数理解析研究所講究録
第1749巻2011年16-29

黎明期の変分力学
——モーペルテュイ，オイラー，ラグランジュと最小作用の原理——[1]

日本学術振興会特別研究員 PD（京都大学大学院文学研究科）
有賀暢迪（Nobumichi ARIGA）
JSPS Research Fellow (Graduate School of Letters, Kyoto University)

はじめに

近代的な変分力学の始まりを何か一つの出版物に求めるとすれば，それにもっともふさわしいのは，ラグランジュ（Joseph Louis Lagrange, 1736–1813）がトリノ科学協会の紀要（1760–61年度）に発表した一編の論文であろう．これに先立つもう一つの論文で δ 記号を用いた変分法を導入したのに続き（Lagrange 1760–61a），ラグランジュはこの論文で，力学の「一般原理」を次のように定式化した（Lagrange 1760–61b, p. 195/365）[2].

> 何らかの仕方で互いに作用している好きなだけ多くの物体 $M, M', M'', \ldots$ があるとし，それらはさらに，望むのであれば，距離の任意の関数に比例する中心力によって動かされているとする．$s, s', s'', \ldots$ はこれらの物体の時間 t での通過距離を指し示すものとし，また $u, u', u'', \ldots$ はこの時間の終わりにおけるそれらの速度であるとすると，式 $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \cdots$ はつねに最大，または最小となる．

ここで述べられている（古典的な意味での）最小作用の原理こそ，変分原理が δ 記号を用いて提示された歴史上最初のものであった．今日でこそ「最小作用の原理」という言葉は $\delta\int Ldt = 0$（L: ラグランジアン）という式（ハミルトンの原理）を指すのが一般的だが，今日の変分力学の出発点となったのはむしろ上のような内容の原理である．本稿では，この最小作用の原理がラグランジュによって定式化されるまでの経緯，言わば最小作用の原理の前近代史を概観する．

ところで，最小作用の原理の歴史を語る上では，ラグランジュのほかにあと二人，欠かせない登場人物がいる．フランス人の学者モーペルテュイ（Pierre-Louis Moreau de Maupertuis,

---

[1] 本稿は，主として有賀 2006；2007；2009 に基づいて，新たに書き下ろしたものである．なお，内容の一部には，（独）日本学術振興会科学研究費補助金（特別研究員奨励費「十八世紀中葉における力学理論の形成過程の解明」）による研究成果が含まれている．

[2] 以下，原典からの引用に当たっては，初出誌等におけるページ数と著作集などでのページ数を "/" で区切って併記する．また，数式の表記や強調などは特に断らない限り，原文を踏襲する．以下も同様である．

1698–1759）と，スイス出身の数学者オイラー（Leonhard Euler, 1707–1783）である．伝統的には，最小作用の原理の形成に対するこの三人の貢献は，一種の直線的な発展として捉えられてきた．たとえば十九世紀末に『力学』を著して力学の歴史と哲学を論じたマッハによれば，最小作用の原理を最初に述べたとされるモーペルテュイの表現は「あいまい」で「不明晰」なものであり，オイラーが「それを真に有用な新しい原理とした」とされる．ラグランジュについては，オイラーが一つの物体の運動を論じたのに対し，「最小作用の原理をいくつかの質量の系へ拡張し」たと評価されている（Mach 2006, 下巻 130–131 頁，233 頁，152 頁）．これに類した記述は，ほかの物理学史，力学史の古典にも見られるものである（たとえば広重 1968, I, 111–116 頁；Dugas 1988, pp. 254–275）．

こうした見方にはいくらかの真理が含まれていないわけでもないが，ここ数十年ほどのあいだになされた歴史研究の成果を踏まえると，少し違ったイメージが立ち現われてくる（たとえば Pulte 1989；Boudri 2002, ch. 5, 7；Panza 1995；2003）．モーペルテュイとオイラーのあいだ，オイラーとラグランジュのあいだには，より根本的な相違があるように思えるのである．このことをなるべく明確にするために，以下では「三人は最小作用の原理を使って何をしようとしていたか」という観点から，モーペルテュイ，オイラー，ラグランジュの仕事を順に見ていくことにしたい．おそらくそこには，単なる理論の洗練という以上のものが認められるはずである．

1. モーペルテュイと，衝突の法則

モーペルテュイは主として二つの論文で，最小作用の原理を提唱した．最初，1744 年に光学現象（光の直進・反射・屈折）に即してこの原理を述べた後（Maupertuis 1744），1746 年には自然現象全般に関わる原理として改めて主張し直している．そこでのモーペルテュイの言明は次のようなものである（Maupertuis 1746, p. 290/298）．

> **自然において何らかの変化が起こるときには，その変化に必要な作用の量は，可能な限り少ない．**

ここで「**作用の量**とは，諸物体の質量とそれらの速度ならびにそれらが通過する距離の積である」とされているが，数式による定式化は与えられていない．また，「速度」や「距離」が具体的には何を指すのかについても詳しくは述べられていない．その意味で，この原理が「自然科学・数理科学の法則としての必要最小限要求される概念規定の一義性・厳密性を欠いている」（山本 1997, 250 頁）というのはその通りであろう．加えて，モーペルテュイのこ

の論文の趣旨は最小作用の原理を通じて神の存在証明を行うというものであり[3]，こうした形而上学的傾向もまた，マッハを始めとするモーペルテュイの低評価に少なからず影響しているように思われる．

しかしながらここで注意しておきたいのは，この 1746 年の論文において，上述の原理が具体的には何に使われているかという点である．上の言明を与えた後，モーペルテュイはあらゆる自然現象の基礎にある「基本法則」，具体的には「運動の法則」と「静止の法則」をこの原理から導き出そうとする．このうち「静止の法則」は，てこの重心（支点）を決定する規則であるが，後に『著作集』の改訂版（1756 年, Maupertuis 1965–1974）からこれに関する記述を削除していることなどから見ると，モーペルテュイはそれほど重きを置いていなかったのかもしれない．一方，「運動の法則」に関しては後々まで積極的に論じ続けることになるが，この「運動の法則」とは今日まず想像されるようなニュートンの三法則などではなかった．それが意味していたのは，物体の衝突の法則である．

モーペルテュイは，当時一般に「硬い物体」「弾性的な物体」と呼ばれていた二種類の物体について，衝突の法則を論じている（Maupertuis 1746, pp. 290–293/298–301）．これらはそれぞれ，現代の物理学で言う完全非弾性衝突および完全弾性衝突に相当するものである．たとえば質量 A, B を持つ二つの硬い物体が速度 a, b で衝突する場合には，まず，両物体は衝突後に等しい速度 x で（つまり一緒になって）運動するという前提が置かれる（これは硬い物体に関する当時の一般的な了解である）．するとこの場合，両物体の速度変化は $x-a$, $x-b$ である．さらにモーペルテュイは，物体 A, B は衝突前には単位時間で距離 a, b を進んだのに対し，衝突後にはこの距離が x になると考える．それゆえこの意味での距離の変化も同じ形の式 $x-a$, $x-b$ で表される．したがって上述の一般原理から，この場合の「変化に必要な作用の量」が，質量と速度変化と距離変化の積の総和として $A(x-a)^2 + B(x-b)^2$ で与えられる．これが最小であるということから，x に関する微分をとってそれをゼロに等しいと置くと，最終的に

$$x = \frac{Aa + Bb}{A + B} \tag{1}$$

となり，衝突の法則（衝突前後の速度の関係式）が得られたことになる．弾性的な物体の場合には，衝突後の速度をそれぞれ α, β とすると「変化に必要な作用の量」は $A(\alpha-a)^2 + B(\beta-b)^2$ となり，これが最小という条件と，衝突前後で二物体の相対的な速さが等しい（$\beta-\alpha = a-b$）という前提（これも当時一般に認められていた）から，

$$\alpha = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A + B}, \qquad \beta = \frac{2Aa - Ab + Bb}{A + B} \tag{2}$$

[3] この点についての詳細は，有賀 2009, 79–80 頁を参照されたい．

という結果が得られる.

こうした奇妙な議論を見て，モーペルテュイの最小作用の原理は「物体が衝突や屈折によってある点で瞬間的に向きを変えるような場合にしか使えず，通常見られるような連続的に変化する運動にたいしてはどう適用すればよいのか不明である」(山本 1997, 250 頁) と感じるのは，力学を学んだことのある者にとっては自然なことであろう．しかし問題はまさに，モーペルテュイにとって重要だったのがたとえば物体の落下運動のような現象ではなく，衝突の法則であったという点にある．つまりモーペルテュイにとっては，衝突の問題こそが力学ひいては自然学（物理学）の根幹であり，当時知られていた二種類の衝突の法則を単一の原理に包摂できるという点が重要だったのである.

実際，十年後に書かれた晩年の論文でモーペルテュイは「運動の諸法則」として六つの命題を挙げたが，それらはいずれも衝突の法則であった (Maupertuis 1756, p. 423)．具体的には，(1) 硬い物体では衝突後の速度が等しくなること，(2) 弾性的な物体では衝突前後で相対的な速さが変わらないこと，(3) 二つの物体の重心の運動は衝突前後で変わらないことがまず挙げられ，次いで，(4) デカルト（René Descartes, 1596–1650）の主張した運動の量の保存則と[4]，(5) ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716）の提唱した活力（運動エネルギー）保存則がそれぞれ，特定の場合にのみ成り立つ法則として述べられる．そうして最後に，硬い物体と弾性的な物体のいずれにも適用できるとして提示されるのが (6) 最小作用の原理であった．この「運動の諸法則」の一覧は，モーペルテュイにとって自分の提唱した原理がどのような意義を持っていたかをよく示している.

モーペルテュイが最小作用の原理を使って成し遂げようとしたのは，衝突法則の統一であった．同時代にダランベール（Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783）が評価したように，モーペルテュイは「これまで別々の法則を有していた弾性的な物体の衝突と硬い物体の衝突とを同じ法則に帰属させ」ることに成功し (Alembert 1751, p. 119)，これら二種類の物体の衝突法則を「初めてただ一つの同じ原理によって決定した」のである (Alembert 1754, p. 296)．こうした言葉が現代の我々にはほとんど意味不明なものに聞こえるとすれば，それはモーペルテュイの主張が曖昧なものであったからという以上に、問題関心の所在が現代とは大きく異なっていたからと言うべきであろう.

[4] 当時はベクトルの概念がなく，デカルトの運動の量は現代的に言えば質量と速さの積（運動量のスカラー）になる．そのため，ほとんどの衝突では保存されない.

2. オイラーと，「力学曲線」

最小作用の原理に関係するオイラーの研究は，モーペルテュイが最初の論文を公表した数ヵ月後に，『最大または最小の性質を有する曲線を見出す方法』と題された本の中で登場した（Euler 1744）．この本は，変分法（当時は「最大および最小の方法」などと呼ばれた）の歴史における一つの頂点と見なされるもので，今日変分法のオイラー方程式（あるいはオイラー＝ラグランジュ方程式）と呼ばれている公式が述べられたことで有名である（Goldstine 1980, ch. 2; Fraser 2005）．ただし，今日の変分法で用いられる δ 記号は後にラグランジュが導入したものであり，オイラーの本には登場しない．したがってオイラー方程式の導出法も，現代とはまったく違う幾何学的なものであったことを注意しておく[5]．

最小作用の原理はこの本の最後にある『付録２』で，オイラー方程式を投射体（実質的には質点）の運動の問題に応用するという形で論じられている（Euler 1744, pp. 311–320/298–308）．オイラーは，何らかの力を受けて運動する投射体の描く軌道は「同じ両端につながれたすべての線のうちで，$\int Mds\sqrt{v}$ が最小であるような，すなわち，M が一定なので，$\int ds\sqrt{v}$ が最小であるような性質のもの」であると主張する（Euler 1744, pp. 311–312/298）．ここでのオイラーの表記法では，M は物体の重さ，ds は軌道の線要素，v は速度を与える高さを表すので[6]，オイラーの与えている式は $\int muds$（m: 質量，u: 速度）と比例係数を除いて同じになり，したがってまたモーペルテュイの与えた作用の量の定義（質量と速度と距離の積）とも合致する．このためモーペルテュイは，オイラーの『付録２』が自分の仕事とは独立に，ダニエル・ベルヌーイ（Daniel Bernoulli, 1700–1782）に触発されてなされたものであったにもかかわらず（有賀 2009, 78–79 頁），これを自分の原理の「美しい応用」と呼ぶことができたのであった（Maupertuis 1746, p. 267/282）．

『付録２』では，$\int ds\sqrt{v}$ が最小という条件から，実際に投射体の軌道が計算されている．ここでは一定の重力による運動という簡単な例でオイラーの解法を見ることにしよう（Euler 1744, pp. 312–313/299–300）．図 1 において，投射体 M が下向きに一定の力を受けて $A \to M \to m$ のように運動するとし，物体に働く力を単位質量あたり g とする．以下ではオイラーに従って，座標を鉛直下向きに x, 水平右向きに y と取り，$p = dy/dx$ とおく．投射体の軌道は $\int ds\sqrt{v}$ が最小という条件から求められるが，この式に $dv = gdx$ という「オイラー

[5] 邦語文献では山本 1997, 254–256 頁に簡潔な解説があるので参照されたい．

[6] 速度を与える高さとはつまり，速度を直接物理量として取り扱う代わりに，物体を自由落下させたときにこの速度を獲得するような高さを用いるということである（その際，重力加速度は一定であると暗に前提されている）．こうしたオイラーの表記法については，伊藤 2006 に詳しい．

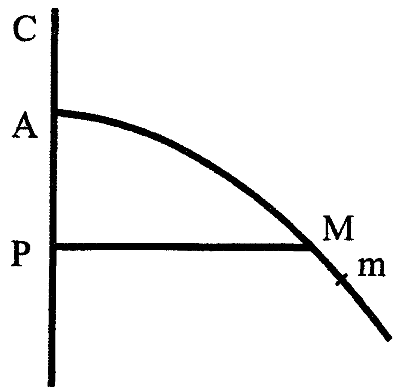

図 1　一定の重力による運動

の運動方程式」（伊藤 2006）から得られる関係 $v = a + gx$（a: 定数）と，$ds = dx\sqrt{1+pp}$ とを代入すれば，最小になるべき式は次のようになる[7].

$$\int dx\sqrt{(a+gx)(1+pp)}. \tag{3}$$

あとはこの式に変分法のオイラー方程式を適用すれば[8]，期待した通り，放物線を表す次の結果が得られる.

$$y = \frac{2}{g}\sqrt{C(a-C+gx)} \qquad (C\text{ は積分定数}). \tag{4}$$

こうしたオイラーの議論は，少なくとも今日の目からすると不十分なものに見える．というのは，オイラーがここで求めているのは物体の軌道だけであって，物理量の時間変化や保存については一切述べていないからである[9]．ところが，この一見奇妙な事態は，変分原理に関するオイラーのほかの仕事も考慮に入れると，ある程度納得のいくものとなる．たとえば，投射体の問題に先んじて『最大または最小の性質を有する曲線を見出す方法』の『付録１』でオイラーが論じていたのは，弾性曲線の問題であった（Euler 1744, pp. 245–310/231–297)．オイラーはここでは，弾性を持つ薄板を曲げたときの形状を，$\int ds/R^2$（R: 曲率半径）という式が $\int ds = \mathrm{const.}$（薄板の長さが不変）という制約条件の下で最小になるという要請から導き出している．二つの付録はそれぞれ静力学と動力学に属する問題を扱っているが，いずれも曲線を決定することが主題となっているのが分かる.

[7] 有賀 2006, p. 223, 式 (6) では dx が ds になっているが，これは誤植であり，ここに挙げた式が正しい.

[8] すなわち現代的に言えば，$Z(y,p,x) = \sqrt{(a+gx)(1+pp)}$ に対して $\frac{\delta Z}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta Z}{\delta p}\right)$ を解くということである．オイラー自身はこうした表記を用いないが，実質的にこれに相当する計算を行っている.

[9] 実際には，オイラーの議論はむしろ力学的エネルギーが保存されることを前提にしている．オイラー自身も，速度が位置のみで決定される運動とそうでない運動とを区別し，自らの原理が成り立つのは前者の場合だけであると明言している（Euler 1744, p. 318/306).

同様に 1748 年の二つの論文でも，オイラーは静力学に関する変分問題を，「力学曲線」（オイラーの表現）を決定する問題として論じている．そこで扱われているのはたとえば，任意の力を受けている糸が釣りあいを保つときの形状であり（Euler 1748a），同じく任意の力の作用の下で流体のかたまりが静止しているときの形状である（Euler 1748b）．オイラーはこうした問題を，まず「通常の力学原理」を用いて解き，次いで，最小であるとしたときにこうした形状（曲線）を与えるような量（現代的に言えば作用積分）を探求するという手順で研究した．その結果オイラーは，モーペルテュイが以前に提案していた「静止の法則」（Maupertuis 1740）を発展させる形で[10]，後に「労力」と名付けることになる一般的な量（これはポテンシャルエネルギーに概ね相当する）に到達したのであるが（有賀 2009, 80–81 頁），そうした過程において一貫して研究されていたのは「力学曲線」であった．

最終的にオイラーは，静力学においては，単なる曲線決定問題を超えて仮想変位の原理へと近付いていく（Euler 1751；有賀 2006, 221–222 頁）．しかし動力学においては，『付録２』の枠組みから抜け出ることはなかったように思われる．オイラーは最小作用の原理の正確な定式化（$\int muds$）を与えたとしばしば言われるが，明らかにそれだけでは，物体の運動を一般的に論じるには不十分であったと言わねばならない．実際，曲線（軌道）を決定するというオイラーのアプローチでは，質点系や連続体を扱うことは原理的にほぼ不可能であろう．オイラーは同時期に，解析的な運動方程式に基づく力学（今日一般にニュートン力学と呼ばれているもの）を大いに発展させていたが（たとえば山本 1997, 第 10 章），変分力学に関しては，「力学曲線」を決定するという幾何学的な問題が依然としてその中心的課題を占めていたのである．

3. ラグランジュと，運動を規定する方程式

1755 年の夏にラグランジュがオイラーに送った書簡が，変分法に画期をもたらすことになった．ラグランジュ（当時若干 19 歳）はこの書簡で，歴史上初めて δ という新しい演算の記号を導入し，それによって変分問題の計算手法を劇的に変えてしまったのである．オイラーはこれを称賛し，引き続く二人の文通の中で，今日に直接つながる変分法の基本的な手法が整えられることになった（Euler 1980, p.366f；Fraser 1985）．そしてこの成果が最終的に，本稿冒頭で述べた論文として出版されることになる（Lagrange 1760–61a）．

既に最初の書簡で，ラグランジュが「あなた［オイラー］の公式をいかなる作図もなしに証明する」と述べていた通り（Euler 1980, p. 366），その手法は純粋に代数的なものである．

---

[10] 同名で紛らわしいが，これは前節で触れた「静止の法則」とは異なる．

基本的なアイディアは次の三点にまとめられるであろう（Barroso Filho 1994, ch. 4）．第一に，ラグランジュは新しい演算記号 δ を，通常の微分記号 d と同じ規則に従うが d とは異なるものとして導入する．第二に，この二つの記号は交換可能であるとされる（すなわち $\delta dx = d\delta x$）．そして第三に，ラグランジュは次のような部分積分計算を活用する．

$$\int Z\,d\delta x = Z\delta x - \int dZ\,\delta x. \tag{5}$$

以上の手続きは完全に代数的に，すなわち数式の操作を行うことだけによって進められる．こうした代数志向はラグランジュという人物に際立って特徴的なものであり，後に『解析力学』（初版 1788 年）の「緒言」においては，「この著作には図がまったく見出されないであろう」という印象的な一節として現れてくることになる（Lagrange 1788）．

最小作用の原理に関して言えば，ラグランジュは 1756 年の春までに一編の論文を書き，オイラーに送っている．この論文は，当時オイラーが所属していたベルリンの科学・文学アカデミーの会合で読み上げられたことが確認されているが（Winter 1957, p. 223），結局出版されず，その内容は伝わっていない．ただ，ラグランジュが最小作用の原理を動力学と静力学の「いわば普遍の鍵」と呼び（1756 年 10 月のオイラー宛書簡，Euler 1980, p. 391），「固体および流体の，つりあいにせよ運動にせよ極めて複雑な諸問題の解を，最小作用量のただ一つの式から，単純かつ一般的な仕方で導くこと」を主題とする著書を執筆していると述べていることからして（1759 年 11 月のダニエル・ベルヌーイ宛書簡，Delsedime 1971, p. 143），この時期のラグランジュが何らかの変分力学の理論体系を構想していたことは間違いない．残念ながらここで言及されている本もまた出版されなかったため詳細は不明であるが，ラグランジュによればこの本は二部構成で，第一部で変分法を，第二部で最小作用の原理を論じるとされているので（1759 年 7 月のオイラー宛書簡，Euler 1980, p. 411），後に出版された二編の論文の原型がこれであったのではないかと思われる．

実際に出版された二つの論文のうち，最小作用の原理に関する第二のものでは，本稿冒頭に引用した「一般原理」がまず述べられた後，十個の問題が議論されている．最初の問題は，単位質量あたりの中心力 $P, Q, R, \ldots$（各中心に向かう向きを正とし，各中心から物体までの距離を $p, q, r, \ldots$ とする）を受けて運動する単一の物体（質量 M の質点）を論じており，その解法は概ね次のようなものである（Lagrange 1760–61b, pp. 196–199/366–369）[11]．まず，物体が一つだけなので質量は無視してよく，したがって「一般原理」は次のように書ける．

$$\delta \int u\,ds = 0. \tag{6}$$

[11] 以下はラグランジュの議論を一部組み替え，整理して示したものである．

ここで δ と $\int$ を入れ替えると（これが可能であることは別の箇所で議論されている），この式は次のように二つの部分に分けることができる．

$$\int \delta u ds + \int u \delta ds = 0. \tag{7}$$

まず，この式の左辺第一項については，

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{2} &= \text{const.} - \int (Pdp + Qdq + Rdr + \ldots) \\ &= \text{const.} + \int (Xdx + Ydy + Zdz) / M \end{aligned} \tag{8}$$

という関係式（力学的エネルギー保存則）の変分を取って計算すると（X, Y, Z は物体に働いているすべての力の合力の x, y, z 方向成分）[12]，次のようになる。

$$\begin{aligned} u\delta u &= \int \delta (Xdx + Ydy + Zdz) / M \\ &= \int (\delta Xdx + \delta Ydy + \delta Zdz) / M + \int (Xd\delta x + Yd\delta y + Zd\delta z) / M \\ &= (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) / M + \int (\delta Xdx - dX\delta x + \delta Ydy - dY\delta y + \delta Zdz - dZ\delta z) / M \\ &= (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) / M. \end{aligned} \tag{9}$$

ただし二行目から三行目にかけては第二項の部分積分を行い，三行目から四行目への移行では $\delta X/\delta x = dX/dx$ 等を用いている．また，式 (8) の定数項（すなわち全エネルギー）の変分はゼロであるということも暗に前提されている．ここでさらに $u = ds/dt$ を用いれば，式 (9) は結局次のようになる．

$$\int \delta u ds = (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dt/M. \tag{10}$$

次に式 (7) の左辺第二項については，$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ を使うと

$$\begin{aligned} \int u\delta ds &= \int u\left(\frac{dx}{ds}d\delta x + \frac{dy}{ds}d\delta y + \frac{dz}{ds}d\delta z\right) \\ &= -\int \left(d\frac{udx}{ds}\delta x + d\frac{udy}{ds}dy + d\frac{udz}{ds}\delta z\right) \end{aligned} \tag{11}$$

と書くことができる．ただし一行目から二行目への移行では部分積分を行い，端点は固定されている（変分がゼロ）とした．以上から，式 (7) は次のようになる．

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{X}{M}\delta x + \frac{Y}{M}\delta y + \frac{Z}{M}\delta z\right)dt - \int \left(d\frac{udx}{ds}\delta x + d\frac{udy}{ds}\delta y + d\frac{udz}{ds}\delta z\right) \\ &= \left(\frac{X}{M}dt - d\frac{udx}{ds}\right)\delta x + \left(\frac{Y}{M}dt - d\frac{udy}{ds}\right)\delta y + \left(\frac{Z}{M}dt - d\frac{udz}{ds}\right)\delta z. \end{aligned} \tag{12}$$

[12] 原文では $-X/M, -Y/M, -Z/M$ に当たる量を別の文字で表して用いている．

それゆえ，これが任意の変分 $\delta x, \delta y, \delta z$ に対して成り立つとすれば，最終的に次が得られることになる．

$$d\frac{udx}{ds} - \frac{X}{M}dt = 0, \tag{13}$$
$$d\frac{udy}{ds} - \frac{Y}{M}dt = 0, \tag{14}$$
$$d\frac{udz}{ds} - \frac{Z}{M}dt = 0. \tag{15}$$

$u = ds/dt$ に注意すれば，これは質点 M の運動方程式にほかならない．

ラグランジュはほかの問題でも，同様にして物体の運動を規定する方程式を導出している[13]．この論文で取り上げられている問題は，いま紹介した (1) 質点を筆頭に，(2) 質点系，(3) 三体問題，(4) つながれた三つの物体，(5) 多重振子，(6) 非伸縮性の弦，(7) 伸縮性の弦，(8) 剛体，(9) 非弾性流体，(10) 弾性流体となっており，およそ我々の想像する古典力学のほぼすべてが扱われていると言ってもおそらく過言ではない．とりわけオイラーとの比較で言えば，ラグランジュが質点系や拘束運動のみならず連続体まで論じている点は注目に値する．実際，ラグランジュはこの論文の途中で質量要素の積分を表す記号 **S** を導入し，最小作用の原理を

$$\delta \mathbf{S}\, dm \int uds = 0 \tag{16}$$

という形に書き換えて使っている（Lagrange 1760–61b, p. 235/405）．これは連続体を粒子数 $N \to \infty$ の質点系として捉えるという発想に基づいた自然な拡張であるが，こうしたことはオイラーの手法ではほぼ不可能であった．

このように，ラグランジュによる変分記号 δ の発明は，単に計算を便利にしたというよりも遥かに大きな変革をもたらしている．最小作用の原理に関して言えば，この新しい手法は力学の問題設定そのものを変えてしまったのである．「力学曲線」を求めようとしていたオイラーに対し，ラグランジュは変分原理から，運動を規定する方程式を導出しようとする．そして，この代数的なアプローチによってさまざまな種類の物体の運動が統一的に議論できるようになったという点にこそ，ラグランジュのこの論文の意義があると言うべきであろう．ラグランジュ自身はその後，最小作用の原理に代えて仮想変位の原理（当人の表現では仮想速度の原理）を力学の基礎として採用し，やがてそれに基づいて主著『解析力学』を書くことになるが（Fraser 1983 ; Galletto 1991 ; Barroso Filho 1994 ; 山本 1997, 第 15–17 章），ラグランジュによるここでの最小作用の原理の取り扱いがその後の変分原理の発展におそら

[13] 紙幅の都合上，詳細は割愛する．山本 1997, 第 15 章にはほかの問題も紹介されているので参照されたい．

くは影響を与えたのではないかと推察される[14].

おわりに

モーペルテュイが曖昧な述べ方で提唱し，オイラーが正確な定式化を与え，ラグランジュが複数の物体に拡張した，という最小作用の原理の伝統的歴史観は確かに間違っていない．しかしながら，三人が実際には何をしようとしていたのかをよく検討すると，それ以上の相違がそこにあったことが浮かび上がってくる．

モーペルテュイが自分の原理に与えていた意義は，二種類の衝突法則を統一できるということであった．モーペルテュイにとっては衝突法則こそが運動の法則であり，力学ひいては自然学（物理学）の基礎だったからである．これに対してオイラーは，力を受けて物体する物体の運動や釣りあいを，「力学曲線」を決定する問題として考究していた．二人の問題関心は大きく異なっており，この意味で，オイラーの仕事はモーペルテュイの延長線上にあるというよりは，むしろ別の研究を行っていたという方が正しいように感じられる．

また，オイラーは確かに $\int muds$ という形の数学定式化を与えていたが，オイラーのアプローチでは，質点の軌道を求めることはできても，質点系や連続体を論じるのは困難であった．これに対してラグランジュは，δ 記号を用いた新しい計算法を導入することで，変分原理から運動を規定する方程式を一般に導き出すことを可能にした．ここでは，数学の革新に伴って，力学の問題設定そのものが変わっていると言えるであろう．

本稿では，黎明期の変分力学を，モーペルテュイ，オイラー，ラグランジュという三人の人物に即して概観してきた．今日の力学に慣れた目からは意外に思えるかもしれないが，少なくとも最小作用の原理に関する限り，この人々はそれぞれ違う問題に取り組んでいたのだと言っても過言ではない．今日の変分力学は間違いなくラグランジュの仕事の延長線上にあるが，そこに至るまでの道程は決してまっすぐなものではなかったのである．

参考文献

原典

Alembert, Jean le Rond d'. 1751. Action. Article in *Encyclopédie*, t. 1, pp. 119–120.

———. 1754. Cosmologie. Article in *Encyclopédie*, t. 4, pp. 294–297.

Euler, Leonhard. 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate*

[14] ラグランジュ以降，変分原理に基づく力学がどのように発展したのかについてはよくわかっておらず，今後の本格的な歴史研究が待たれる．

gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti. Lausannae et Genevae, Apud Marcum Michaelem Bousquet et Socios / *Leonhardi Euleri Opera omnia,* ser. 1, vol. 24 (1952).

———. 1748a. Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et des Belles-Lettres [de Berlin], année 1748* (pub. 1750): Mém., 149–188 / *Leonhardi Euleri Opera omnia,* ser. 2, vol. 5 (1957), pp. 1–37.

———. 1748b. Réflexions sur quelques loix générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et des Belles-Lettres [de Berlin], année 1748* (pub. 1750): Mém., 189–218 / *Leonhardi Euleri Opera omnia,* ser. 2, vol. 5 (1957), pp. 38–63.

———. 1751. Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. Maupertuis. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et des Belles-Lettres [de Berlin], année 1751* (pub. 1753): Mém., 169–198 / *Leonhardi Euleri Opera omnia,* ser. 2, vol. 5 (1957), pp. 152–176.

———. 1980. Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange. *Leonhardi Euleri Opera omnia,* ser. 4-A, vol. 5.

Lagrange, Joseph Louis. 1760–1761a. Essai d'une nouvelle Méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. *Mélanges de philosophie et de mathématique de la société royale de Turin, pour les années 1760–1761* [pub. 1762], 2e pag., pp. 173–195 / *Œuvres,* t. 1 (1867), pp. 333–362.

———. 1760–1761b. Application de la Méthode précédente à la solution de différens Problèmes de Dynamique. *Mélanges de philosophie et de mathématique de la société royale de Turin, pour les années 1760–1761* [pub. 1762]: 2e pag., 196–298 / *Œuvres,* t. 1 (1867), pp. 363–468 [sous le title : Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solution de différens Problèmes de Dynamique].

———. 1788. *Méchanique analitique.* Paris: Veuve Desaint. Rep., Paris: Jacques Gabay, 1989.

Maupertuis, Pierre-Louis Moreau de. 1740. Lois du repos des corps. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences [de Paris], année 1740* (pub. 1742): Mém., 170–176 / *Leonhardi Euleri Opera omnia,* ser. 2, vol. 5 (1957), pp. 268–273.

———. 1744. Accord des différents loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences [de Paris], année 1744* (pub. 1748): Mém., 417–426 / *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ser. 2, vol. 5 (1957), pp. 274–281.

———. 1746. Les Loix du Mouvement et du Repos déduites d'un Principe Metaphysique. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et des Belles-Lettres [de Berlin], année 1746* (pub. 1748): Mém., 267–294 / *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ser. 2, vol. 5 (1957), pp. 282–302.

———. 1756. Examen philosophique de la preuve de l'existence de Dieu employé dans l'Essai de cosmologie. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et des Belles-Lettres [de Berlin], année 1756* (pub. 1758): Mém., 389–424.

———. 1965–1974. *Oeuvres : Avec [Maupertuis 1756]; Avec une introduction par Giorgio Tonelli*, 4 vols. Hildesheim: Olms. [著作集本体は 1768 年版のリプリント（ただしその内容は 1756 年版と同一）]

研究書・論文など

Barroso Filho, Wilton. 1994. *La mécanique de Lagrange : Principes et méthodes* Paris: Karthala.

Boudri, J. Christiaan. 2002. *What was mechanical about mechanics: The concept of force between metaphysics and mechanics from Newton to Lagrange*. Tr. Sen McGlinn. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Delsedime, Piero. 1971. La disputa delle corde vibranti ed una lettera inedita di Lagrange a Daniel Bernoulli. *Physis* 13: 117–146.

Dugas, René, 1988. *A History of Mechanics*. Tr. J. R. Maddox. New York: Dover Publications.

Fraser, Craig. 1983. J. L. Lagrange's early contributions to the principles and methods of mechanics. *Archive for History of Exact Sciences* 28: 197–241.

———. 1985. J. L. Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations. *Archive for History of Exact Sciences* 32: 151–191.

———. 2005. Leonhard Euler, book on the calculus of variations (1744). Ch. 12 of *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640–1940*, ed. I. Grattan-Guinness, pp. 168–180. Amsterdam: Elsevier.

Galletto, Dionigi. 1991. Lagrange e le origini della Mécanique Analytique *Giornale di Fisica* 32: 83–126.

Goldstine, Herman H. 1980. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century.* New York: Springer-Verlag.

Mach, Ernst［エルンスト・マッハ］. 2006 年.『マッハ力学史：古典力学の発展と批判（上・下)』岩野秀明訳（ちくま学芸文庫）. 東京：筑摩書房.

Panza, Marco. 1995. De la nature épargnante aux forces généreuses : le principe de moindre action entre mathématiques et métaphysique. Maupertuis et Euler, 1740–1751. *Revue d'histoire des Sciences* 48: 435–520.

———. 2003. The origins of analytical mechanics in 18th century. Ch. 5 of *A History of Analysis*, ed. H. N. Jahnke, pp. 137–153. Providence: American Mathematical Society.

Pulte, Helmut. 1989. *Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Mechanik: Eine Untersuchung zur Grundlegungsproblematik bei Leonhard Euler, Pierre Louis Moreau de Maupertuis und Joseph Louis Lagrange.* Stuttgart: Steiner.

Winter, Eduard (in Verbindung mit Maria Winter). 1957. *Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766: Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin.* Berlin: Akademie Verlag.

有賀暢迪. 2006 年.「オイラーの変分力学」『科学史研究』第 45 巻, 220–228 頁.

———. 2007 年.「オイラーとラグランジュ：最小作用の原理から『解析力学』へ」『科学史研究』第 46 巻, 185–187 頁.

———. 2009 年.「モーペルテュイの「作用」, オイラーの「労力」：十八世紀中葉における二つの最小作用の原理」『科学史研究』第 48 巻, 77–86 頁.

伊藤和行. 2006 年. オイラーの運動方程式.『科学哲学科学史研究』第 1 号, 153–169 頁.

広重徹. 1968 年.『物理学史（I, II)』東京：培風館.

山本義隆. 1997 年.『古典力学の形成：ニュートンからラグランジュへ』東京：日本評論社.