^\pm$  は  $O$  と交わらない.
- $s_C^\pm$  は,  $\mathcal{E}_x^Q$  の各特異ファイバーで交わる既約成分は  $O$  が交わるそれと同じである.

上記の事実からつぎのことがわかる:

**観察** :  $\langle , \rangle$  は [14] で定義された pairing とする. このとき,  $s_C^\pm$  は [14] で定義された narrow part  $MW^0(\mathcal{E}_x^Q)$  の元であり,  $\langle s_C^\pm, s_C^\pm \rangle = 2$  である.

$x$  を通る even tangential conic を探す上で大切なのは、上記の観察の逆が成立する事である：

**補題 1.1**  $s$  は  $\varphi_x^Q$  の section で以下の条件を満たすものとする：

(i)  $\langle s, s \rangle = 2$

(ii)  $s \in \text{MW}^0(\mathcal{E}_x^Q)$

このとき、 $s$  の  $\mathbb{P}^2$  での像  $C_s$  は  $x$  を通る、 $Q$  の even tangential conic である。

補題の主張は  $\mathcal{E}_x^Q$  の構成法を逆にたどることである。さらに、 $\mathcal{E}_x^Q$  の性質 (ii) より、補題 1.1 の  $s$  に対し、 $\sigma_{f_x^Q}^* s$  も上記の条件 (i), (ii) を満たす  $\varphi_x^Q$  の section であり、 $\mathbb{P}^2$  での像は  $C_s$  と等しい。

続いて、定理 0.1 の証明の鍵となる命題を述べる。

**命題 1.1**  $Q, x$  はこれまで通りとする。  $C$  は  $x$  を通る、 $Q$  の even tangential conic とする。  $s_C^\pm$  は上でのべた  $C$  から定まる  $\varphi_x^Q$  の section とする。このとき、

$$(C/Q) = (-1)^{\varepsilon(s_C^\pm)}$$

である。ただし、 $s \in \text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  に対し、 $\varepsilon(s)$  は以下のように定めるものとする：

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} 0 & s = 2s_o \text{ をみたす } s_o \text{ が } \text{MW}(\mathcal{E}_x^Q) \text{ に存在する。} \\ 1 & s = 2s_o \text{ をみたす } s_o \text{ が } \text{MW}(\mathcal{E}_x^Q) \text{ に存在しない。} \end{cases}$$

**注意 1.2** •  $\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  上  $s_C^- = -s_C^+$  であるから、 $\varepsilon(s_C^+) = \varepsilon(s_C^-)$  である。

- 命題 1.1 は特異点として node のみをもつ偶数次の既約曲線  $D$ 、 $D$  上の一般の非特異点  $x$  と  $x$  を通る  $D$  の even tangential conic  $C$  に関して以下のようにして一般化される：

$x$  は  $D$  上の一般の非特異点をひとつ選び、 $\nu_2 \circ \nu_1 : \widehat{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  は  $\mathcal{E}_x$  を構成するときに利用した 2 回の blow-up の合成とし、その例外集合には同じ記号を用いる。 $\bar{D}$  は  $D$  の proper transform とする。 $S_x^D$  は  $\bar{E}_{x,1}$  と  $\bar{D}$  で分岐する 2 次被覆の canonical resolution を  $S_x^D$  とする。 $S_x^D$  は  $\mathbb{P}^1$  上の種数  $g$  の超楕円曲線束  $\varphi_x^D : S_x^D \rightarrow \mathbb{P}^1$  の構造をもち、 $\bar{E}_{x,1}$  の preimage  $O$  は  $\varphi_x^D$  の section となる。 $\mathcal{J}_{S_x^D}$  は  $S_x^D$  の generic fiber の Jacobian とし、 $\text{MW}(\mathcal{J}_{S_x^D})$  はその  $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$  上の Mordell-Weil 群とする。さらに [15] の決め方で  $C$  から定まる  $\text{MW}(\mathcal{J}_{S_x^D})$  の 2 つの元を  $s_C^\pm$  と表す。 $\varepsilon(s_C^\pm)$  を命題 1.1 と同様に定める。このとき、

$$(C/D) = (-1)^{\varepsilon(s_C^\pm)}$$

が成立する。詳しくは [19] 参照。

ここでは、命題 1.1 の証明のアイデアのみを述べる。詳しい証明は [20] 参照されたい。

$\mathcal{E}$  は体  $K$  上、次の Weierstrass 方程式で定義された楕円曲線とする：

$$\mathcal{E} : y^2 = u^3 + au^2 + bu + c.$$

$\mathcal{E}$  の  $K$ -有理点の集合を  $\text{MW}(\mathcal{E})$  とおく。さらに、 $\text{MW}(\mathcal{E})$  の点  $(u_1, y_1), (u_0, y_0)$  が  $\text{MW}(\mathcal{E})$  の和に関して

$$(u_1, y_1) = 2(u_0, y_0)$$

という条件を満たしているとする。点  $(u_0, y_0)$  における接線の方程式が

$$y = \alpha u + \beta$$

で与えられているとする。すると、 $\text{MW}(\mathcal{E})$  の和の定義から

$$u^3 + au^2 + bu + c = (\alpha u + \beta)^2 + (u - u_0)^2(u - u_1)$$

である。このアイデアを  $\mathcal{E}_x^Q$  に適用する。 $\mathbb{P}^2$  の同次座標  $[U, T, V]$  を

- 点  $x$  の座標が  $[1, 0, 0]$ ,
- $x$  における接線の方程式が  $V = 0$ ,

であるようにとる。 $u = U/V, t = T/V$  とおくと、 $Q$  はその affine 部分が

$$f(t, u) = u^3 + \left(\sum_{i=0}^2 p_i t^{2-i}\right)u^2 + \left(\sum_{i=0}^3 q_i t^{3-i}\right)u + \sum_{i=0}^4 r_i t^{4-i} = 0$$

$p_i, q_i, r_i \in \mathbb{C}$  で与えられる。このとき、 $\mathcal{E}_x^Q$  の generic fiber の Weierstrass 方程式として  $y^2 = f(t, u)$  がとれる。 $s_C^+$  が  $(u(t), y(t))$ ,  $s_C^+ = 2s_0$  をみたす  $s_0$  が  $(u_0(t), y_0(t))$  で与えられているとき、上記の注意から

$$f(t, x) = (\alpha u + \beta)^2 + (u - u_0)^2(u - u_1) \quad (*)$$

となる。 $s_C^+$  に関する条件から、 $\alpha, \beta, u_0, u_1$  が  $t$  に関する多項式であることが従う。 $f_C : Z_C \rightarrow \mathbb{P}^2$  は  $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$  に  $\sqrt{u - u_1}$  を付け加えて得られるので、 $(C/Q) = 1$  がわかる。逆に、 $(C/Q) = 1$  であるとき、 $\mathcal{E}_x^Q$  の Weierstrass 方程式の右辺が  $(*)$  の右辺のように書き表せることを具体的に示す。以上が証明のあらましである。



## 2 定理 0.1 の証明の概略

補題 2.1  $\tilde{Q}$  及び  $g(\tilde{Q})$  はイントロダクションで述べたとおりとする。このとき、つぎの主張が従う：

- (i)  $g(\tilde{Q}) \geq 2$  のとき,  $Q$  に関する任意の even tangential conic  $C$  に対し,  $(C/Q) = -1$  である.
- (ii)  $g(\tilde{Q}) = 0$  のとき,  $Q$  に関する任意の even tangential conic  $C$  に対し,  $(C/Q) = 1$  である.

*Proof.* (i)  $C$  は  $Q$  に even tangent な 2 次曲線で  $(C/Q) = 1$  を満たすものとする.  $f_C : Z_C \rightarrow \mathbb{P}^2$  は  $C$  で分岐する double cover とする.  $f_C^*Q = Q^+ + Q^-$  とおく.  $Z_C \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ,  $\text{Pic}(Z_C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  であり,  $Z_C$  の被覆変換が  $\text{Pic}(Z_C)$  上引き起こす involution は  $(a, b) \mapsto (b, a)$  であるから,  $g(\tilde{Q}) > 0$  のときは,  $Q^+ \sim Q^- \sim (2, 2)$  であることがわかる. ところが,  $Q^+, Q^-$  は  $Q$  それぞれ双有理同値で,  $g(\tilde{Q}) \geq 2$  である.  $(2, 2)$  型の既約曲線の非特異モデルの種数は高々 1 であるから, これは矛盾である.

(ii)  $f_C$  が  $\tilde{Q}$  上に引きおこす double cover は不分岐である. ゆえに,  $(C/Q) = 1$  が従う. □

補題 2.1 より, 定理 0.1 の最初の 2 つの主張が従う. 残るは  $g(\tilde{Q}) = 1$  の場合である.  $g(\tilde{Q}) = 1$  となるのは,  $\Xi_Q$  が

$$A_3, A_4, A_1 + A_2, 2A_1, 2A_2,$$

となるときである.  $C$  が  $x$  を通る  $Q$  に関して even tangential conic で  $(C/Q) = 1$  であったとする.  $f_C^*Q = Q^+ + Q^-$  とおく. すると, 補題 2.1 の証明で見たように  $Q^+ \sim Q^- \sim (2, 2)$  であるから  $Q^\pm$  は非特異である. 一方,  $Q$  が  $A_4$  または  $A_2$  をもつとき,  $Q$  は特異点で局所的に既約であるから,  $Q^\pm$  も特異点の preimage で特異点を持たねばならない. これは矛盾である. 従って,  $g(\tilde{Q}) = 1$  のときの前半部分が証明できた.

続いて  $g(\tilde{Q}) = 1$  のときを考える.  $\mathcal{E}_x^Q$  の構成の仕方と [12] の結果から,  $\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  およびその “narrow” part  $\text{MW}^0(\mathcal{E}_x^Q)$  の格子の構造に関して以下の表を得る：

No.	$\Xi_Q$	$l_x \cap Q$	$MW(\mathcal{E}_x^Q)$	$MW^0(\mathcal{E}_x^Q)$
1	$A_3$	$s$	$A_3^* \oplus A_1^*$	$A_3 \oplus A_1$
2	$A_3$	$b$	$\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
3	$A_3$	$sb$	$A_5$	$A_2 \oplus A_1$
4	$2A_1$	$s$	$D_4^* \oplus A_1^*$	$D_4 \oplus A_1$
5	$2A_1$	$b$	$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6	$2A_1$	$sb$	$A_3^* \oplus A_1^*$	$A_3 \oplus A_1$

補題 1.1 及びその前の観察, さらに命題 1.1 よりつぎの事実がわかる:

$$\#ETC := \{s \in MW^0(\mathcal{E}_x^Q) \mid \langle s, s \rangle = 2\}/2$$

$$\#QRETC := \{s \in MW(\mathcal{E}_x^Q) \mid \langle s, s \rangle = 1/2, 2s \in MW(\mathcal{E}_x^Q)\}/2.$$

従って, No. 1, 3, 4, 6 については, A-D-E lattice の性質から,  $\#ETC$  と  $\#QRETC$  が得られる. 故に, 残るは No. 2 と No. 5 である.

No. 2 [12, Lemma 3.8] にある議論を用いる.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cong A_2^\perp \text{ in } D_5$$

であること,  $A_2$  の  $D_5$  への埋め込みは同型をのぞいて一意であるから,  $MW^0(\mathcal{E}_x^Q)$  の長さ 2 のベクトルは 4 個. これから  $\#ETC = 2$  がわかる. また,  $s \in MW(\mathcal{E}_x^Q)$  に対して

$$\langle s, s \rangle = 2(1 + sO) - \frac{k_1(4 - k_1)}{4} - \frac{2}{3}k_2,$$

ただし,  $k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, k_2 \in \{0, 1\}$ . ゆえに  $\langle s, s \rangle = 1/2$  を満たす  $s$  は存在しないことがわかる.

No. 5 再び [12, Lemma 3.8] にある議論を用いる.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cong A_1^\perp \text{ in } A_5$$

であること,  $A_1$  の  $A_5$  への埋め込みは同型をのぞいて一意であるから,  $MW^0(\mathcal{E}_x^Q)$  の長さ 2 のベクトルは 12 個. これから  $\#ETC = 6$  がわかる. また,  $s \in MW(\mathcal{E}_x^Q)$  に対して

$$\langle s, s \rangle = 2(1 + sO) - \frac{2}{3}k_1 - \frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2}k_3,$$

ただし,  $k_1, k_2, k_3 \in \{0, 1\}$ . ゆえに  $\langle s, s \rangle = 1/2$  を満たす  $s$  は存在しないことがわかる.

### 3 応用

$(B_1, B_2)$  は被約な平面代数曲線とする. ペア  $(B_1, B_2)$  が以下の条件をみたすとき Zariski pair と呼ぶ:

1.  $B_1$  と  $B_2$  はともに同じ configuration type をもつ (configuration type については, [1] を参照のこと),
2. 同相写像  $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  で  $h(B_1) = B_2$  を満たすものは存在しない.

**注意 3.1** 既約 4 次曲線  $Q$  と  $Q$  の even tangential conic  $C$  に関しては,  $C + Q$  の configuration type は  $\Xi_Q$ ,  $\#C \cap Q$  と  $I_x(C, Q)$  ( $x \in C \cap Q$ ) で定まる.

定理 0.2 と系 0.1 及び [2] にある結果の応用として直ちに次の命題を得る.

**命題 3.1**  $Q_1$  と  $Q_2$  は既約な 4 次曲線,  $C_1$  と  $C_2$  は各  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) に関する even tangential conic とする.  $C_i + Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) はともに同じ configuration type を持つとする.

(i)  $(C_1/Q_1) = 1$  かつ  $(C_2/Q_2) = -1$  のとき,  $(C_1 + Q_1, C_2 + Q_2)$  は Zariski pair である.

(ii)  $(C_i/Q_i) = 1$  ( $i = 1, 2$ ),  $Q_1^+ \sim Q_1^-$  かつ  $Q_2^+ \not\sim Q_2^-$  のとき,  $(C_1 + Q_1, C_2 + Q_2)$  Zariski pair である.

命題 3.1 の (ii) に関する例は [2] を参照されたい. ここでは, 命題 3.1 の (i) の例について考察する. なお, 命題 3.1 で  $Q = Q_1 = Q_2$  とおき, even tangential な 2 次曲線  $C_1, C_2$  がともに相異なる 4 点で  $Q$  と接するとする. すると,  $(C_1/Q) = 1, (C_2/Q) = -1$  ならば  $(Q + C_1, Q + C_2)$  は Zariski pair になることに注意する.

さて, 定理 0.1 より  $Q$  の特異点集合が  $2A_1, A_3$  なら  $(C_1/Q) = 1, (C_2/Q) = -1$  を満たす even tangential conic  $C_1, C_2$  が存在する. 命題 3.1 (i) のタイプの Zariski pair

を得るには、この事実を利用する。具体的には以下の通りである。 $\mathcal{E}_x^Q$  は定理 0.1 の No.1, 3, 4, 6 の場合に対応する有理楕円曲面とする。 $s_1, s_2 \in \text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  を以下のように選ぶ：

- $\langle s_i, s_i \rangle = 2, s_i O = 0$  ( $i = 1, 2$ ) かつ
- $s_1 \in 2\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$  であるが  $s_2 \notin 2\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q)$ .

補題 1.1 より、 $s_1$  および  $s_2$  から  $Q$  に対して even tangential conic  $C_{s_1}$  および  $C_{s_2}$  を得る。命題 1.1 より  $(C_{s_1}/Q) = 1$  かつ  $(C_{s_2}/Q) = -1$  である。ゆえに  $C_{s_1}$  と  $C_{s_2}$  が  $Q$  に相異なる 4 点で接する<sup>4</sup>ならば、命題 3.1 の (i) に対する Zariski pair の例となる。最後に明示的な例をあげてこの稿を終えよう。

**例 3.1**  $Q$  は affine 方程式

$$f(t, u) = u^3 + (271350 - 98t)u^2 + t(t - 5825)(t - 2025)u + 36t^2(t - 2025)^2$$

で与えられた 4 次曲線を考える。この 4 次曲線は同次座標  $[U, T, V]$  を  $u = U/V, t = T/V$  ととると、 $[1, 0, 0]$  は  $Q$  の非特異点である。この点における接線は  $V = 0$  で与えられ、 $[1, 0, 0]$  で  $Q$  と 3 重に交わる。この  $Q$  に対応する  $\varphi_x^Q : \mathcal{E}_x^Q \rightarrow \mathbb{P}^1$  は Weierstrass 方程式

$$y^2 = f(t, u),$$

で与えられる。[16, Example, p.198] より  $\varphi_x^Q : \mathcal{E}_x^Q \rightarrow \mathbb{P}^1$  は以下の性質を満たしている：

- $\varphi_x^Q$  は 3 つの可約な特異ファイバーを  $t = 0, 2025, \infty$  上でもつ。各々のタイプは  $t = 0, 2025$  上では  $I_2$  型であり、 $t = \infty$  上では III 型である。
- $\text{MW}(\mathcal{E}_x^Q) \cong D_4^* \oplus A_1^*$ .

上記の性質と  $\mathcal{E}_x^Q$  の構成のところで述べた性質 (iii) (その後の図)、(iv) から  $Q$  は 2 つの node を特異点として持つ。

さて、[16, Example, p.198] で与えられた以下の 3 つの section を選ぶ。

$$s_0 : (0, 6t^2 - 12150t), \tilde{s}_1 : (-32t, 2t^2 - 6930t), \tilde{s}_2 : (-20t, 4t^2 - 4500t).$$

これらの section に関しては  $s_0 \in A_1^*, \tilde{s}_i$  ( $i = 1, 2$ )  $\in D_4^*$  であることがわかっている。さらに、

$$\langle s_0, s_0 \rangle = \frac{1}{2}, \langle \tilde{s}_i, \tilde{s}_i \rangle = 1 \ (i = 1, 2), \langle \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \rangle = 0,$$

---

<sup>4</sup>または、“同じ交わり方”をする。

であり,  $\pm s_0$  以外の  $s$  で  $\langle s, s \rangle = 1/2$  を満たすものは存在しない.

ここで,  $s_1 := 2s_0, s_2 := \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2$  とおく. 具体的には

$$s_1 = \left( \frac{1}{144}t^2 + \frac{1231}{72}t - \frac{5143775}{144}, -\frac{1}{1728}t^3 - \frac{2335}{576}t^2 + \frac{13493375}{576}t - \frac{29962489375}{1728} \right)$$

$$s_2 = \left( \frac{1}{36}t^2 + \frac{435}{2}t - \frac{921375}{4}, -\frac{1}{216}t^3 - \frac{1181}{24}t^2 - \frac{41625}{8}t + \frac{373156875}{8} \right)$$

である.  $s_1$  は 2-divisible であり,  $s_2 \in D_4^*$  であるから  $s_2$  は 2-divisible でない. さらに, [14, Lemma 10.9] より  $s_1, s_2$  は  $O$  と交わらない. ゆえに,

$$\langle s_1, s_1 \rangle = \langle s_2, s_2 \rangle = 2$$

を得る. 2次曲線  $C_1$  及び  $C_2$  を

$$C_1 : u = \frac{1}{144}t^2 + \frac{1231}{72}t - \frac{5143775}{144}$$

$$C_2 : u = \frac{1}{36}t^2 + \frac{435}{2}t - \frac{921375}{4}$$

と定義する. このとき,

- $C_1$  と  $C_2$  は  $[1, 0, 0]$  で  $Q$  に接する. また,  $[1, 0, 0]$  以外の相異なる 3 点で接することも直接計算からわかる. また,
- $C_i$  に対応する  $\mathcal{E}_x^Q$  の section は  $s_i$  である.

故に命題 3.1 より  $(C_1 + Q, C_2 + Q)$  は Zariski pair である.

## 参考文献

- [1] E. Artal Bartolo, J.-I. Codgolludo and H. Tokunaga: *A survey on Zariski pairs*, Adv.Stud.Pure Math., **50**(2008), 1-100.
- [2] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: *Zariski k-plets of rational curve arrangements and dihedral covers*, Topology Appl. **142** (2004), 227-233.
- [3] W. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters and A. Van de Ven: *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 4 2nd Enlarged Edition, Springer-Verlag (2004).

- [4] E. Brieskorn: *Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen*, Math. Ann. **166**(1966), 76-102.
- [5] E. Brieskorn: *Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen*, Math. Ann. **178**(1968), 255-270.
- [6] J.H. Conway and N.J.A. Sloane: *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New York, third edition, 1999.
- [7] E. Horikawa: *On deformation of quintic surfaces*, Invent. Math. **31** (1975), 43 – 85.
- [8] K. Ireland and M. Rosen: *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Second Edition, Graduate Text in Mathematics **84** Springer-Verlag (1990).
- [9] K. Kodaira: *On compact analytic surfaces II*, Ann. of Math. **77** (1963), 563-626.
- [10] R. Miranda: *The moduli of Weierstrass fibrations over  $\mathbb{P}^1$* , Math. Ann. **255**(1981), 379-394.
- [11] R. Miranda and U. Persson: *On extremal rational elliptic surfaces*, Math. Z. **193**(1986), 537-558.
- [12] K. Oguiso and T. Shioda: *The Mordell-Weil lattice of Rational Elliptic surface*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **40**(1991), 83-99.
- [13] I. Shimada: *Lattice Zariski  $k$ -ples of plane sextic curves and  $Z$ -splitting curves for double plane sextics*, arXiv:0903.3308
- [14] T. Shioda: *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **39** (1990), 211-240.
- [15] T. Shioda: *Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), 359–373, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **264** (1999), 359-373.
- [16] T. Shioda and H. Usui: *Fundamental invariants of Weyl groups and excellent families of elliptic curves*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **41**(1992), 169-217.

- [17] H. Tokunaga: *On dihedral Galois coverings*, Canadian J. of Math. **46** (1994), 1299 - 1317.
- [18] H. Tokunaga: *Dihedral covers and an elementary arithmetic on elliptic surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **44**(2004), 55-270.
- [19] H. Tokunaga: *Splitting curves on a rational ruled surface, the Mordell-Weil groups of hyperelliptic fibrations and Zariski pairs*, Preprint 2009
- [20] H. Tokunaga: *Geometry of irreducible plane quartics and their quadratic residue conics*, Preprint 2009
- [21] O. Zariski: *On the purity of the branch locus of algebraic functions*, Proc. Nat. Acad. USA **44** (1958), 791-796.