

完全流体の変分法における Clebsch potential について

深川 宏樹 (Hiroki FUKAGAWA)*

藤谷 洋平 (Youhei FUJITANI)†

慶應大学・基礎理工

SCHOOL OF FUNDAMENTAL SCIENCE & TECHNOLOGY, KEIO UNIVERSITY

概要

流体の運動方程式の多くが Euler 描像で解かれることから, Euler 描像での完全流体の変分法について考えることは重要である. 一様 entropy 下での渦度のある速度場を変分法により導くためには, 保存則と Clebsch potential と呼ばれる補助場が必要である. 本稿では, 後者の物理的な意味を議論し, 制御理論との関連を議論する.

1 導入

完全流体の運動は, Euler 方程式と質量保存則と断熱条件によって記述される. ρ を質量密度とし, 単位質量あたりの entropy 密度を s とし, 速度場を \boldsymbol{v} とする. 流体では局所平衡が成立し, 単位質量あたりの内部エネルギー ϵ は ρ と s との関数で与えられる. Lagrangian 密度は

$$\rho \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 - \epsilon(\rho, s) \right\} \quad (1)$$

で与えられ, 作用 $S[\rho, s, \boldsymbol{v}]$ は上記の Lagrangian 密度を時間と空間で積分したもので与えられる. Lagrange 描像においては, 質量保存と断熱条件の下で作用 $S[\rho, s, \boldsymbol{v}]$ の停留条件を解くと Euler 方程式が得られることが知られている [1]. しかしながら, Euler 描像と同様にして停留条件を求めると, 一様 entropy 下では渦度がない速度場しか得ることができない. この欠点を補うべく, Clebsch potential [2, 3] と呼ばれる補助場を導入して渦度のありうる速度場を導く方法が提案された [4, 5, 6]. この変分法は電磁流体などの応用 [6, 7, 8] があるが, 近年に至るまで Clebsch potential の物理的な意味は議論されてきた [9, 10, 11, 12].

本稿では, §2 で Euler 描像での変分法についての既知事項の説明をし, §3 で制御理論の枠組みを用いて初期時刻と終端時刻での境界条件について議論し, §4 にて Clebsch potential が Euler 描像での変分法において流跡線を初期時刻と終端時刻で固定する拘束条件を与えていることを示す [12].

2 Euler 描像での変分法

ρ, s, \boldsymbol{v} をある場所 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ のある時刻 t の関数とし, 初期時刻と終端時刻をそれぞれ t_{init} と t_{fin} とし, 完全流体が占める空間を V とし, その境界を ∂V とする. また, 境界からは流体は流れださないの

*hiroki@beer.appi.keio.ac.jp

†youhei@appi.keio.ac.jp

n_i を法線ベクトルとしたときに、速度場 \mathbf{v} は

$$n_i v_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (2)$$

を満たす。質量保存則と断熱条件は

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3)$$

$$\partial_t s = -\mathbf{v} \cdot \nabla s \quad (4)$$

で与えられる。上の拘束条件の下での作用

$$S[\rho, s, \mathbf{v}] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) \quad (5)$$

の停留条件を未定乗数法を用いて求める。 κ と λ を未定乗数として、作用は次で与えられる。

$$S_{\text{E}}[\rho, s, \mathbf{v}, \kappa, \lambda] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \left\{ \mathcal{L}(\rho, s, \mathbf{v}) - \kappa \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) - \lambda \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) \right\} \quad (6)$$

初期時刻と終端時刻で質量密度と entropy を固定して、

$$\delta \rho(\mathbf{x}, t_{\text{init}}) = \delta \rho(\mathbf{x}, t_{\text{fin}}) = 0 \quad (7)$$

$$\delta s(\mathbf{x}, t_{\text{init}}) = \delta s(\mathbf{x}, t_{\text{fin}}) = 0 \quad (8)$$

$\kappa, \lambda, \mathbf{v}, \rho, s$ について (6) の停留条件を求めると、(3) と (4) と次を得る。

$$\mathbf{v} = -\nabla \kappa + \lambda \nabla s \quad (9)$$

$$D_t \kappa = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \epsilon + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \quad (10)$$

$$D_t \lambda = \frac{\partial \epsilon}{\partial s} \quad (11)$$

ここで $D_t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ は Lagrange 微分を表す。温度を T とし、圧力を p とすると、熱力学第一法則 ($d\epsilon = -pd\rho^{-1} + Tds$) より次を得る。

$$p \equiv \rho^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_s, \quad T \equiv \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s} \right)_\rho \quad (12)$$

ここで下添字 $_s$ と $_\rho$ は偏微分において固定する変数を表す。(12) を用いると、(10) と (11) はそれぞれ

$$D_t \kappa = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h \quad (13)$$

$$D_t \lambda = T \quad (14)$$

となる。ここで h は enthalpy であり、 $h \equiv \epsilon + p/\rho$ と定義される。Lie 微分を $L_{\mathbf{v}} \equiv \nabla(\mathbf{v} \cdot) - \mathbf{v} \times \nabla \times$ とする。(9) の両辺を $\partial_t + L_{\mathbf{v}}$ で微分し、(4) を用いると

$$\partial_t \mathbf{v} + L_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = -\nabla D_t \kappa + (D_t \lambda) \nabla s \quad (15)$$

を得る。ここで (13) と (14) を (15) に代入すると、Euler 方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (16)$$

(9) の回転より、渦度は

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \lambda \times \nabla s \quad (17)$$

となる。しかしながら、一様 entropy 流では $\nabla s = \mathbf{0}$ なので、 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ となり、つまり渦度は必ずゼロとなる。一様 entropy でも渦度があることが考えられるので、この方法では何か欠点がある。これが §1 で述べた Euler 描像での変分法の問題点である。

3 Hamiltonian 形式

解析力学の Hamiltonian 形式は Pontryagin[13, 14] により拡張され制御理論で用いられている。§3.1 で制御理論の簡単な説明を与え、§3.2 で完全流体へ適用し、初期時刻と終端時刻での境界条件について議論する。

3.1 制御理論における変分法

q をシステムの状態とし、初期時刻と終端時刻での状態を指定する。

$$\delta q(t_{\text{init}}) = 0 \quad (18)$$

$$\delta q(t_{\text{fin}}) = 0 \quad (19)$$

これらの初期時刻と終端時刻での境界条件は、制御理論では横断条件と呼ばれている。状態 q は入力 u で制御され、その時間発展を

$$\frac{d}{dt}q = F(q, u) \quad (20)$$

で与え、評価関数を

$$\int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(q(t), u(t)) \quad (21)$$

で与える。評価関数 (21) を最小にする入力 (最適コントロール) を未定乗数法を用いて求める。未定乗数を p とおくと、最適コントロールは

$$\begin{aligned} S[q, p, u] &= \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ L(q, u) + p \cdot \left(\frac{d}{dt}q - F(q, u) \right) \right\} \\ &= \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ -H(q, p, u) + p \cdot \frac{d}{dt}q \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

の停留条件から定まる。ここで、 $H(q, p, u)$ は

$$H(q, p, u) \equiv -L(q, u) + p \cdot F(q, u) \quad (23)$$

で定義される Hamiltonian である。なお、制御理論では p は余状態と呼ばれる。

q と p が与えられたときに、(22) を最小にする入力を $u^*(q, p)$ とすると、 u^* の必要条件は

$$\frac{\partial H(q, p, u^*)}{\partial u_i^*} = 0 \quad (24)$$

である。ここで、

$$H^*(q, p) \equiv H(q, p, u^*(q, p)) \quad (25)$$

を導入し、 $S^*[q, p]$ を次の第一の等号で定義すると $S[q, p, u]$ より値が小さくなる。

$$S^*[q, p] \equiv \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \left\{ -H^*(q, p) + p \cdot \frac{d}{dt}q \right\} \leq S[q, p, u] \quad (26)$$

p と q に関する (26) の停留条件から、

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H^*(q, p)}{\partial p_i} \quad (27)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H^*(q, p)}{\partial q_i} \quad (28)$$

を得る。なお、この停留条件を解く際に横断条件として、(18)と(19)を用いた。横断条件としては、(19)の代わりに

$$\mathbf{p}(t_{\text{fin}}) = \mathbf{0} \quad (29)$$

と置いても、(27)と(28)を求めることができる。より一般的な場合についての詳細は文献[13, 14]で議論されている。最適コントロールは(27)と(28)を満たす \mathbf{p} と \mathbf{q} を(24)に代入して得られる。

例えば、 \mathbf{q} を粒子の位置とし \mathbf{u} を速度として、 $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}$ とおけば、ここで紹介した正準 Hamiltonian 形式は質点についての解析力学と同じになる。

3.2 完全流体への適用

完全流体の変分法への適用を考えよう。制御理論にならうと、 ρ と s は状態 $\mathbf{q} \equiv (\rho, s)$ 、 \mathbf{v} は入力 $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ とみなせる。(20)に対応する式は(3)と(4)になり、余状態は $\mathbf{p} \equiv (-\kappa, -\rho\lambda)$ となる。Hamiltonian(23)は、

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) \equiv -\mathcal{L} + \kappa \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla s \quad (30)$$

で与えられる。(1)と(2)を用いると、

$$\int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \int_V d^3\mathbf{x} \left\{ \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \frac{\rho}{2} (\mathbf{v} + \nabla \kappa - \lambda \nabla s)^2 \right\} \quad (31)$$

を得る。ここで、 $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ は

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv \rho \left\{ \epsilon(\rho, s) + \frac{1}{2} (-\nabla \kappa + \lambda \nabla s)^2 \right\} \quad (32)$$

である。(6)は

$$\begin{aligned} S_E[\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}] &= \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \left\{ -\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right\} \\ &\geq \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V d^3\mathbf{x} \left\{ -\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

を満たす。ここで、

$$\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \lambda \frac{\partial s}{\partial t} \quad (34)$$

である。停留条件より(27)と(28)に対応して、 $i = 1, 2$ として、

$$\frac{\partial q_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial (\partial p_i / \partial x_j)} \quad (35)$$

$$\frac{\partial p_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial (\partial q_i / \partial x_j)} \quad (36)$$

が得られる。これらは(3)、(4)、(13)、(14)に対応する。

§3.1の最後で述べたように、時間両端での境界条件(横断条件)を様々に置くことができる。初期状態と終状態を固定するのであれば、(7)と(8)を課せば良く、これらは(18)と(19)に対応する。初期時刻の余状態 $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t_{\text{init}})$ 、つまり $\kappa(\mathbf{x}, t_{\text{init}})$ と $\lambda(\mathbf{x}, t_{\text{init}})$ の値は、(35)と(36)により初期状態 $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_{\text{init}})$ と終状態 $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_{\text{fin}})$ 、つまり ρ と s の時間両端での値によって決まる。

§2で示した定式化では状態 ρ と s に関する初期状態と終状態が与えられていたが、入力である速度場 \mathbf{v} については初期時刻と終端時刻になんら条件は課せられなかった。つまり、§2で示した完全流体の変分法は、速度場について時間両端での条件を指定しない変分法であることが分かる。

4 流跡線の時間両端を固定する条件

ある流体粒子の経路に注目すると流跡線を得ることができる。この節では、初期時刻と終端時刻での流跡線を固定する条件を Clebsch potential と呼ばれる補助場を用いて Euler 描像での変分法に課すことを考える。§2 での変分法では、初期時刻である流体粒子に注目したときに、その流体粒子が終端時刻でどここの場所に移るかを指定できなかつた。時間両端での流跡線の固定をすると、速度場に拘束条件が加わることになる。なお、この条件は Lagrange 描像での変分法 [1] では課せられており、Euler 描像でも課すことは自然である。

時間を含めた 4 次元空間上に Clebsch potential と呼ばれる三つの補助場 $A_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, 2, 3$) を与え、 $A_i = \text{const}$ がなす超平面の交線が流跡線に一致するようにする。

$$\partial_t A_i = -\mathbf{v} \cdot \nabla A_i \quad (37)$$

(A_1, A_2, A_3) は Euler 座標から Lagrange 座標を与えているとみなすことができ、その Jacobian の行列式

$$\frac{\partial(A_1, A_2, A_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = (\nabla A_1 \times \nabla A_2) \cdot \nabla A_3 \quad (38)$$

は、流体粒子の膨張率の逆数を与える。Lagrange 座標を $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ で与え、 (X_1, X_2, X_3) を流体粒子の位置としたときに、流体粒子の膨張率が

$$J(\mathbf{a}, \tau) \equiv \frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} \quad (39)$$

で与えれ、質量保存則が $\rho(\mathbf{a}, t)J(\mathbf{a}, t) = \rho(\mathbf{a}, t_{\text{init}})$ で与えられることを考慮すると、

$$\rho(\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), t_{\text{init}}) (\nabla A_1 \times \nabla A_2) \cdot \nabla A_3 = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (40)$$

を得る。 (A_1, A_2, A_3) は Lagrange 座標 \mathbf{a} そのものだけではなく、 \mathbf{a} の関数で逆関数をもつものなら何でもよい [9]。例えば、 $f(a_1, a_2)$ を a_1 と a_2 の関数とし、

$$A_1 = a_1, A_2 = a_2, A_3 = a_3 + f(a_1, a_2) \quad (41)$$

とすることもできる。

$$\nabla A_3 = \nabla a_3 + \frac{\partial f}{\partial a_1} \nabla a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} \nabla a_2 \quad (42)$$

より、 f を調整することで ∇A_3 を $\nabla A_1 (= \nabla a_1)$ と $\nabla A_2 (= \nabla a_2)$ に直交させることができる。また、 A_1 と A_2 が \mathbf{a} の任意の関数で $\nabla A_1 \times \nabla A_2 \neq \mathbf{0}$ を満たすものであれば、同様に ∇A_3 を ∇A_1 と ∇A_2 に直交させることができる。よって、そのように作った A_3 については (40) を

$$\nabla A_3 = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), t_{\text{init}}) (\nabla A_1 \times \nabla A_2)} \quad (43)$$

と書き換えることができる。ここで A_i は \mathbf{x} と t の関数である。

初期時刻と終端時刻での境界条件 (横断条件)

$$\delta A_\alpha(\mathbf{x}, t_{\text{init}}) = \delta A_\alpha(\mathbf{x}, t_{\text{fin}}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (44)$$

を課せば、(7)、(43)、(44) を用いて、 $\delta A_3(\mathbf{x}, t_{\text{init}}) = \delta A_3(\mathbf{x}, t_{\text{fin}}) = 0$ を導くことができる。つまり、(7) と (44) だけを課せば、Euler 座標での変分法において時間両端で流跡線を固定することができる。ここで A_1 と A_2 は (37) を満たし ρ とは独立に決まることに注意する。

時間両端で流跡線が固定された条件下で (6) を最小にする速度場を未定乗数法を用いて求める。 β_1 と β_2 を未定乗数とし

$$S_I[\rho, s, \mathbf{v}, \mathbf{A}, \kappa, \lambda, \beta] \equiv S_E[\rho, s, \mathbf{v}, \kappa, \lambda] - \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{fin}}} dt \int_V dx^3 \sum_{\alpha=1}^2 \rho \beta_{\alpha} (\partial_t A_{\alpha} + \mathbf{v} \cdot \nabla A_{\alpha}) \quad (45)$$

の停留条件を (7), (8), (44) の下で解く。 A_{α} についての停留条件より

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_{\alpha} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \beta_{\alpha} \quad (46)$$

を得る。同様に ρ と \mathbf{v} の停留条件から

$$D_t \kappa = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h + \sum_{\alpha=1}^2 \beta_{\alpha} (\partial_t A_{\alpha} + \mathbf{v} \cdot \nabla A_{\alpha}) \quad (47)$$

$$\mathbf{v} = -\nabla \kappa + \lambda \nabla s + \sum_{\alpha=1}^2 \beta_{\alpha} \nabla A_{\alpha} \quad (48)$$

を得る。(47) は (37) より (13) と等価の式である。 κ, λ, ρ, s の停留条件より (3), (4), (13), (14) を得る。§2 と同じようにして、Euler 方程式 (16) を (48) より得る。 β_1 と β_2 の値は §3 で説明したように横断条件 (44) によってきまる。(48) の回転より、渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \lambda \times \nabla s + \sum_{\alpha=1}^2 \nabla \beta_{\alpha} \times \nabla A_{\alpha} \quad (49)$$

となり、一様 entropy ($\nabla s = 0$) の条件下でも $\sum_{\alpha=1}^2 \nabla \beta_{\alpha} \times \nabla A_{\alpha}$ の項があるために渦度はゼロとは限らない。終端時間での流跡線を固定しなかった場合、つまり (44) を課さなかった場合、(29) で議論したように $\beta_1(\mathbf{x}, t_{\text{fin}}) = \beta_2(\mathbf{x}, t_{\text{fin}}) = 0$ となり、これと (46) から $\beta_1(\mathbf{x}, t) = \beta_2(\mathbf{x}, t) = 0$ を得る。その結果、一様 entropy 下 ($\nabla s = 0$) での渦度 (49) は (17) と同様にゼロになる。

5 まとめ

補助場を導入して一様 entropy 下で渦度のある速度場を変分法から導くことは、1929 年に Bateman[4] によって形式的に提案された。導かれる渦度の式が Clebsch[2] の渦度の式に似ていることから、補助場は Clebsch Potential と呼ばれている。神部 [9] は Clebsch potential が (41) で示したように不定性をもつことを示した。また吉田 [10] は任意の速度場を表すには Clebsch potential が二つであれば十分であることを示した。また、Clebsch potential が Lagrange 座標と関係があることは、いくつかの文献 [1, 5, 6, 9, 10] で示唆されている。しかしながら、流跡線の横断条件との関連を示したのは我々が初めてであろう [12]。

§2 での変分法は流跡線の時間両端が固定されていないものであった。我々は §3 で制御理論の観点から速度場が入力とみなせることを示し、横断条件について議論した。§4 で流跡線を時間両端で固定するために Clebsch Potential を補助場として導入した。補助的な変数を状態として用いて時間両端での拘束条件を入れることは、制御理論ではよく行われることである。例えば、制御の終了時刻を指定する際に時間を状態変数として用いることが文献 [13] で議論されている。我々の方法はこれの応用である。Clebsch potential の横断条件に (44) を課すことにより流跡線を固定端にすることができる。もし、この条件がなければ流跡線は終端時間で自由端になる。一般に、拘束条件が少なければ少ないほど作用の極小値はより小さくなる。よって自由端の方が固定端の時よりも作用の極小値は小さい。つまり、渦度のない速度場 (9) は流跡線が自

由端であるときの作用 (5) の極小値を与える入力 (最適コントロール) と理解できる。また, (45) から §3.2 と同様の手続きを得て, 文献 [11, 15] で提案されたものと同等な正準 Hamiltonian を得ることができる [12].

本稿では完全流体は容器に閉じ込められたものとしたが, この条件を外して代わりに質量密度が十分遠方でゼロとなると仮定してもよい。また, ここで議論したことは相対論的な拡張が容易に可能である [12].

謝辞

本稿での研究のきっかけを下された神部勉教授に感謝します。有益な議論をしてくださった神部勉, 吉田善章, 服部裕司, 中村匡, 細谷暁夫, 小嶋泉, 各教授に感謝します。この研究の深川の担当分は KLL 後期博士課程研究助成金の援助を受け, 藤谷の担当分は慶應義塾学事振興資金の援助を受けました。

- [1] A. Bennett, *Lagrangian fluid dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006), p. 32.
- [2] A. Clebsch, *J. Reine Angew. Math.* **56** (1859), 1.
- [3] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932), p. 248.
- [4] H. Bateman, *Proc. Roy. Soc. London. A* **125** (1929), 598; *Scripta Math.* **10** (1944), 51; *Partial differential equations* (Dover, New York, 1944), p. 164.
- [5] C. C. Lin, in *International School of Physics Enrico Fermi (XXI)*, ed. G. Careri (Academic Press, New York, 1963), p. 93.
- [6] R. L. Selinger and G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. London. A* **305** (1968), 1.
- [7] H.-T. Elze, Y. Hama, T. Kodama, M. Makler and J. Rafelski, *J. Phys. G.* **25** (1999), 1935.
- [8] J. L. Friedman and J. R. Ipser, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **340** (1992), 39.
- [9] T. Kambe, *Fluid Dyn. Res.* **39** (2007), 98; *Fluid Dyn. Res.* **40** (2008), 399; *Physica D* **237** (2008), 2067; *Geometrical theory of dynamical systems and velocity field*, Revised ed., (World Scientific, Singapore, 2010), p. 189.
- [10] Z. Yoshida, *Proc. Int. Symp. Contemporary Physics*, ed. J. Aslam, F. Hussain and Riazuddin (World Scientific, Singapore, 2008), p. 125.
- [11] Z. Yoshida, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 113101.
- [12] H. Fukagawa and Y. Fujitani, *Prog. Theor. Phys.* **124** (2010), p. 517.
- [13] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mischenko, *The mathematical theory of optimal processes* (Gordon & Breach Science Pub, New York, 1987), p. 66.
- [14] M. Schulz, *Control theory in physics and other fields of science* (Springer-Verlag, Berlin, 2006), p. 17.
- [15] R. Salmon, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20** (1988), 225.