

# Introduction to log abelian varieties

Takeshi Kajiwara \*

## 1 はじめに

本稿では、対数幾何における対数アーベル多様体について簡単に紹介する。本研究は加藤和也氏、中山能力氏との共同研究である。詳しくは [6], [7] をみよ。

アーベル多様体の退化、アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化に関して、これまでに多くの研究がある。(Mumford [10], 浪川幸彦 [12], [14], 中村郁 [11], Faltings-Chai [4], 藤原一宏 [5], Alexeev [2], Alexeev-中村 [3], Olsson [15] など.)

アーベル多様体の特徴は、完備性と群構造(非特異性)であるが、これまでの研究ではこの2点を両立させて退化を論じることが困難であった。代数多様体の範疇では原理的に難しい。

一方、対数幾何において、対数アーベル多様体は、従来のアーベル多様体が表現する層を一般化したアーベル群の層である。対数アーベル多様体はもはや代数多様体とは限らないが、上述の研究で扱われてきた退化(完備多様体)を“含めた”対象になっている。つまり、このような退化多様体は、対数アーベル多様体の部分層を表現し、さらにその部分層は対数アーベル多様体をアーベル群の層として生成する。この意味で、対数アーベル多様体は完備で群構造をもつアーベル多様体およびその退化をとらえている。

本稿は、簡単のため、複素解析的な設定で説明する。代数的な設定は [7] を参照せよ。

## 2 定義

対数アーベル多様体を説明する前に、 $\mathbb{C}$  上のアーベル多様体について復習する。

### 2.1 復習

複素アーベル多様体  $A$  は、商

$$\mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g)$$

(ここで  $\Omega = (\omega_{jk})$  は  $g$  次複素対称行列で  $\text{Im } \Omega > 0$  (正定値)) で表すことができる。指数写像  $\exp(2\pi \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times; z \mapsto \exp(2\pi z)$  を用いると、この表示は

$$(\mathbb{C}^\times)^g / (q_1^{\mathbb{Z}} \cdots q_g^{\mathbb{Z}}) (\cong (\mathbb{C}^\times)^g / \mathbb{Z}^g)$$

---

\*2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 14M25

となる. ここで,  $q_j := (\exp(\omega_{kj}))_{k=1}^g$  ( $j = 1, \dots, g$ ),  $q_j^{\mathbb{Z}} := \{q_j^n := (\exp(n\omega_{kj}))\}; n \in \mathbb{Z}$  とする. さらに, 同型の右辺の括弧内の表示を参考にして,  $Y := q_1^{\mathbb{Z}} \cdots q_g^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^g$  とおき,  $X := \text{Hom}_{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^g, \mathbb{C}^\times) (\cong \mathbb{Z}^g)$  ( $(\mathbb{C}^\times)^g, \mathbb{C}^\times$  を代数的トーラスとみたときの指標群) とおくと, 複素アーベル多様体は,

$$\text{Hom}(X, \mathbb{C}^\times)/Y$$

と書き直せる. ここでの商は,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : X \times Y &\rightarrow \mathbb{C}^\times; & (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle := \chi_x(y), \\ Y &\rightarrow \text{Hom}(X, \mathbb{C}^\times); & y &\mapsto (x \mapsto \chi_x(y)) \end{aligned}$$

(ただし  $\chi_x : (\mathbb{C}^\times)^g \rightarrow \mathbb{C}^\times$  は  $x \in X$  が表す  $(\mathbb{C}^\times)^g$  の指標) によって定まる.

そこで  $\langle , \rangle$  が複素アーベル多様体を定義するために必要な条件も考慮して, 対数アーベル多様体の定義を 2.2 で与える.

以下,  $S = (\text{Spec } \mathbb{C}, \mathbb{C}^\times \oplus \mathbb{N})$  (対数標準点) とする.  $(\text{fs}/S)$  を  $S$  上の  $\text{fs log}$  解析空間のなす圏とする.  $\mathbb{G}_{m, \log}$  は  $(\text{fs}/S)$  上の層  $U \mapsto \Gamma(U, M_U^{\text{sp}})$  を表す.

**2.2 定義**  $S$  上の  $g$  次元対数アーベル多様体とは,  $(\text{fs}/S)$  上のアーベル群の層であって,

$$\text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}/Y$$

と同型なものをいう. (この層は以下で説明する  $X, Y, \langle , \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{G}_{m, \log}, p : Y \rightarrow X$  によって定める. 説明は以下で行う.) [6, 1.3.5 Definition] 参照.

上の定義において,  $X, Y$  は階数  $g$  の自由アーベル群であり, pairing  $\langle , \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{G}_{m, \log}$  と単射準同型  $p : Y \rightarrow X$  (偏極) で次をみたすものが与えられている:

- (1) 任意の  $y, z \in Y$  に対して,  $\langle p(y), z \rangle = \langle p(z), y \rangle$  が成り立つ.
- (2) 任意の  $y \in Y$  に対して  $\langle p(y), y \rangle \in \Gamma(S, M_S)$  であり,  $y \neq 0$  ならば  $|\alpha(\langle p(y), y \rangle)| < 1$  である. ここで  $\alpha : M_S \rightarrow \mathbb{C} = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  (対数構造) である.

いま,  $Y \rightarrow \text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log}); y \mapsto \langle *, y \rangle$  により  $Y$  をその像と同一視する. (この射の単射性は偏極  $p$  の存在より従う.)  $\text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log})$  の部分アーベル層  $\text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  を次のように定義する:

$\text{fs } S$  対数解析空間  $U$  に対して,  $\text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  の  $U$  切断  $\varphi : X \rightarrow \Gamma(U, M_U^{\text{sp}})$  を, 任意の  $x \in X$  に対して,  $U$  上局所的に, ある  $y, y' \in Y$  が存在して,  $\langle x, y \rangle | \varphi(x) | \langle x, y' \rangle$  をみたすもの全体と定義する:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}(U) &:= \{ \varphi \in \text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log})(U); \text{ 任意の } x \in X \text{ に対して,} \\ &U \text{ 上局所的に, ある } y, y' \in Y \text{ が存在して, } \langle x, y \rangle | \varphi(x) | \langle x, y' \rangle \}. \end{aligned}$$

ここで,  $\text{fs}$  半群  $P$  の群化  $P^{\text{sp}}$  の元  $a, b$  に対して,  $a|b$  とは  $a^{-1}b \in P$  をみたすことである.

上の定義より、対数アーベル多様体は群構造を持つ。実際、 $\mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  はアーベル群の層であり、上で述べた同一視のもとで  $Y$  を部分群にもつ。群構造をもつことは本質的に次の計算から従う： $\mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  の切断  $\varphi_1, \varphi_2$  に対して、定義より任意の  $x \in X$  に対して

$$\langle x, y_1 \rangle | \varphi_1(x) | \langle x, y'_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle | \varphi_2(x) | \langle x, y'_2 \rangle \quad (\text{ある } y_i, y'_i \in Y, i = 1, 2)$$

が成り立つ。よって  $\varphi_1 \varphi_2$  に対して  $\langle x, y_1 + y_2 \rangle | \varphi_1(x) \varphi_2(x) | \langle x, y'_1 + y'_2 \rangle$  が成り立ち、 $\varphi_1 \varphi_2$  は  $\mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  の切断である。また  $y \in Y$  に対して、 $\langle *, y \rangle$  が  $\mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  に入るのは直接計算で確かめられる。

以上により、 $\mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  をその部分アーベル層  $Y$  で割った商もアーベル群の層である。代数多様体の範疇ではなしえなかった群構造がここにある。

次節で  $g = 1$  の場合 (対数楕円曲線の場合) を例に挙げ、この層について説明する。

### 3 例

対数アーベル多様体のアイデアを、対数楕円曲線を例に説明する。

$g = 1$  のとき、 $X = Y = \mathbb{Z}$  であり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow \mathbb{G}_{m, \log}$  はある  $q \in \Gamma(S, M_S)$  を用いて、 $\langle m, n \rangle = q^{mn}$  と表される。

また、 $Y \rightarrow \mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log}) = \mathbb{G}_{m, \log}$  は  $y \mapsto q^y$  (右辺の元は  $q \in \Gamma(S, M_S)$  の各  $\Gamma(U, M_U)$  への像と考える) となる。よって  $\mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}$  の  $U$  切断 ( $U$  は fs  $S$  対数解析空間) は

$$\mathcal{H}\text{om}(X, \mathbb{G}_{m, \log})^{(Y)}(U) = \mathbb{G}_{m, \log}^{(q)}(U) := \{\xi \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m, \log}); \text{ある } y, y' \in Y \text{ に対して } q^y | \xi | q^{y'}\}$$

である。したがって、対数楕円曲線  $E$  は  $\mathbb{G}_{m, \log}^{(q)}/q^{\mathbb{Z}}$  (と同型なアーベル層) である。これがどのようなものであるか、 $q$  が  $0_S^\times$  に入る場合と、そうでない場合 ( $M_S \setminus 0_S^\times$  に入る場合) に分けて説明する。

#### 3.1 $q \in \mathbb{C}^\times$ の場合

$\mathbb{G}_{m, \log}^{(q)} = \mathbb{G}_m$  となる。したがって、 $E = \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$  ( $|q| < 1$ ) である。これは通常楕円曲線である (2.1 節)。

#### 3.2 $q \in M_S \setminus \mathbb{C}^\times$ の場合

$q \in \mathbb{C}^\times$  であればこの層は楕円曲線によって表現されたが、この場合は事情が異なる。

まず、層  $\mathbb{G}_{m, \log}^{(q)}$  の部分層  $\tilde{E}_1 := \{\xi \in \mathbb{G}_{m, \log}; \text{ある } i \text{ に対して } q^i | \xi | q^{i+1}\}$  を考える (簡便なので  $U$  切断の記法を省略した)。  $\tilde{E}_1$  には  $\xi \mapsto \xi q$  により  $Y = q^{\mathbb{Z}}$  が作用するが、 $\tilde{E}_1$  は群ではない。各  $\{\xi \in \mathbb{G}_{m, \log}; q^i | \xi | q^{i+1}\}$  は  $\text{Spec } \mathbb{C}[s, t]/(st)$  (対数構造は  $\mathbb{N}^2 \rightarrow s^{\mathbb{N}} t^{\mathbb{N}}; (a, b) \mapsto s^a t^b, q = st$  で与える) により表現される (図1の左辺)。したがって、 $\tilde{E}_1$  は  $\mathbb{P}^1$  の鎖に対数構造が付いた対数解析空間で表現される (図1の左辺)。  $q^{\mathbb{Z}}$  の作用は、既約成分を“ずらす”作用である。ゆえに  $\tilde{E}_1/q^{\mathbb{Z}}$  は結節点を1つ持つ楕円曲線の退化で表現される (図1の右辺)。

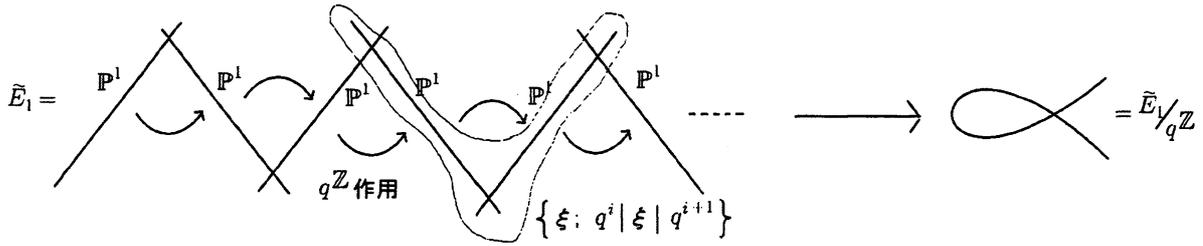


図 1:  $\tilde{E}_1$

対数楕円曲線は、 $\tilde{E}_1$  以外にも、いろいろな  $q^i$  で“はさんだ”切断の合併  $G_{m, \log}^{(q)}$  を  $q^Z$  で割って構成される。この合併を考えることで、群構造をもつ対象として扱うことが可能になっている。群構造をもつ事情は以下の 3.3 で説明する。一方で、対数楕円曲線は、直観的には  $\tilde{E}_1/q^Z$  のような退化楕円曲線（あるいはその開集合）の合併とみることもできるので、楕円曲線やその退化と関係している。

3.3 対数楕円曲線の群構造

さて、 $q$  が  $M_S \setminus \mathbb{C}^\times$  に入る場合に、対数楕円曲線の群構造を考察する。従来の特異点を持つ退化楕円曲線ではあり得ない群構造が、「合併」によりどのように可能になっているのかを説明する。

$\tilde{E}_1$  において、下図のように 2 点  $P, Q$  をとる。すなわち、 $U_i := \{\xi; q^{i-1}|\xi|q^i\}$  とおき、 $P$  は  $U_1$  を表現する空間の結節点、 $Q$  は  $U_2$  を表現する空間の結節点とする。 $P+Q$  がどのように定義されるかを考察する。（ $Q$  を少しずらしたとみて） $Z_1 := G_m q, Z_2 := G_m q^2$  の点による、 $P$  の近傍  $U_1$  への作用をみる。

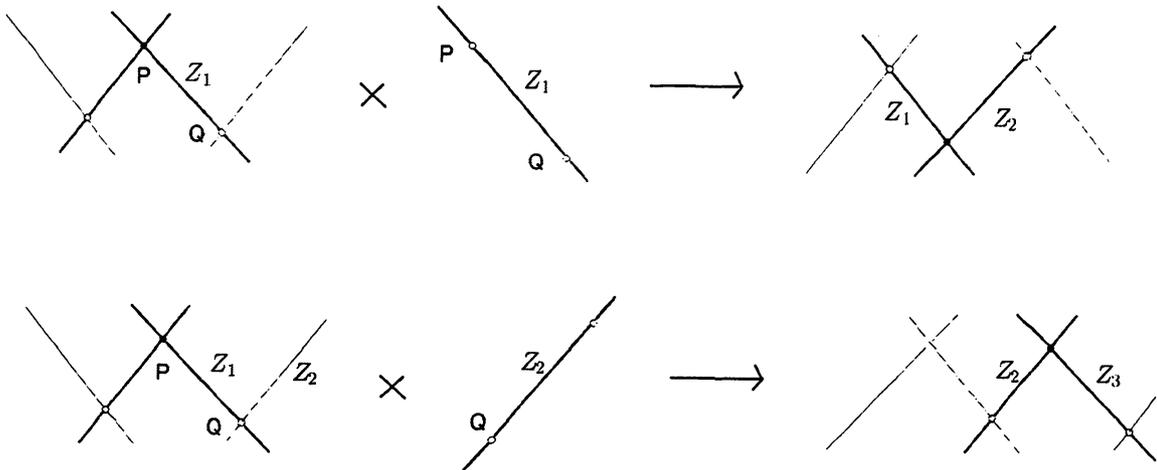


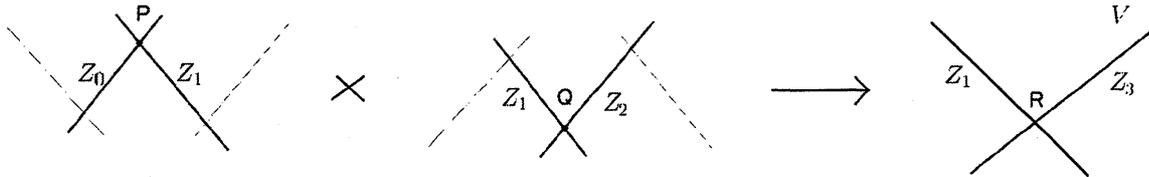
図 2: 作用 (右辺の上の方が  $U_2$ , 下の方が  $U_3$ )

このとき、 $U_1$  は  $U_2$  や  $U_3$  に写る。したがって、 $Q$  を  $U_2$  の結節点への極限とみると、 $P$  は  $U_2 \cap U_3 = G_m q^2 = Z_2$  に写らなければいけない。もちろん、特異点が非特異点に写る

ことはないから、このままでは意味がない。しかし、ここで  $Z_2$  が 1 点につぶれるように blow down すると、 $P+Q$  の像として well-defined になる。具体的には、

$$U_1 \times U_2 \rightarrow V := \{\xi; q = q^1|\xi|q^3\}; (\xi, \xi') \mapsto \xi\xi'$$

により well-defined になる。  $U_1, U_2$  の切断  $\xi_1, \xi_2$  に対して、  $q^{i-1}|\xi_i|q^i$  をみたく切断  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対して、  $\xi_1\xi_2$  は  $q|\xi_1\xi_2|q^3$  をみたく、 という事情がこの群構造に反映されている。 図で表せば、 ちょうど下図のようにみえる。



こうして、 さまざまな  $\{\xi; q^i|\xi|q^i\}$  の和集合をとることで群構造が得られている。

### 4 応用

対数アーベル多様体を用いた、 アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化への応用を説明する。 詳細は [6, §4] を参照せよ。

(fs) を fs 対数解析空間の圏、 (set) を集合の圏とする。  $n \geq 3$  とする。

#### 4.1 モジュライ関手 (その 1)

モジュライ関手  $\bar{\Phi}_{g,n}: (fs) \rightarrow (set)$  を次のように定義する。 fs 対数解析空間  $U$  に対して、

$$\bar{\Phi}_{g,n}(U) := \{(A, p, l); A \text{ は } g \text{ 次元主偏極 } p \text{ をもつ対数アーベル多様体}/U \text{ (cf. [6, 1.3.5]), } l \text{ はレベル構造 } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \rightarrow A[n] := \text{Ker}(n\text{-times: } A \rightarrow A)\}/ \cong$$

ここで level 構造とは、 pairing を保つ同型のことである。  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$  には、

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 2\pi i & (j - i = g \text{ のとき}) \\ -2\pi i & (i - j = g \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって symplectic 構造を入れる。  $A[n]$  には、

$$A[n] \times A[n] \xrightarrow{1 \times p} A[n] \times A^*[n] \xrightarrow[\text{pairing}]{\text{Weil}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$$

によって symplectic 構造を入れる。 ここで Weil pairing とは次のとおりである。

$A$  が local に  $\text{Hom}(X, \mathbb{G}_{m, \log}^{(Y)})/Y$  で表されるとき, 双対対数アーベル多様体  $A^*$  は  $\text{Hom}(Y, \mathbb{G}_{m, \log}^{(X)})/X$  (これは  $(Y, X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  から定まる商. ただし  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$  により定まる pairing) と定義され, Weil pairing は,  $[\varphi: X \rightarrow \mathbb{G}_{m, \log}] \in A[n]$ ,  $[\psi: Y \rightarrow \mathbb{G}_{m, \log}] \in A^*[n]$  に対して,  $\varphi(x)\psi(y)^{-1}$  と定める. ここで  $x, y$  は  $\psi^n = \langle \cdot, x \rangle$ ,  $\phi^n = \langle \cdot, y \rangle$  をみたす元である ([6, 4.4.2] 参照).

$\Phi_{g,n}$  を (従来の) アーベル多様体のモジュライ関手 (構造射が strict な対数アーベル多様体) とする. このとき, 自然な包含関係  $\Phi_{g,n} \subset \bar{\Phi}_{g,n}$  があり, 次が成り立つ.

**4.2 定理** ([6], Theorem 4.6.4, 4.6.5)  $\bar{D}_{g,n}$  を佐武-Baily-Borel コンパクト化に自明な対数構造を付けたものとする. このとき, 射  $\bar{\Phi}_{g,n} \rightarrow \bar{D}_{g,n}$  があり, 次をみताす.

(1) 任意の fs 対数点  $S$  に対して, 全単射  $\bar{\Phi}_{g,n}(S)/\sim \rightarrow \bar{D}_{g,n}(S)$  が誘導される. ここで同値関係  $\sim$  は対応する対数 Hodge 構造で述べることもできる (略. [6, 4.6.2] 参照).

(2) 任意のハウスドルフ fs 対数解析空間  $Q$  に対して, 上の射が誘導する  $\{\bar{D}_{g,n} \rightarrow Q\} \rightarrow \{\bar{\Phi}_{g,n} \rightarrow Q\}$  は functorial な全単射である.

多面錐分解を利用した Mumford コンパクト化に対しても同様の結果が得られる.

### 4.3 モジュライ関手 (その2)

$\bar{\Phi}_{g,n,\Sigma} \subset \bar{\Phi}_{g,n}$  は, fs 対数解析空間  $U$  に対して,  $\bar{\Phi}_{g,n}$  の  $U$  切断  $(A, p, l) \in \bar{\Phi}_{g,n}(U)$  のうち,  $A$  が  $\Sigma$  方向に局所モノドロミーをもつ切断に制限したものである. ここで,  $S$  上の対数アーベル多様体  $A$  が  $\Sigma$  方向に局所モノドロミーをもつとは, 各点  $s \in S$  のファイバー  $A_s$  が  $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  からくるとき, ある  $\sigma \in \Sigma$  が存在して, 任意の  $N \in \text{Hom}(M_{S,s}/\mathcal{O}_{S,s}^*, \mathbb{R}_{\geq 0})$  に対して,

$$(Y \times Y \xrightarrow{p \times 1} X \times Y \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} M_{S,s}^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{S,s}^* \xrightarrow{N} \mathbb{R}) \in \sigma$$

をみたすことである ([6, 4.1.6]).

**4.4 定理** (LA1, Theorem 4.1.7)  $\Sigma$  を  $B(\mathbb{Z}^g)_{\mathbb{R}}$  ( $g \times g$  半正定値実対称行列全体) の admissible cone decomposition とする. このとき,  $\bar{\Phi}_{g,n,\Sigma}$  はトロイダルコンパクト化  $\bar{D}_{g,n,\Sigma}$  (対数構造はアーベル多様体のモジュライ空間の補集合が定める因子に沿う対数構造とする) で表現される.

証明は, [9] に帰着する方法や直接証明がある (略. [6, 4.1.9, 4.5–4.7] 参照).

### 謝辞

対数幾何の研究を含め, 白井三平先生に度々励ましていただきました. また, 朝倉政典さんには, 講演や報告集に関して大変お世話になりました. 感謝申し上げます.

### 参考文献

- [1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y. Tai, Smooth compactification of locally symmetric varieties, Math. Sci. Press, Brookline, 1975.

- [2] V. Alexeev, Complete moduli in the presence of semiabelian group action, *Ann. of Math. (2)* 155 (2002), no. 3, 611–708.
- [3] V. Alexeev and I. Nakamura, Simplified Mumford construction, *Tohoku Math. J. (2)* 51 (1999) No. 3, 399–420.
- [4] G. Faltings and C. Chai, Degeneration of abelian varieties, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge·Band 22*, Springer-Verlag, Berlin.
- [5] K. Fujiwara, Arithmetic compactifications of Shimura varieties (I), preprint, 1990.
- [6] T. Kajiwara, K. Kato, and C. Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part I. Complex analytic theory, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 15 (2008), 69–193.
- [7] T. Kajiwara, K. Kato, C. Nakayama, Logarithmic abelian varieties. *Nagoya Math. J.* 189 (2008), 63–138.
- [8] T. Kajiwara, K. Kato and C. Nakayama, Analytic log Picard varieties, *Nagoya Math. J.*, vol. 191 (2008), 149–180.
- [9] K. Kato and S. Usui, *Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures*, Princeton Univ Press, 2008.
- [10] D. Mumford, An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, *Compositio math.* 24 (1972), 239–272.
- [11] I. Nakamura, Stability of degenerate abelian varieties, *Invent. Math.* 136 (1999), no. 3, 659–715.
- [12] Y. Namikawa, A new compactification of the Siegel space and degeneration of Abelian varieties. I, II, *Math. Ann.* 221 (1976), no. 2, 97–141, no. 3, 201–241.
- [13] Y. Namikawa, Toroidal degeneration of abelian varieties, II, *Math. Ann.* 245 (1979), 117–150.
- [14] Y. Namikawa, Toroidal compactification of Siegel spaces, *Lecture Notes in Math.* 812, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [15] M. C. Olsson, *Compactifying moduli spaces for abelian varieties*, SLNM 1958, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [16] P. Deligne and M. Rapoport, *Les schemas de modules de courbes elliptiques*, in *Modular functions of one variable, II*, Antwerp 1972 Preceedings, P. Deligne and W. Kuyk (eds.), *Lecture Notes in Math.* 349, 143–316. Berlin: Springer-Verlag 1973.

kajiwara@ynu.ac.jp  
Department of Applied Mathematics  
Faculty of Engineering  
Yokohama National University  
Yokohama, 240-8501  
JAPAN