

衝突現象を扱うモデル方程式と その数値計算法

金沢大学・自然科学研究科 風間 正喜 (Masaki Kazama)
Graduate School of Natural Science and Technology,
Kanazawa University

1 はじめに

本研究では、ゴムボールが平面にぶつかり、跳ね返る現象に代表される衝突現象に着目する。ゴムボールの運動では、ゴムボールは自身の持つ弾性の他に内部の空気からの影響を受けると考えられる。さらに衝突時には熱エネルギーに変換されるなど、様々な理由でエネルギーを失う。これらの影響を考慮したモデル方程式を開発し、その数値計算を行う。今回、ゴムボールを気体を密閉した弾性体の殻と考え、内部の気体は非常に軽く、内部の流体の慣性力は無視できるとするモデル化を行った。

弾性体の殻のモデルは、過去に多く研究がなされている [12]。近年では赤血球の形状を記述するモデルとして、内部の体積を保存する非伸縮性の弾性体リングの研究 [11][5] や、座屈不安定性に対する研究 [7] 等がある。これらの研究は静解析が主である。ゴムボールの衝突解析では主に実験による研究がなされている [8][6][10]。本研究ではこれらの衝突解析への理論的なアプローチとして、衝突現象を表現する数理モデルの作成とその数値計算を行う。

衝突現象では接触面による自由境界が発生し、自由境界の動きが本質的な問題となる。数値計算を行う場合、自由境界の運動を追跡することが困難となる。この種の自由境界問題の研究については S. Omata, H. Yoshiuchi 等 [4][9] が行っている。これらの研究では、膜が平面に接触し、剥がれる現象のモデルとして、スカラー関数で表された弾性体の膜が反発係数 0 で平面に接触する問題を扱っている。変分原理を元にした離散勾配流法 [2] による数値計算により、自由境界の運動が捉えられている [9]。本研究では [9] の研究を出発点として、離散勾配流法を用いることで、従来の手法では困難であった自由境界や拘束条件を含む運動の数値解析を行った。

本稿では、まずはじめに、弾性体リングの衝突現象を表すモデル方程式を導出する。その後、数値計算方法を解説し、最後に数値計算結果を示す。

2 モデル方程式

今回は簡単のため2次元の現象のみを扱うこととする。本節では、弾性体の殻の断面のような弾性体のリングの運動方程式の導出を行う。2次元カーテシアン座標におかれた弾性体リングを考える。y方向を鉛直上向き方向にとり、 $y = 0$ の平面を障害物とする。また弾性体リングは十分に薄いため、中心線のみで形状を記述できるとする。

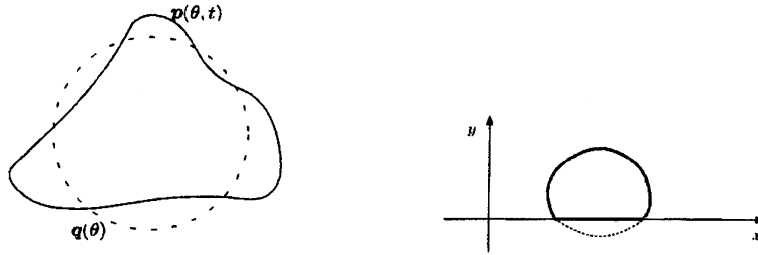


図 1: 弾性体リングの表記

弾性体リングの中心線の位置ベクトルを $\mathbf{p}(\theta, t) = (p_x(\theta, t), p_y(\theta, t))$ とし、 θ が増える方向に反時計回りでリングの形状を表現する(図1)。パラメータ θ の範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で、 $\theta = 0, \theta = 2\pi$ では周期境界条件を課す。

平面との衝突がない場合、弾性体リングの運動はニュートンの運動方程式に従うとし、平面と衝突した場合は、運動方程式の解について $p_y < 0$ となった部分を切り取った形状を弾性体リングと考える [9]。

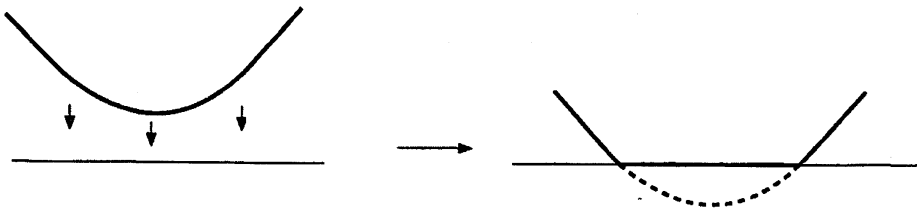


図 2: 障害物に対して衝突した場合

また、リングの安定な形状を $\mathbf{q}(\theta)$ とする。今回は半径 R_0 の円 ($\mathbf{q} = R_0(\cos \theta, \sin \theta)$) のみを考えることとする。 θ までの弧長を $s(\theta)$ で表すと

$$s(\theta) = \int_0^\theta |\mathbf{p}_\theta| d\theta \quad (1)$$

である. 全長は $l = s(2\pi)$ となる. そして, 弾性体の線密度はパラメータ θ に対して一定値 σ_0 とする.

運動方程式を導出するために, 弾性体リングの変形により蓄えられるエネルギーについて考察する. 今, リングの微小部分 (長さ Δs) を切り取り, 図3の様にリングの接方向と法方向に沿い, リングの中心線が $n = 0$ を通る座標系を設置する.

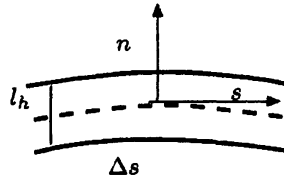


図 3: 弾性体リングの微小要素

ここで l_h はリングの厚さで $l_h \ll R_0$ である. 接線方向の伸縮成分の歪みテンソルを u_{ss} と書くと

$$\sqrt{1 + 2u_{ss}} - 1 \simeq u_{ss} = \frac{\Delta s - \Delta s_0}{\Delta s_0} = \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0}$$

である. Δs_0 は伸縮がないときの中心線の長さ, $\gamma = |\mathbf{p}_\theta|$, $\gamma_0 = |\mathbf{q}_\theta| = R_0$ である. 弾性体リングは薄いため, 法線方向には一様な構造を持つと考えられる. そのため応力テンソルは接線方向の伸縮を表す成分のみが非零となる. さらに, 応力テンソルはフックの法則に従うと仮定すると, 微小部分の弾性エネルギー e は歪みテンソル u_{ss} から

$$e = \frac{l_h k}{2} u_{ss}^2 \Delta s_0$$

と書くことができる. ここで k は弾性係数である. e を積分した, E_d がリングの弾性エネルギーである.

$$E_d = \frac{l_h k}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \right)^2 \gamma_0 d\theta = \frac{l_h k}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{|\mathbf{p}_\theta| - R_0}{R_0} \right)^2 R_0 d\theta. \quad (2)$$

弾性体リングが中心線の伸縮を伴わずに曲がるとき, 弾性エネルギー (2) の値は変わらないが, 実際には弾性体リングが僅かに厚さを持つことにより, 中心線より上の部分は引っ張られ, 下の部分は縮むため, 曲がっ

た場合にも弾性エネルギーが発生する。従って、リングの弯曲の影響による弾性エネルギーを以下のように導入する。

今、 $n=0$ の位置にある長さ微小線素 ds が曲げられ、その曲率半径が R になったとすると、中心線より法線外向き方向に n だけずれた位置にある微小線素 $\Delta s(n)$ の長さは

$$\Delta s(n) = \left(\frac{R+n}{R} \right) ds$$

となる。

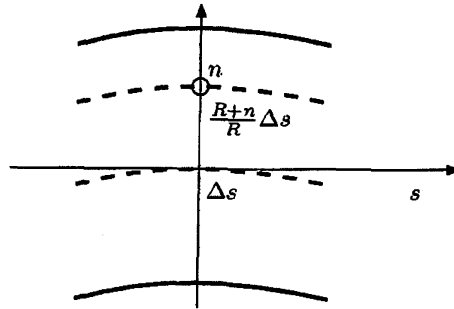


図 4: 弯曲に対する伸び

安定な形状の曲率半径は R_0 であるので、 $\Delta s_0(n) = \frac{R_0+n}{R_0} ds$ となることより、線素の相対伸びは

$$u_{ss}(n) = \frac{\Delta s(n) - \Delta s_0(n)}{\Delta s_0(n)} = \frac{RR_0n}{R(R_0+n)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \simeq n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

である。弾性エネルギーは線素の相対伸びの 2 乗で定義されるため、曲がった場合の相対伸びの 2 乗をリングの厚さ方向に積分した量

$$\begin{aligned} W &= \int_0^l \int_{-\frac{l_h}{2}}^{\frac{l_h}{2}} \frac{k}{2} u_{ss}^2 dn ds \\ &= \frac{l_h^3 k}{12} \int_0^l (\kappa - \kappa_0)^2 ds = \frac{l_h^3 k}{12} \int_0^{2\pi} (\kappa - \kappa_0)^2 |\mathbf{p}_\theta| d\theta \end{aligned}$$

を弯曲により蓄えられる弾性エネルギーとする。ここで $\kappa(\theta) = 1/R$ は弾性体リングの曲率で

$$\kappa(\theta) = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial s^2} \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{p}_{\theta\theta} \cdot A \mathbf{p}_\theta}{|\mathbf{p}_\theta|^3} \quad (3)$$

である. $\nu = \frac{A\mathbf{p}_\theta}{|\mathbf{p}_\theta|}$ は内向き単位法線ベクトル, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ はベクトルを $\frac{\pi}{2}$ 回転させる行列, $\kappa_0 = 1/R_0$ は初期形状の曲率である. $k_s = k, k_c = l_h^2 k/6$ と改めておき直すと, 全弾性エネルギー E_{el} は結局

$$E_{el} = \frac{k_c}{2} \int_0^{2\pi} l_h (\kappa - \kappa_0)^2 |\mathbf{p}_\theta| d\theta + \frac{k_s}{2} \int_0^{2\pi} l_h \left(\frac{\gamma - R_0}{R_0} \right)^2 R_0 d\theta \quad (4)$$

となる.

運動エネルギー K は

$$K = \sigma_0 R_0 \int_0^{2\pi} l_h \chi_{p_y > 0} \frac{|\mathbf{p}_t|^2}{2} d\theta \quad (5)$$

と計算する. ここで $\chi_{p_y > 0}$ は集合 $\{(\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (0, T) : p_y(\theta, t) > 0\}$ に対する特性関数である. これは平面と接触した部分は運動エネルギーが全て失うことを意味していると考えられる. すなわち, 平面と弾性体の微小部分の反発係数を 0, 摩擦を無限大と仮定したことを表している.

リング内部に満たされている気体のエネルギーとして

$$U = -c_v \left(1 + \log \left(\frac{V}{V_0} \right) \right) + \frac{V}{V_0} \quad (6)$$

の形式を用いる. ここで c_v は内部の気体の物性値 (気体の全質量 \times 音速の 2 乗), V_0 は安定な状態での弾性体リングの内の体積である. V は内部の気体の体積で

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \chi_{p_y > 0} \mathbf{p} \cdot A \mathbf{p}_\theta d\theta \quad (7)$$

である. エネルギー (6) は, 内部の気体に対して慣性項を無視し, 僅かに圧縮する流体の方程式の圧力と密度の関係式

$$P - P_0 = c^2(\rho - \rho_0)$$

を用いた場合の圧力による仕事を表す. P, ρ は内部の気体の圧力, 密度, ρ_0 は内部の気体の圧力が P_0 のときの密度, c は音速である.

エネルギー (4)(5)(6) から, 作用積分 I を

$$I = \int_0^T (E_{el} - K + U) dt \quad (8)$$

と構成し、平面と接触していない部分について I の第 1 変分を取る.

$$\left. \frac{dI(\mathbf{p} + \delta\phi)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = 0 \quad \phi \in C_0^\infty((0, 2\pi) \times (0, T) \cap \{p_y > 0\}).$$

上式の計算により弾性体リングの運動方程式が導出される.

$$\begin{aligned} \sigma_0 \mathbf{p}_{tt} = & -k_c r \left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \frac{1}{2R_0^2} \kappa \right) \boldsymbol{\nu} \\ & + k_s r (\kappa \boldsymbol{\nu} + r_s \boldsymbol{\tau}) - c_v r \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right) \boldsymbol{\nu} \quad (9) \\ & (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (0, T) \cap \{p_y > 0\}. \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{p}_\theta}{|\mathbf{p}_\theta|}$ は接線方向単位ベクトル, $\hat{\mathbf{y}} = (0, 1)$ は y 方向単位ベクトル, $r = \frac{|\mathbf{p}_\theta|}{|q_\theta|}$ である. 式 (9) は平面との接触していない部分が満たす運動方程式である. 平面と接触している部分については, 直線で補間されるとする. 具体的には, 時刻 t_c で平面との接触点のパラメータを θ_1, θ_2 とすると ($p_x(\theta_1, t_c) < p_x(\theta_2, t_c)$, $p_y(\theta_1, t_c) = p_y(\theta_2, t_c) = 0$), その部分は

$$p_x = \frac{p_x(\theta_2, t_c) - p_x(\theta_1, t_c)}{\theta_2 - \theta_1} \theta + p_x(\theta_1, t_c), \quad p_y = 0, \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2) \quad (10)$$

となるようにする. 式 (10) は

$$-k_c r \left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \frac{1}{2R_0^2} \kappa \right) \boldsymbol{\nu} + k_s r (\kappa \boldsymbol{\nu} + r_s \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (11)$$

の解として選んだ.

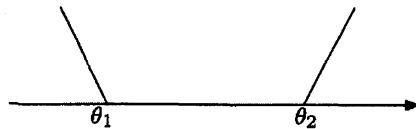


図 5: 平面と接触する部分

式 (9)(10) から, 以下の方程式が弾性体リングの衝突を表現できるモデ

ル方程式となると期待される.

$$\begin{aligned} \chi_{p_y > 0} \sigma_0 \mathbf{p}_{tt} &= -k_c r \left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \frac{1}{2R_0^2} \kappa \right) \boldsymbol{\nu} \\ &\quad + k_s r (\kappa \boldsymbol{\nu} + r_s \boldsymbol{\tau}) - r \chi_{p_y > 0} \left(\frac{c_v}{V} - P_0 \right) \boldsymbol{\nu} \quad (12) \\ &\quad (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (0, T). \end{aligned}$$

式(12)は平面より上にある部分では式(9)となり, 平面と接触している部分では方程式は式(11)となる. 平面に接触している部分の形式は様々あると考えられるが, 今のところ式(11)のような簡単なものとする.

さらに内部の気体が非圧縮である場合を考え, 弾性体リング $\mathbf{p}(\theta, t)$ の内部の体積が一定という拘束条件の下での運動方程式を導出する.

$$\begin{aligned} \sigma_0 \mathbf{p}_{tt} &= -k_c r \left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \frac{1}{2R_0^2} \kappa \right) \boldsymbol{\nu} + k_s r (\kappa \boldsymbol{\nu} + r_s \boldsymbol{\tau}) - r \lambda \boldsymbol{\nu}, \quad (13) \\ \lambda &= \frac{1}{2V} \oint \chi_{p_y > 0} \frac{\sigma_0}{r} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_{tt} ds \\ &\quad + \frac{1}{2V} \oint \left(\frac{k_c}{2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{R_0^2} \right) - k_s r (r - 1) \right) ds. \end{aligned}$$

ここで λ は体積保存条件によるラグランジュ未定乗数である. 式(9)と式(13)の違いは, 式(13)の右辺の圧力による力の項がラグランジュ未定乗数項に変わっている事のみである. λ はリングの体積が一定になるように決められている.

式(13)は, 体積(7)が一定という拘束条件の下での I の第1変分を取ることによって導出される.

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI(\mathbf{p}^\delta)}{d\delta} \right|_{\delta=0} &= 0, \\ \mathbf{p}^\delta &= \sqrt{\frac{V}{V - \delta\Phi_1 - \delta^2\Phi_2}} (\mathbf{p} - \delta\boldsymbol{\phi}), \\ \Phi_1 &= \int_0^{2\pi} \chi_{p_y > 0} A \mathbf{p}_\theta \cdot \boldsymbol{\phi} d\theta, \\ \Phi_2 &= \int_0^{2\pi} \chi_{p_y > 0} A \boldsymbol{\phi}_\theta \cdot \boldsymbol{\phi} d\theta \quad \boldsymbol{\phi} \in C_0^\infty((0, 2\pi) \cap \{p_y > 0\} \times (0, T)). \end{aligned}$$

平面と接している部分を同様に直線(10)で補間することを考えると, 同様の考察により, 以下の方程式が衝突現象を表すモデル方程式として期待される.

$$\chi_{p_y > 0} \sigma_0 \mathbf{p}_{tt} = -k_c r \left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \frac{1}{2R_0^2} \kappa \right) \boldsymbol{\nu} + k_s r (\kappa \boldsymbol{\nu} + r_s \boldsymbol{\tau}) - r \lambda \boldsymbol{\nu}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{1}{2V} \oint \chi_{p_y > 0} \frac{\sigma_0}{r} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_{tt} ds \\ & + \frac{1}{2V} \oint \left(\frac{k_c}{2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{R_0^2} \right) - k_s r (r - 1) \right) ds. \end{aligned}$$

3 数値計算方法

この節では式(14)に対する数値解法について説明するが、式(12)も同様の方法で数値計算できる。方程式(14)を解く数値解法として変分法に基づいた離散勾配流法を用いる。離散勾配流法では、時間区間(0, T)をN等分し、各時刻 $n = 1, 2, \dots, N$ について以下の汎関数を定義する。

$$\begin{aligned} J_n(\mathbf{p}) = & \sigma_0 R_0 \int_0^{2\pi} \chi_{p_y > 0} \frac{|\mathbf{p} - 2\mathbf{p}^{n-1} + \mathbf{p}^{n-2}|^2}{2h^2} d\theta \\ & + W(\mathbf{p}) + E(\mathbf{p}) + U(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (15)$$

ここで $h = T/N$ は時間幅、 $\mathbf{p}^{n-1}, \mathbf{p}^{n-2}$ はそれぞれ J_{n-1}, J_{n-2} の最小化関数である。各時間ステップ n 毎に、 J_n の最小化関数を体積保存条件と障害物を通り抜けない条件 $p_y > 0$ を満たす関数の中から探索する問題を扱う。

最小化関数は以下の方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \sigma_0 \frac{\mathbf{p} - 2\mathbf{p}^{n-1} + \mathbf{p}^{n-2}}{h^2} = & -k_c r \left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \frac{1}{2R_0^2} \kappa \right) \boldsymbol{\nu} \\ & + k_s r (\kappa \boldsymbol{\nu} + r_s \boldsymbol{\tau}) - r \lambda \boldsymbol{\nu}, \quad (16) \\ \lambda = & \frac{1}{2V} \oint \chi_{p_y > 0} \frac{\sigma_0}{r} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\mathbf{p} - 2\mathbf{p}^{n-1} + \mathbf{p}^{n-2}}{h^2} \right) ds \\ & + \frac{1}{2V} \oint \chi_{p_y > 0} \left(\frac{k_c}{2} (\kappa^2 - 1) - k_s r (r - 1) \right) ds. \end{aligned}$$

式(16)は式(14)の時間微分項を差分化した形式となっている。離散勾配流法では、このように最小化問題の解として差分方程式の解を求める。最小化関数の探索法には最急降下法を用いる。

この方法では、ラグランジュ未定乗数を計算しなくてすむこと、自由境界の運動や非線型方程式(16)を、自然に陰的に解くことができることな

どの利点がある。最小化関数を探索するアルゴリズムは以下のようである。各時間ステップ n について、

(a) $i = 1, \dots, Q$ に対して:

- i. $\mathbf{f}^i = \nabla_{\mathbf{p}} J_n(\mathbf{p}^{n_i})$ を計算する。
- ii. $-\mathbf{f}^i$ 方向で J_n を最小にする関数を2分法により求める。見つかった関数を $\hat{\mathbf{p}}^{n_{i+1}}$ とする。
- iii. 障害物を通り抜けた部分を切り取る:

$$\hat{\mathbf{p}}^{n_{i+1}} = \left(p_x^{n-1} - \frac{\hat{p}_y^{n_{i+1}} - p_y^{n-1}}{\hat{p}_y^{n_{i+1}} - p_y^{n-1}} (\hat{p}_x^{n_{i+1}} - p_x^{n-1}), \max\{\hat{p}_y^{n_{i+1}}, 0\} \right).$$
- iv. 方程式(14)を解く場合は体積保存条件を満たすように以下の計算を行う:

$$\mathbf{p}^{n_{i+1}} = \hat{\mathbf{p}}^{n_{i+1}} + \alpha A \hat{\mathbf{p}}^{n_{i+1}}.$$
ここで、 α は体積保存条件を満たすように決められる。

(b) $i = Q$ で収束条件を満たしたとする: $\mathbf{p}^n = \mathbf{p}^{n_Q}$.

と計算することで、体積保存条件を満たし、障害物を通過しない最小化関数の探索を行う。

4 計算結果

本節では、初期に安定な状態の弾性体リングが床に衝突し、跳ね返る現象の数値計算結果を紹介する。

衝突現象では、弾性体リングの曲がりに対する応力が効果的な現象であると考えられるため、方程式(12)の曲がりに対する応力項による特徴的な時間スケールを用いて無次元化を行う。弾性係数では $k_c = k_s l_h^2 / 6$ との関係があるため、特徴的な時間スケール T として

$$T = \frac{R^2}{l_h} \sqrt{\frac{6\sigma_0}{k}}$$

を選ぶ。安定な状態の半径 R を特徴的な長さスケールとして無次元化を行うと方程式(12)は

$$\begin{aligned} \chi_{p_y > 0} \mathbf{p}_{tt} = & -|\mathbf{p}_\theta| \left(\kappa_{ss} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \frac{1}{2} \kappa \right) \boldsymbol{\nu} \\ & + Q_s |\mathbf{p}_\theta| (\kappa \boldsymbol{\nu} + r_s \boldsymbol{\tau}) - \chi_{p_y > 0} |\mathbf{p}_\theta| Q_r \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{\pi^2} \right) \boldsymbol{\nu} \quad (17) \end{aligned}$$

となる. ここで, $Q_s = 6R^2/l_h^2$, $Q_r = 6c_v/(k_s l_h)$ である.

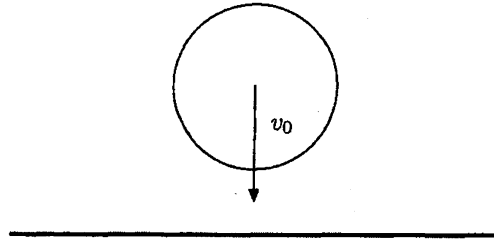


図 6: 速度 v_0 で平面にぶつける

初速度 v_0 を与え, 平面に弾性体リングをぶつける現象の数値計算を行う. 初速度は特徴的な速度スケール $V = R/T$ に比べて v_0 倍という意味となる.

以下の図は $Q_s = 15000$, $Q_r = 0$ とし, 初速度 $v_0 = 2$, 分点数を $M = 256$ とした場合の数値計算結果である.

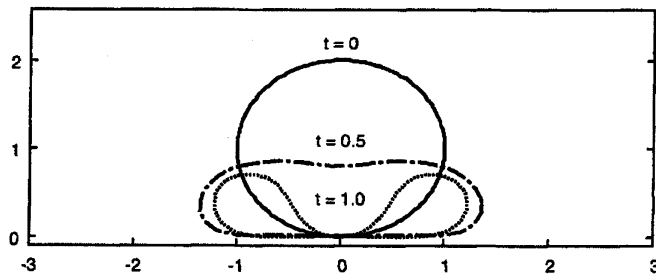


図 7: 衝突から重心が静止するまで

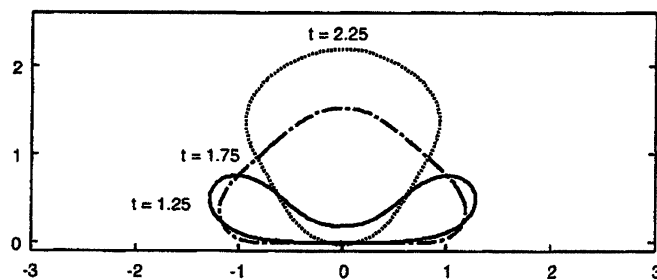
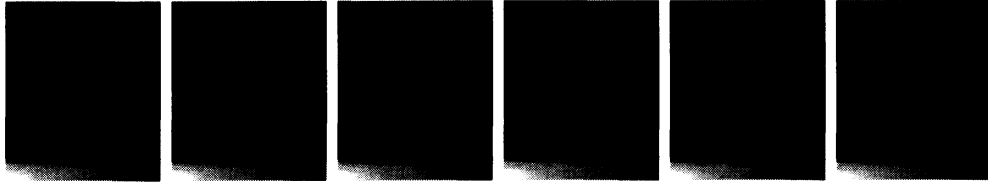


図 8: 平面から剥がれるまで

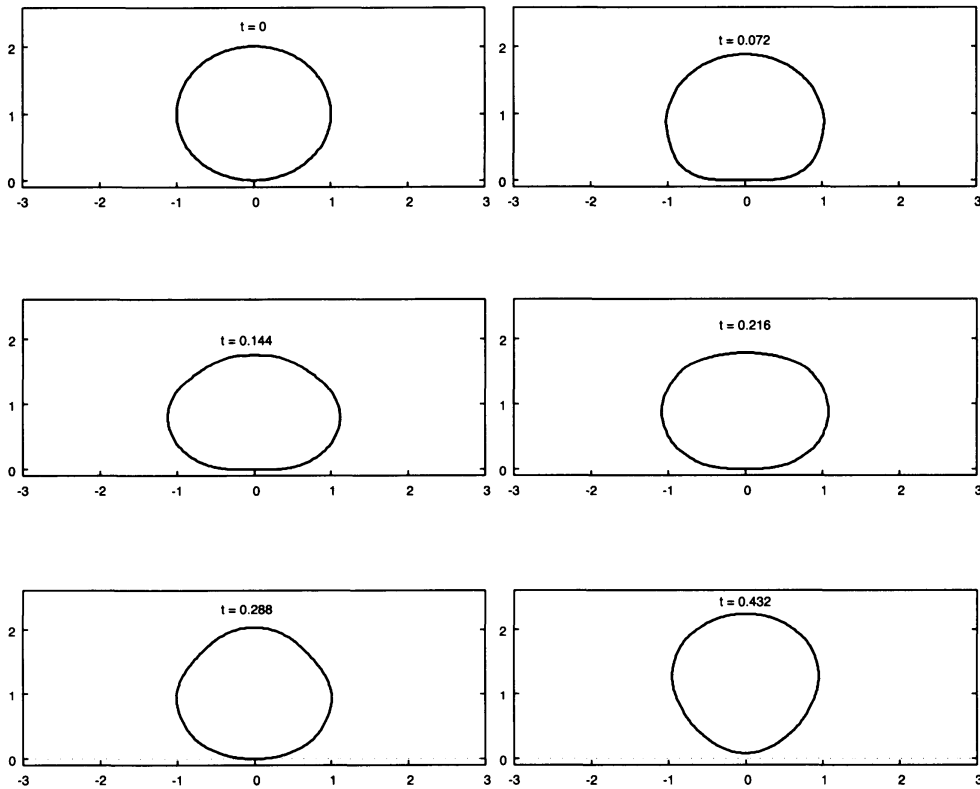
時刻 0 で平面に接触し時刻 1.0 で重心の運動はほぼ静止する。その後、
図 8 のような形状で跳ね返る。

以下にゴム輪の実験結果を示す。

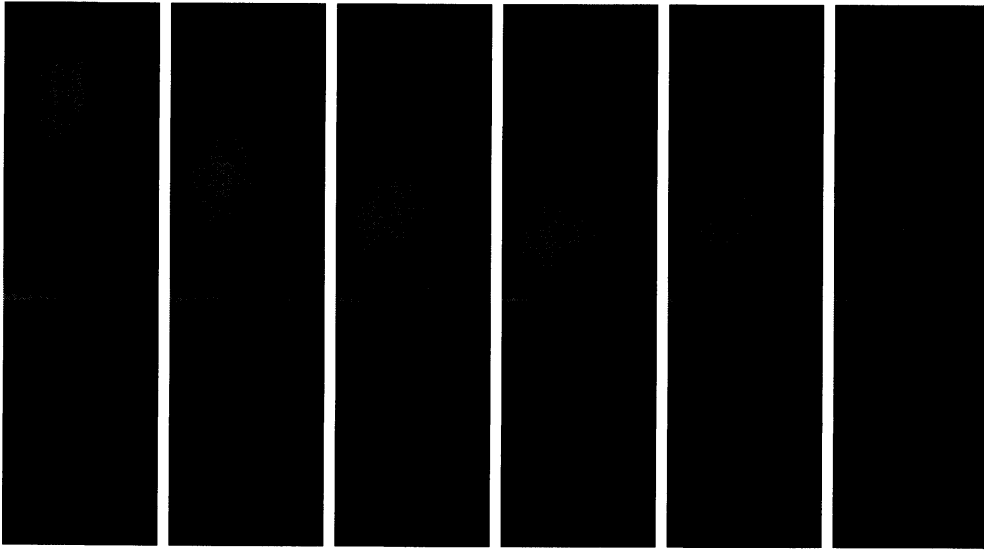


衝突から跳ね返る様子は図 7.8 と定性的にはよく似ている。

以下の図は同様のパラメータでの体積保存条件付きの弾性体リングの
衝突である。



$Q_r = 0$ の場合と比べると短い時間で反発する。



この状況は内部の空気が密閉された状況で(さらに音速が無限大), ゴムボール等の衝突現象のモデルへの応用が考えられる.

以下の図は $v_0 = 16$ として, Q_r を変化させ計算した結果である.

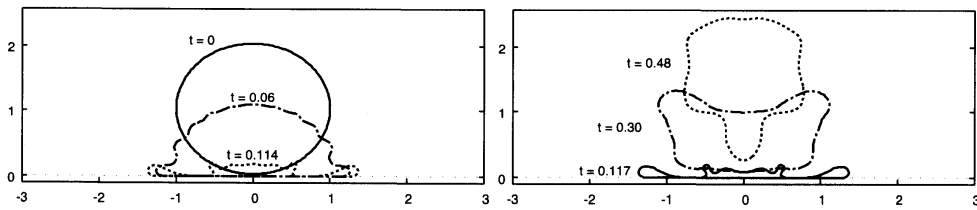


図 9: $Q_r = 0$ の場合

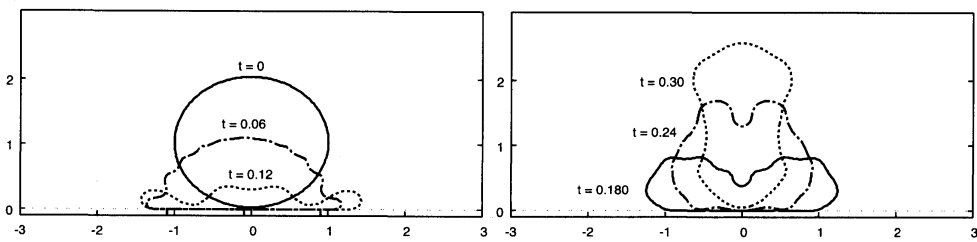


図 10: $Q_r = 384$ の場合

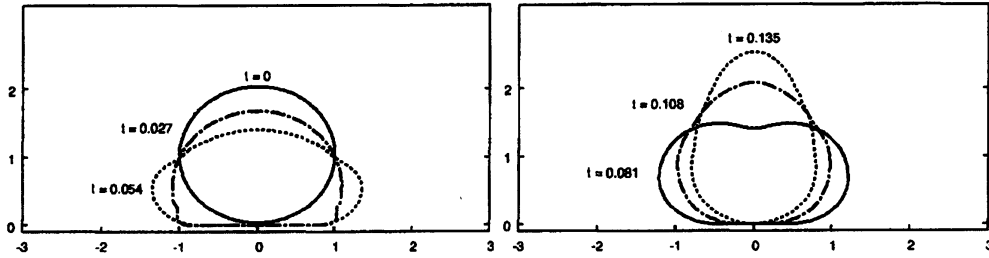


図 11: $Q_r = 98304$ の場合

以下に Q_r を変化させた際の衝突特性の変化を示す. 図 12-14 はそれぞれ反発係数, 衝突時間, エネルギー減衰率と Q_r との関係を表したものである. 反発係数は衝突後の重心の速度を v とすると $|v/v_0|$, 衝突時間は平面に接触してから平面から離れるまでの時間, エネルギー減衰率は衝突前のエネルギーを E_0 , 衝突後のエネルギーを E とすると $|E/E_0|$ と定義する. 破線は体積保存条件をつけた場合の値である. これらの量では Q_r が増加すると体積保存条件がついた場合の値に収束する傾向が見られた. このことから体積保存条件を付加した場合は, Q_r を無限大とした極限であると期待できる.

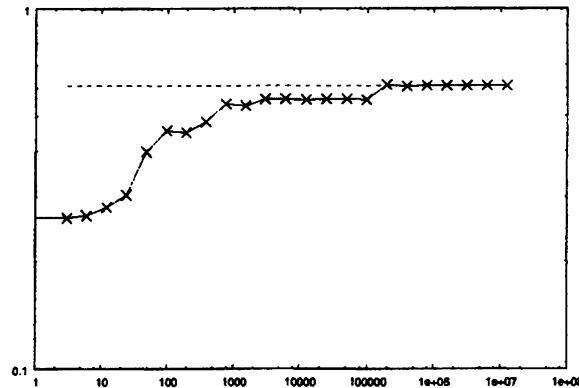


図 12: 横軸: Q_r , 縦軸:反発係数

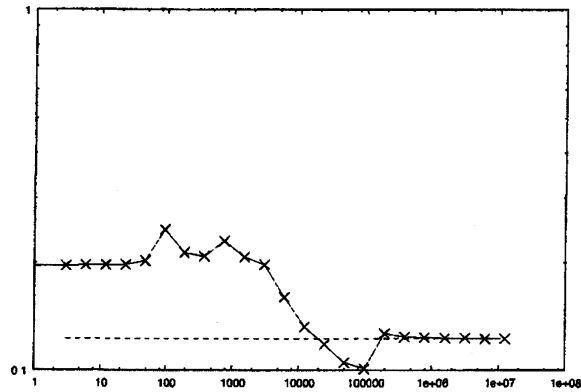


図 13: 横軸: Q_r , 縦軸:衝突時間

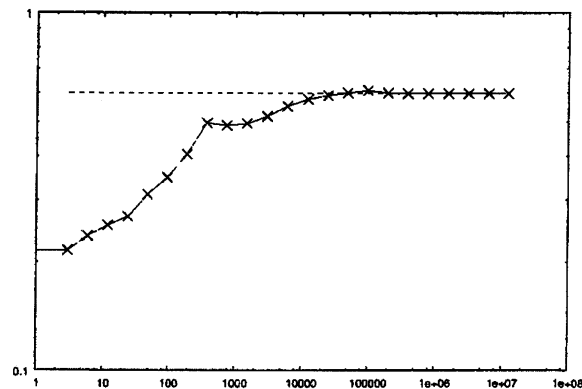


図 14: 横軸: Q_r , 縦軸:エネルギー減衰率

5 まとめ

ゴムボールが跳ね返る現象等に代表される, 衝突現象を表すモデル方程式を開発した. 内部の空気圧による影響のモデルとして, 内部の気体を僅かに圧縮する流体の圧力を採用し, さらに音速無限大の極限では, 内部の体積を一定にするという拘束条件で表現した. 数値計算結果により, このモデルにより弾性体リングが平面に衝突し, 跳ね返る現象を表現できると期待される. しかしながら, 本研究での結果は実際の現象との比較が不十分である. 今後の課題はモデル方程式の正当性を確かめるために実際の現象との比較を行うこと, 3次元のモデル方程式の数値計算を行うことである. また内部の気体の圧力に対するモデルの正当性についても検討す

る必要がある。本研究の発展として、弾性体リングの内部の構造を考慮し、それらを連成させることにより内部構造を持つ物体の衝突モデルへの応用などが考えられる。

参考文献

- [1] K. Kikuchi, S. Omata, *A free boundary problem for a one dimensional hyperbolic equation*, Adv. Math. Sci. Appl., **9** No. 2 (1999), pp. 775-786.
- [2] N. Kikuchi, *An approach to the construction of Morse flows for variational functionals*, in: J.-M. Coron, J.-M. Ghidaglia, F. Hélein (Eds.), *Nematics—Mathematical and Physical Aspects*, in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1991, pp. 195–198.
- [3] S. Omata, *A numerical method based on the discrete Morse semi flow related to parabolic and hyperbolic equation*, Nonlinear Analysis, **30** No.4 (1997), pp. 2181–2187.
- [4] S. Omata, *A numerical treatment of film motion with free boundary*, Adv. Math. Sci. Appl., **14** (2004), pp. 129-137.
- [5] T. Nagasawa, I. Takagi, *Bifurcating critical points of bending energy under constraints related to the shape of red blood cells*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (2003) pp. 63-111.
- [6] M. Hubbard, W. J. Stronge, *Bounce of hollow balls on flat surfaces*, Sports Engineering **4** (2001), pp. 46-61
- [7] E. Katifori, S. Alben, D. R. Nelson, *Collapse and folding of pressurized rings in two dimensions*, Phys. Rev. E **79** 056604 (2009).
- [8] S. R. Goodwill, R. Kirk, S. J. Haake, *Experimental and finite element analysis of a tennis ball impact on a rigid surface*, Sports Engineering **8** (2005), pp. 145-158

- [9] H. Yoshiuchi, S. Omata, K. Švadlenka, K. Ohara, *Numerical solution of film vibration with obstacle*, Adv. Math. Sci. Appl., **16** No. 1 (2006), pp. 33-43.
- [10] W. J. Stronge, A. D. C. Ashcroft, *Oblique impact of inflated balls at large deflections*, International Journal of Impact Engineering **34** (2007), pp. 1003-1019
- [11] S. Okabe, *The Motion of Elastic Planar Closed Curves under the Area-preserving Condition*, Indiana Univ. Math. J. **56**(4) (2007) pp. 1871-1912.
- [12] J. Langer, D. A. Singer *The total squared curvature of closed curves*, J. Diff. Geom. **30** (1984), pp. 1-22