

電磁流体方程式の変分原理に基づいた 非線形モード間相互作用の定式化

日本原子力研究開発機構・那珂核融合研究所 廣田 真 (Makoto Hirota)
Naka Fusion Institute,
Japan Atomic Energy Agency

1 研究背景

太陽コロナ、地球磁気圏、降着円盤などに存在する天体プラズマや、核融合発電を目指したプラズマの磁場閉じ込め装置においては、「非一様な構造」をもったプラズマが形成される。こうした様々な構造は、外部から印加された磁場構造に加え、プラズマ自身の電流が誘導する磁場も考慮した力学的平衡によっておおよそ理解される。しかし、実際のプラズマは様々な巨視的・微視的不安定性に富んでおり、揺らぎの成分が線形レベルに留まらず、しばしば非線形な振舞いをする。すなわち、波と波の相互作用 (乱流) や異常輸送 (乱流輸送) が起こり、構造の形成・維持・緩和メカニズムと密接に関わっている。これらの物理を明らかにすることは、前述の磁場閉じ込め装置にとっては根源的な課題である。

プラズマの巨視的な振舞いを記述する方程式としては、電磁流体 (MHD) 方程式が最も基礎的であり、本研究の対象もそれに限定する。

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{v} は流れ場、 \mathbf{B} は磁場、 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ は電流、 ρ は質量密度、 s はエントロピー密度を表し、圧力 $p(\rho, s)$ は ρ と s の熱力学的な関数として与えられている。散逸効果も重要ではあるがここでは無視している。簡単のため、流れのない ($\mathbf{v} = 0$) 力学平衡を考えると、ローレンツ力と圧力勾配の釣り合い $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$ が成立していればよい。軸対称性をもった平衡解として、トカマクと呼ばれるタイプの磁場閉じ込め配位が存在する (図 1)。トカマクでは入れ子状の磁気面から構成される磁束管がトーラスの形をしており、磁束管内部のプラズマ圧力を磁場によって支えている。このような強い非一様性 (圧力勾配や磁場のシア) をもった平衡のまわりでは、線形揺動は固有モードや連続モード (連続スペクトル) に分解される。しかし、これらが非線形段階においてどのような振舞いをするかは、あまり明らかにはされていない。

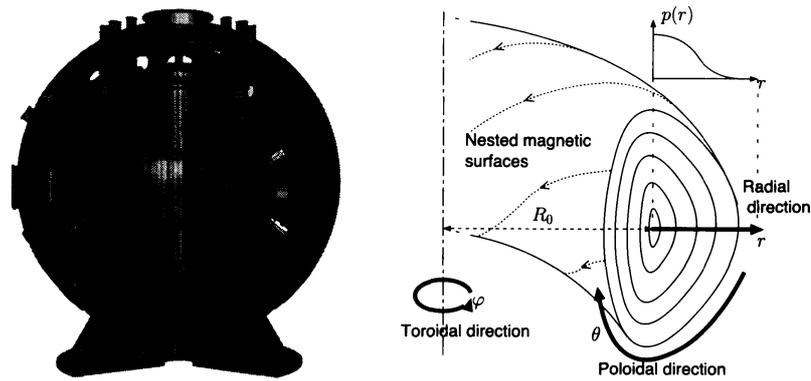


図 1: トカマク型磁場閉じ込め装置として建設予定の JT-60SA(左)と、トーラスプラズマの断面概略図(右)

通常、波と波の相互作用の理論ではアイコナル近似を用いるなどして局所的な平面波(すなわち波束)を仮定する。また、一様等方乱流理論でも波数ベクトル空間 \mathbf{k} でのエネルギーカスケードを議論する。ところが、非一様な背景場が存在する場合は波数ベクトルが定義できないため、分散関係の代わりに固有値問題(微分方程式)を解かねばならず、「モードとモードの相互作用」へと概念を拡張しなければならない。モード間の結合の強さ(結合係数)はモード構造(固有関数)に依存し、それを計算する手法は(固有値問題が解析的に解ける特殊な場合を除いて)一般には明らかにされていない。問題点として、MHD 方程式(流体方程式も含む)が非正準力学系であることが挙げられる。Larsson [1]、Axelsson [2] はオイラー変数 $(\mathbf{v}, \mathbf{B}, \rho, s)$ と同じ数だけの共役な変数 $(\beta, \zeta, \theta, \eta)$ を導入して結合係数を求めたが、変数の数が多いために表現が複雑であり、流れのない平衡に限定してもなお実用的な結果とは言い難い。Brizard & Kaufman [3] らは一般的な場 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ のラグランジアンに対して、アイコナル近似(波数ベクトル)を用いない理論を展開したが、揺らぎのモード分解までは考慮していない。また、MHD では流体粒子の軌道(Lie 群)に対してラグランジアンが定義されるので、場の理論は適用できない。

本研究では Newcomb [4] によって発見された MHD 方程式のラグランジアンと変分原理に基づき、ラグランジュ変位場 ξ のみを用いて非線形擾動の方程式やモード間結合係数を定式化する。 ξ を用いた定式化は線形理論において古くから知られており [5, 6]、安定性解析などに大いに活用されてきたが、本研究の成果はそれの非線形への拡張に相当する。数学的には Lie 級数展開の手法を適用することに相当し、煩雑な計算を効率的に行うことができる。詳細な計算や証明を示すは別の機会にゆずり、本稿では導出の鍵となるアイデアと応用する際に必要な結果をまとめる。具体的な応用として、ここではアルフベン固有モードと呼ばれるプラズマの巨視的振動モードに対して、非線形相互作用の効果を評価する。

2 ラグランジュ変位場の非線形方程式と変分原理

この節では、Newcomb [4] の導いた MHD 方程式の変分原理に基づいて、プラズマの非線形な揺らぎ (変位) に対する方程式を導出する。そのためにはラグランジアン (作用積分) を平衡のまわりで摂動展開した後、ハミルトンの変分原理を適用する。

ここでは理想プラズマで満たされた任意の領域を $V \subset \mathbb{R}^3$ とし、簡単のため V は固定境界 (完全導体壁) で囲まれているとする。実際のプラズマは真空領域で囲まれた自由境界問題であることが多いが、プラズマ表面の変位が小さい内部モードに関しては固定境界の定式化がそのまま適用できる。

流体のラグランジュ的描像では、無限小の流体要素 (“流体粒子”) の軌道を表す写像 $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}(t) \in V$ が正準変数である。ここで、 \mathbf{x}_0 は流体粒子の初期位置を示すラベルである。このような流体の運動が与えられている時、オイラー的に見た速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ は $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ によって定義され、MHD 方程式における運動方程式以外の (2)-(4) は磁場や密度、エントロピーが流体要素に凍りついているという保存則を表す。

流体粒子の軌道に摂動 $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \Xi(\mathbf{x}(t), t)$ が加わったとする。ただし、 $\Xi(\mathbf{x}, t)$ は軌道の変位を表す写像である。この変位は非線形であるため、 $\Xi(\mathbf{x}, t)$ の時間発展を直接解こうとするのは、全ての流体粒子の軌道を求めることと等価であり、一般には不可能である。故に摂動解析を必要とするわけだが、本研究では摂動の振幅を測る微小パラメータ $\alpha (\ll 1)$ に関して、以下のような摂動展開を適用する。

$$\mathbf{x} + \Xi = (e^{\alpha \xi \cdot \nabla})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \alpha \xi + \frac{\alpha^2}{2} \xi \cdot \nabla \xi + \frac{\alpha^3}{6} \xi \cdot \nabla (\xi \cdot \nabla \xi) + \dots \quad (5)$$

すなわち、写像 Ξ はベクトル場 $\xi(\mathbf{x}, t)$ によって生成されており、 $\partial \Xi / \partial \alpha = \xi(\mathbf{x} + \Xi, t)$ という関係がある。これは、 α をパラメータとする微分同相写像 $\Xi (\Leftrightarrow \text{Lie 群})$ をベクトル場 $\xi (\Leftrightarrow \text{Lie 代数})$ で表したことになり、数学的にも 1 対 1 の対応関係があることで知られる。固定境界条件は ξ を用いれば、単純に $\mathbf{n} \cdot \xi = 0$ at ∂V と表される (\mathbf{n} は境界での法線ベクトル)。線形摂動 $O(\alpha)$ の範囲では、 Ξ と ξ の区別はなく、その違いは多くの文献において意識されていない。しかし、非線形摂動 $O(\alpha^n), n \geq 2$ を考える時、上記のようにベクトル場 ξ を定義し、 Ξ と区別することで計算の見通しがよくなる (Ξ に対してはベクトル公式すら使えない)。

MHD 方程式の変数をまとめて、 $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, \mathbf{B}, \rho, s)^T$ と表記すると、摂動を受けた状態 $\tilde{\mathbf{u}}$ は以下のように Lie 級数展開できる。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \alpha \delta_\xi \mathbf{u} + \frac{\alpha^2}{2} \delta_\xi \delta_\xi \mathbf{u} + \frac{\alpha^3}{6} \delta_\xi \delta_\xi \delta_\xi \mathbf{u} + \dots \quad (6)$$

ここで、 ξ を含んだ微分作用素 δ_ξ は

$$\delta_\xi \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta_\xi \mathbf{v} \\ \delta_\xi \mathbf{B} \\ \delta_\xi \rho \\ \delta_\xi s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i \xi + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi - \xi \cdot \nabla \mathbf{v} \\ \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}) \\ -\nabla \cdot (\rho \xi) \\ -\xi \cdot \nabla s \end{pmatrix} \quad (7)$$

のように定義され、Lie 微分の性質が備わっている。このように ξ で生成された \tilde{u} は流線方程式と 3 つの保存則 (2)-(4) を自動的に満たし、これらを形式的に解いたことに相当する。その結果、変数の数としては ξ だけに帰着するのがこのアプローチの最大の利点である。

MHD のラグランジアン密度 [4] は以下のように与えられる。

$$L(u) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 - \rho U(\rho, s), \quad (8)$$

ここで、 $U(\rho, s)$ は内部エネルギーを表す熱力学的関数であり、圧力とは $p = \rho^2 \partial U / \partial \rho$ の関係にある。摂動を受けたラグランジアンは同様に α に関して摂動展開される。

$$\tilde{L} = \int_V L(\tilde{u}) d^3x = \int_V \left(L + \alpha \delta_\xi L + \frac{\alpha^2}{2} \delta_\xi \delta_\xi L + \frac{\alpha^3}{6} \delta_\xi \delta_\xi \delta_\xi L + O(\alpha^4) \right) d^3x, \quad (9)$$

ただし、 δ_ξ が汎関数 $L(u)$ に作用する場合は、 $\delta_\xi L = D_u L \cdot \delta_\xi u$ を意味する (D_u は汎関数微分)。

以降では、非摂動状態 $u = (\mathbf{v}, \mathbf{B}, \rho, s)^T$ をある「平衡状態」と仮定する。それは MHD 方程式の一つの厳密解であるから、Newcomb が最初に示したように任意の ξ に関して $\delta_\xi L$ はゼロになる (正確には境界項が残るがここでは詳細な議論は省く)。 $\delta_\xi \delta_\xi L$ や $\delta_\xi \delta_\xi \delta_\xi L$ に対しては長い計算を必要とするが、最終的に (9) は以下のように書き表すことができる。

$$\tilde{L} = \int_V \left\{ L + \frac{\alpha^2}{2} l^{(2)}(\xi, \xi) + \frac{\alpha^3}{6} [3l^{(2)}(\xi \cdot \nabla \xi, \xi) - w^{(3)}(\xi, \xi, \xi)] + O(\alpha^4) \right\} d^3x. \quad (10)$$

まず、二次オーダー $O(\alpha^2)$ に現れているラグランジアン密度は

$$l^{(2)}(\xi, \eta) := \rho \frac{D\xi}{Dt} \cdot \frac{D\eta}{Dt} - w^{(2)}(\xi, \eta) \quad \text{for } \forall \xi, \eta$$

で定義され、

$$w^{(2)}(\xi, \eta) := \mathbf{B}\xi \cdot \mathbf{B}\eta + \eta \cdot [(\xi \cdot \nabla) \nabla P] + \rho c_s^2 (\nabla \cdot \xi)(\nabla \cdot \eta) + (\nabla \cdot \xi) \eta \cdot \nabla P + (\nabla \cdot \eta) \xi \cdot \nabla P. \quad (11)$$

は (二次オーダーの) ポテンシャルエネルギー密度を表す。ただし、 $D/Dt = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ 、 $\mathbf{B}\xi := \mathbf{B} \cdot \nabla \xi - (\nabla \cdot \xi) \mathbf{B}$ であり、 $P = p + |\mathbf{B}|^2/2$ は全圧 (= 圧力 + 磁気圧)、 $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ は音速である。この $l^{(2)}(\xi, \eta)$ は ξ と η の交換に対して対称な二次形式であり、Dewar [7] によってすでに導かれている。変分原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V l^{(2)}(\xi, \xi) d^3x dt = 0$ を適用すれば、Frieman-Rosenbluth [6] らが導出した線形の運動方程式 $\rho D^2 \xi / Dt^2 = \mathcal{F} \xi$ が再現される (以下では F-R 方程式と呼ぶ)。プラズマの変位場 ξ に働く力 $\mathcal{F} \xi$ は、 $\int_V w^{(2)}(\xi, \xi) d^3x = - \int_V \xi \cdot \mathcal{F} \xi d^3x$ で定義され、 \mathcal{F} が対称 (or エルミート) 作用素であることはラグランジアン対称性から明らかである。念を押すようだが、F-R 方程式の解 ξ を (7) に代入した $\delta_\xi u$ は、確かに平衡解 u のまわりで線形化した MHD 方程式 (1)-(4) の解になる。ポテンシャルエネルギー $\int_V w^{(2)}(\xi, \xi) d^3x$ が正定値ならば

平衡は線形安定であり、MHD理論においては「エネルギー原理」として広く定着している安定性判別手法である [5]。

Frieman-Rosenbluth や Dewar らが議論したのは線形摂動であり、本研究のような Ξ と ξ の区別はなかった。式 (10) のような形で三次オーダー $O(\alpha^3)$ の項を求めるには、この違いに注意を払う必要がある。三次オーダーのポテンシャルエネルギー密度を意味する $w^{(3)}(\xi, \eta, \zeta)$ は、以下のように導ける。

$$\begin{aligned} w^{(3)}(\xi, \eta, \zeta) := & -(\nabla \cdot \xi) \mathbf{B} \zeta \cdot \mathbf{B} \eta - (\nabla \cdot \eta) \mathbf{B} \zeta \cdot \mathbf{B} \xi - (\nabla \cdot \zeta) \mathbf{B} \xi \cdot \mathbf{B} \eta \\ & + \nabla \cdot (\zeta \cdot \nabla \xi - \zeta \nabla \cdot \xi) \delta_\eta P + \nabla \cdot (\zeta \cdot \nabla \eta - \zeta \nabla \cdot \eta) \delta_\xi P \\ & + \nabla \cdot (\xi \cdot \nabla \eta - \xi \nabla \cdot \eta) \delta_\zeta P \\ & + (\nabla \cdot \xi) \eta \cdot (\zeta \cdot \nabla) \nabla P + (\nabla \cdot \zeta) \eta \cdot (\xi \cdot \nabla) \nabla P + (\nabla \cdot \eta) \xi \cdot (\zeta \cdot \nabla) \nabla P \\ & + \eta \zeta \xi : \nabla \nabla \nabla P - \left(\rho^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + 2\rho c_s^2 \right) (\nabla \cdot \xi) (\nabla \cdot \eta) (\nabla \cdot \zeta). \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、全圧の摂動は $\delta_\xi P = \delta_\xi p + \mathbf{B} \cdot \delta_\xi \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \xi - \xi \cdot \nabla P - \rho c_s^2 \nabla \cdot \xi$ で与えられる。この $w^{(3)}$ は ξ, η, ζ の任意の置換に関してやはり対称性をもっている。従って、 ξ に関する変分をとった際に、

$$\delta \int_V w^{(3)}(\xi, \xi, \xi) d^3x = 3 \int_V w^{(3)}(\xi, \xi, \delta\xi) d^3x \quad (13)$$

$$= 3 \int_V \left\{ -\delta\xi \cdot \mathcal{F}^{(2)}(\xi, \xi) + \nabla \cdot [2(\delta\xi \cdot \nabla \xi) \delta_\xi P] \right\} d^3x \quad (14)$$

のようにして二次オーダーで働く力 $\mathcal{F}^{(2)}(\xi, \xi)$ を定義することができる。 $\mathcal{F}^{(2)}(\xi, \xi)$ は (12) を部分積分することで具体的に書くことはできるが、むしろ対称な (12) だけが後々必要なのでそれは割愛する。最終的にはハミルトンの原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = 0$ によって、

$$\rho \frac{D^2 \Xi}{Dt^2} - \mathcal{F} \Xi - \frac{1}{2} \mathcal{F}^{(2)}(\Xi, \Xi) = O(\alpha^3), \quad (15)$$

という弱非線形運動方程式が得られる。ただし、 $\Xi = \alpha \xi + (\alpha^2/2) \xi \cdot \nabla \xi + O(\alpha^3)$ を用いて Ξ で表記した。 $O(\alpha^3)$ 以上の項については、より高次の非線形効果を表し、ラグランジアンの変動展開 (10) をさらに高次オーダーまで行う必要がある。次節以降では二次の非線形項 $\mathcal{F}^{(2)}(\Xi, \Xi)$ を介したモード間の相互作用を議論するため、 $O(\alpha^3)$ 以上は無視する。

ここで得た運動方程式 (15) は明らかに線形の F-R 方程式の自然な拡張となっている。F-R 方程式が Newcomb の変分原理以前に、線形化 MHD 方程式から直接導出されたのは非常に発見的であったが、(15) を導出するとなるともはや上記のように変分原理に頼った手法でないと導出は至難の技である。

3 非線形モード間相互作用

プラズマの変位 Ξ の振幅 ($\sim \alpha$) が無限小であれば、(15) は線形の F-R 方程式に一致し、解は線形の固有モードや連続モードの重ね合わせで近似される。振幅が大

きくなると、最初に効いてくるのは二次の非線形項 $\mathcal{F}^{(2)}(\Xi, \Xi)$ であり、モード間の相互作用 (エネルギーのやりとり) が起きるようになる。ここで弱乱流理論 [8, 9] に習って (15) の解の形を

$$\alpha \xi = \sum_j [C_j(t) \hat{\xi}_j e^{-i\omega_j t} + \text{c.c.}] \quad (16)$$

と置いてみよう。ただし、 ω_j と $\hat{\xi}_j$ は線形系 (F-R 方程式) の固有値と固有関数とし、 $\hat{\xi}_j \sim O(1)$ となる適当な規格化が施されているとする。固有モードの振幅 $C_j(t) \sim O(\alpha)$ は何らかのゆっくりした時間変化 ($dC_j/dt \ll \omega_j C_j$) をするとし、これがモード間の非線形相互作用を表現する。振幅の発展方程式は

$$\frac{dC_j}{dt} = \sum_{j', j''} \hat{W}_{jj'j''}^{(3)} C_{j'} C_{j''} \delta(\omega_j + \omega_{j'} + \omega_{j''}), \quad (17)$$

のように表記される (この δ はデルタ関数のようなものだが、詳細は文献 [8, 9] を参照)。結合係数 $\hat{W}_{jj'j''}^{(3)}$ は共鳴する 3 つのモード間の結合の強さを表す重要な値である。

この弱乱流の描像は、固有値が比較的稠密に存在する短波長の揺らぎに対してはよく当てはまる。しかし、本研究が問題としているトカマク (図 1) のような構造をもったプラズマにおいて、巨視的な振動モードにはそのまま適用できない。実際、MHD 方程式には磁力線がゴム紐のように振動するアルフベン波という波が存在する。ポロイダル方向とトロイダル方向の波数を m, n とすると、小半径位置 r に依存するアルフベン周波数

$$\omega_A(r) = \left[\frac{m}{q(r)} + n \right] \frac{\bar{B}_T(r)}{R_0 \sqrt{\rho(r)}}, \quad (18)$$

は連続スペクトルとなり、その周波数帯には固有値が存在できない ($\bar{B}_T(r)$ はトロイダル磁場を各磁気面上で平均したもので、 $q(r)$ はトロイダル磁場とポロイダル磁場の比)。一方、連続スペクトル $\omega_A(r)$ が極大 or 極小となるような所、あるいは m と $m+1$ に対応する二つの $\omega_A(r)$ が交差する所では、固有値が現れやすく、一般にアルフベン固有モード [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] と呼ばれる。このような固有値はスペクトル上に稀にしか存在しないのだが、磁場閉じ込め装置においては別のエネルギー源 (高エネルギー粒子との共鳴など) によって励起され易く、離散的なスペクトルが実験的にもはっきりと観測される。

アルフベン固有モードの固有値は線形の固有値問題を解かなければわからないが、

$$m_a = m_b + m_c, \quad n_a = n_b + n_c, \quad \omega_a = \omega_b + \omega_c + \Delta\omega, \quad (19)$$

または

$$m_a = 2m_b, \quad n_a = 2n_b, \quad \omega_a = 2\omega_b + \Delta\omega \quad (20)$$

を満たすような三つ (or 二つ) の固有モードが存在すれば、それらの間で非線形効果によるエネルギー交換が起きる (以降では一般性を欠くことなく $\omega_j > 0$ とする)。こ

ここで、第二高調波共鳴 (20) は三波共鳴 (19) において、 $m_b = m_c$, $n_b = n_c$, $\omega_b = \omega_c$ とおいた特別な場合とみなせる。固有値の分布はまばらであるため、周波数のズレ $\Delta\omega (\ll \omega_j, j = a, b, c)$ が少なからず存在することをここでは考慮している。

共鳴条件 (19) を満たす三つの固有モード $a\xi = \sum_{j=a,b,c} [C_j \hat{\xi}_j e^{-i\omega_j t} + \text{c.c.}]$ に対し、これらの相互作用を表す振幅方程式は、(15) の可解条件、あるいはラグランジアン (10) の平均化といった手法から、以下のような標準的な形に帰着する。

$$\frac{dC_a}{dt} = -i \frac{W_{a,b,c}^{(3)}}{\mu_a} C_b C_c e^{i\Delta\omega t}, \quad \frac{dC_b^*}{dt} = i \frac{W_{a,b,c}^{(3)}}{\mu_b} C_a^* C_c e^{i\Delta\omega t}, \quad \frac{dC_c^*}{dt} = i \frac{W_{a,b,c}^{(3)}}{\mu_c} C_a^* C_b e^{i\Delta\omega t}, \quad (21)$$

ここで、* は複素共役を意味し、

$$\mu_j = \int_V [\hat{\xi}_j^* \cdot \rho(\omega_j + i\nu \cdot \nabla) \hat{\xi}_j] d^3x \in \mathbb{R} \quad (j = a, b, c) \quad (22)$$

$$W_{a,b,c}^{(3)} = \int_V w^{(3)}(\hat{\xi}_a^*, \hat{\xi}_b, \hat{\xi}_c) d^3x. \quad (23)$$

とした。相互作用がこの三つの固有モードだけで閉じているならば、(21) は可積分であることで知られる [8, 9]。結合係数 $W_{a,b,c}^{(3)}$ が三つの方程式において共通であることは Manley-Rowe の対称性と呼ばれ、MHD 方程式のような複雑な方程式系においてこれを直接証明するのは容易でない。本研究ではラグランジアンの摂動展開を系統的に行ったため、三次ポテンシャルエネルギー (12) が ξ, η, ζ の置換に関して対称であることがそのまま Manley-Rowe の対称性の証明になっている。

波の作用 (固有振動の作用変数に相当) は各々 $N_j = \mu_j |C_j|^2$ ($j = a, b, c$) で与えられる。平衡の流れが存在しない場合 ($\mathbf{v} = 0$)、波の作用は常に正であり、それに振動数 $\omega_j (> 0)$ を乗じた波のエネルギーも正である。正エネルギーのモード間相互作用は不安定になることがなく、エネルギーの保存的なやりとりが周期的に起きる。実例として、二通りの特殊な初期条件に対応する解を以下に示す。

Case (i). $N_a(0) \gg N_b(0), N_c(0) \sim 0$ (高周波数 \gg 低周波数)

もし、 $N_a(0) > \Delta N := \mu_a \mu_b \mu_c \Delta\omega^2 / 4 |W_{a,b,c}^{(3)}|^2$ 、すなわち $|C_a(0)| > \Delta C_a := \sqrt{\Delta N / \mu_a}$ ならば、高周波数モードのパラメトリック崩壊が起き、低周波数モードへエネルギーが移る。その後の解の時間発展は以下のような振動を繰り返す。

$N_a(t)$	$N_a(0)$	\searrow	ΔN	\nearrow	$N_a(0)$
$N_{b,c}(t)$	0	\nearrow	$N_a(0) - \Delta N$	\searrow	0

Case (ii). $N_b(0) = N_c(0) \gg N_a(0) \sim 0$ (低周波数 \gg 高周波数)

二つの低周波数モード (ω_b, ω_c) が協調して高周波数モード (ω_a) を駆動し、エネルギーを受け渡す。

$N_a(t)$	0	\nearrow	$N_{b,c}(0) - \Delta N'$	\searrow	0
$N_{b,c}(t)$	$N_{b,c}(0)$	\searrow	$\Delta N'$	\nearrow	$N_{b,c}(0)$

ここで、 $\Delta N' = \sqrt{\Delta N(N_b(0) + \Delta N/4)} - \Delta N/2$ である。明確な閾値は存在しないが、初期の振幅 $C_{b,c}(0)$ が $\Delta C_{b,c} := \sqrt{\Delta N/\mu_{b,c}}$ 程度だと、約40%のエネルギーが高周波数モードに移る。振幅がそれよりも極端に小さい場合 $|C_{b,c}(0)| \ll \Delta C_{b,c}$ では非線形効果による結合が弱く、共鳴相互作用というよりは強制振動の描像に近くなる。

どちらのケースも解は周期的であるが、このような結合がいくつか連鎖的に起きると、解の周期性は破れてカオスになり、最初のモードへエネルギーが戻ってくることはなくなる。もし、無数のモードが強く結合すれば、弱乱流 (17) のモデルが妥当となる。アルフベン固有モードのように、固有値の分布がまばらで周波数のズレ $\Delta\omega$ が存在する場合には、上記の $\Delta C_j = \sqrt{\Delta N/\mu_j} \propto |\Delta\omega/W_{a,b,c}^{(3)}|$ で定義される振幅が重要な目安となる。つまり、モード間相互作用によるエネルギー伝達は、この ΔC_j と同程度以上の振幅にならないと効率的には起こらない。逆に、 ΔC_j が大きい場合は結合が弱く、振幅をそれだけ大きくしても線形の固有モードのままで存在し続ける。

4 アルフベン固有モード間の相互作用の解析

ここまでで導いた結合係数 $W_{a,b,c}^{(3)}$ は、理想 MHD における任意の平衡と固有モードに対して適用できる一般的なものだが、一般的すぎて表現がまだ複雑である。ここでは簡単のため、図1のようなトーラス形状ではなく、円柱プラズマを考える。さらに、実験や天体プラズマではプラズマの圧力 p が磁気圧 $|B|^2/2$ に比べて小さい場合が多く、それらの比 $\beta = 2p/|B|^2$ を小さいとした「低 β 近似」がよく当てはまる。これを用いると摂動の方程式において、音波の成分とアルフベン波の成分を分離することができる。

ここでは、円柱座標系 (r, θ, z) における以下のような β の低い平衡 (ϵ が小さい) を考える。

$$\mathbf{v} = 0, \quad B_z = B_0 = \text{const.}, \quad B_\theta(r) \sim \epsilon B_0, \quad p(r) \sim \epsilon^2 B_0^2/2, \quad \rho(r) \sim \rho_0. \quad (24)$$

円柱の半径と長さをそれぞれ a と $2\pi R_0$ とし、 z 方向には周期境界条件を課す。固有モードは一般に以下のように書ける。

$$C\hat{\xi}e^{-i\omega t} = C(\hat{\xi}_r(r), \hat{\xi}_\theta(r), \hat{\xi}_z(r)) \exp(im\theta + ikz - i\omega t) \quad (k = n/R_0), \quad (25)$$

ただし、固有関数は $\|\hat{\xi}\|^2 := \int_V \rho |\hat{\xi}|^2 d^3x = 4\pi^2 R_0 \rho_0 a^4$ となるように規格化し、 $\hat{\xi} \sim a$ とする。これによって振幅 C は無次元量であり、十分に小さい $C \sim \alpha \ll 1$ 。

アルフベン連続スペクトル $\omega_A(r)$ [(18) において $\bar{B}_T(r) \equiv B_0$, $q(r) = rB_0/R_0B_\theta(r)$ としたもの] が場所 $r = r_0$ で極小となっているとしよう。この時、アルフベン固有モードの固有値 ω は極小値 $\omega_A(r_0)$ のすぐ下に現れる。固有値問題は低 β 近似を用いて、 $\phi = r\hat{\xi}_r$ に関する常微分方程式

$$\frac{d}{dy} \left[(1 - y^2) \frac{d\phi}{dy} \right] - \frac{m^2}{r_0^2} L_\omega^2 (1 - y^2) \phi + g\phi = 0 \quad (26)$$

に帰着でき、これは Mahajan [11] によって近似的に解かれた。ここで、 $y = (r-r_0)/L_\omega$ は r_0 近傍の局所座標であり、

$$L_\omega^2 = L^2 \frac{\omega_A^2(r_0) - \omega^2}{\omega_A^2(r_0)}, \quad g = - \frac{L^2}{r_0} \frac{\rho'}{\rho} \Big|_{r=r_0}, \quad L^2 = 2 \frac{\omega_A^2}{(\omega_A^2)''} \Big|_{r=r_0}$$

のように定義している。変分的手法 [11] によれば、密度勾配 ρ' が $g > 3/4$ を満たす時、固有値 $\omega^2 \simeq \omega_A^2(r_0) (1 - r_0^2 \epsilon_0 / m^2 L^2)$ が存在し、その固有関数はガウス分布

$$r \hat{\xi}_r \simeq e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\Delta r^2}} \quad \text{with} \quad \Delta r^2 = 2 \frac{r_0^2}{m^2} \sqrt{\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = g - \frac{1}{4} - \sqrt{g - \frac{1}{2}}. \quad (27)$$

でよく近似される。すなわち、アルベン固有モードは $r = r_0$ の近傍に局在化しているのが特徴である。 $r \hat{\xi}_r$ がこのように求まれば、固有関数の他の成分は $r \hat{\xi}_r \sim a^2$ に関して以下のように与えられる。

$$\delta_\xi P \simeq 2 \frac{\sqrt{\rho} \omega_A B_\theta}{m r} r \hat{\xi}_r \sim \epsilon \frac{B_0^2}{2}, \quad \nabla \cdot \hat{\xi} \simeq -2 \frac{k B_\theta}{m r B_z} r \hat{\xi}_r \sim \epsilon \quad (28)$$

$$\hat{\xi}_\theta \simeq i \frac{1}{m} (r \hat{\xi}_r)' \sim a, \quad \hat{\xi}_z \simeq -i \frac{B_\theta}{m B_z} (r \hat{\xi}_r)' \sim \epsilon a \quad (29)$$

従って、低 β 近似では $\hat{\xi}_r$ や $\hat{\xi}_\theta$ に比べて、 $\hat{\xi}_z$ や圧縮性 $\nabla \cdot \hat{\xi}$ 、全圧の揺動 $\delta_\xi P$ が小さい。アルベン固有モード間の結合係数を求める際、このオーダリングを (12) に適用すれば、多くの項は小さいとして無視できる。(12) の表式に発散 $\nabla \cdot \xi$ が多く含まれてることからわかるように、音波や音響モードのような圧縮を伴う振動モードに比べ、非圧縮に近いアルベン固有モードは非線形結合が弱く、それだけ大振幅になりやすい。結果として、(12) の中で最初の三つの項 $[-(\nabla \cdot \xi) B \zeta \cdot B \eta$ など] が支配的となり、 $B \hat{\xi} \simeq i \omega \sqrt{\rho} \hat{\xi}$ を使えば、

$$W_{a,b,c}^{(3)} = \int_V \left[(\nabla \cdot \hat{\xi}_a^*) \omega_b \omega_c \rho \hat{\xi}_b \cdot \hat{\xi}_c - (\nabla \cdot \hat{\xi}_b) \omega_a \omega_c \rho \hat{\xi}_a^* \cdot \hat{\xi}_c - (\nabla \cdot \hat{\xi}_c) \omega_a \omega_b \rho \hat{\xi}_a^* \cdot \hat{\xi}_b \right] d^3x + O(\epsilon^2) \quad (30)$$

という表現を得る。これは、 $\nabla \cdot \hat{\xi}_j (\sim \epsilon)$ や $\omega_j \omega_{j'}$ を重みとした固有関数同士の内積の形をしている。

さらなる単純化のため、三つの固有関数は同じ「ヘリシティ」 $m_a/n_a = m_b/n_b = m_c/n_c$ をもっていると仮定しよう。この時、それぞれに対応するアルベン連続スペクトル (18) は共通の場所 $r = r_0$ で極小となるため、固有関数 ($\phi = r \hat{\xi}_r$) も同じ場所に局在化することになり、結合が比較的強いことが予想される。式 (28) の $\nabla \cdot \hat{\xi}$ と、 $r \hat{\xi}_r$ がガウス分布 (27) である近似を用いると、結合係数は

$$\sqrt{\omega_{a,b,c}^{(3)}} := \sqrt{4\pi^2 R_0 \rho_0 a^4} \frac{|W_{a,b,c}^{(3)}|}{\sqrt{|\mu_a \mu_b \mu_c|}} = \sqrt{\frac{|\omega_a| \rho_0}{|\mu_a| \rho(r_0)} \frac{a^2}{R_0^2} \left| \frac{n_a}{q(r_0) m_a} \right|} F(\Delta r / r_0, m_a, m_b), \quad (31)$$

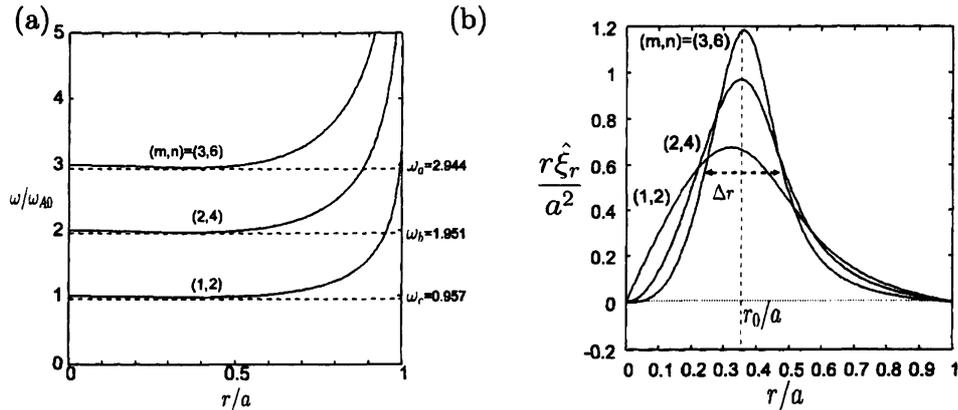


図 2: (a) (m, n) が $(3, 6)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(1, 2)$ の場合のアルフベン連続スペクトル $\omega_A(r)$ とその下に存在する固有値 $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ (b) 対応する三つの固有関数 $r\hat{\xi}_r$

で見積ることができる。ただし、結合係数 $W_{a,b,c}^{(3)}$ が周波数の次元をもつような変換を行った。モードの幅 Δr に依存する無次元の関数 F は、

$$F(\Delta r/r_0, m_a, m_b) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{\frac{\hat{r}}{r_0} + \frac{r_0}{\hat{r}}}}, \quad \frac{\hat{r}}{r_0} = \sqrt{2\epsilon_0}^{1/4}. \quad (32)$$

で与えられる。

5 数値計算による評価

我々は一般的な公式 (12) を得ているので、解析結果 (31) を数値計算によって検証した。円柱系における MHD の固有値問題は Hain-Lüst 方程式 ([10] を参照) と呼ばれ、数値計算においては低 β 近似などを用いず、この方程式をダイレクトに解くことにする。平衡分布としては文献 [10] と同じ以下のものを選ぶ。

$$J_z(r) = (rB_\theta)' / r = J_0(1 - r^2/a^2)^\nu, \quad \rho(r) = (\rho_0 - \rho_a)(1 - r^2/a^2)^\kappa + \rho_a. \quad (33)$$

パラメータを $\omega_{A0} = B_0/a\sqrt{\rho_0} = 1.0$, $q_0 = 1.0$, $\nu = 4.0$, $\rho_a/\rho_0 = 0.05$, $\kappa = 1.0$, $R_0/a = 3.0$ のように設定した場合、この平衡では $q(r)$ が $q_0 = 1.0$ から $q_a = 5.0$ に単調増加するのに対して、密度が ρ_0 から ρ_a に単調減少することで、アルフベン連続スペクトルが極小となる所が実際に存在する。

モード数 $(m, n) = (1, 2), (2, 4), (3, 6)$ に対応する固有値を数値的に求めた結果を図 2 に示す。この三つの固有値は共鳴条件 (19) を満たし、 $\Delta\omega = 0.0350$ である。同じヘリシティをもつため、いずれも固有関数は $r/a = 0.35$ の所にピークをもっている。一般公式 (12) に実際の固有関数を代入して数値的に計算した結合係数と、解析的な近似式 (31) を用いて求めた結合係数を以下に示す。

	Numerical result	Analytic formula
$\sqrt{\omega_{a,b,c}^{(3)}}$	0.689	0.576

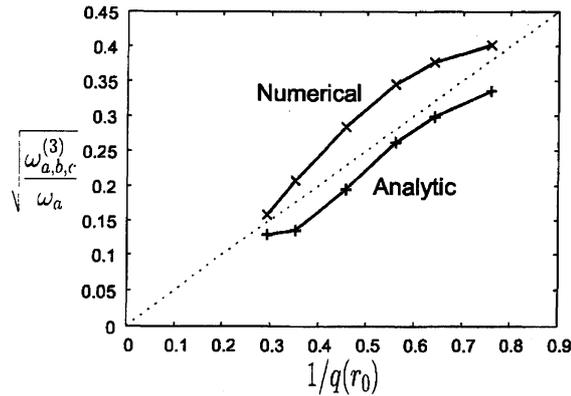


図 3: $r = r_0$ における q の値に対する結合係数の依存性

このケースでは低 β といっても ϵ はそれ程小さくなく、固有関数もガウス分布とは必ずしも合致しないものの、前節の解析結果はそれなりに数値結果をよく再現している。

平衡のパラメータを変えて $r = r_0$ における値 $q(r_0)$ を変化させると、解析結果 (31) が示すように結合係数は $1/q(r_0) \sim \epsilon$ に比例する傾向を見せた (図 3)。これはプラズマの圧力 $p \sim \epsilon^2$ が上がると、アルフベン固有モードがより圧縮的な振動になり、モード間の結合が強くなると解釈される。第 3 節ですでに述べたように、 $\omega_{a,b,c}^{(3)}$ と $\Delta\omega$ の値を用いて振幅 $\Delta C_j := \sqrt{\Delta N/\mu_j} = \sqrt{\Delta\omega^2/4\omega_j\omega_{a,b,c}^{(3)}}$ を評価できる。この振幅を越えるくらいからモード間のエネルギー交換が顕著となり、図 2 のモードに対しては $\Delta C_a = 0.0132$, $\Delta C_b = 0.0182$, $\Delta C_c = 0.0260$ と見積られる。

6 まとめ

MHD の変分原理に従って、プラズマの変位場に対する弱非線形の運動方程式 (15) を導いた。新たに得られた二次の非線形項 $\mathcal{F}^{(2)}$ はモード間の相互作用を引き起こし、パラメトリック崩壊や高調波共鳴、弱乱流などの解析に有用となる。それと関連する三次のポテンシャルエネルギー $W^{(3)}(\xi, \xi, \xi)$ は対称性をもち、三つの固有関数 $\hat{\xi}_a, \hat{\xi}_b, \hat{\xi}_c$ を代入するだけで、それらの間の結合の強さ (結合係数 $W_{a,b,c}^{(3)}$) を評価することができる。従来の三波相互作用の理論では、アイコナール近似を用いて局所的には平面波であることを仮定しているが、本研究の定式化により、巨視的な MHD 固有モード間の非線形相互作用を解析することが可能となった。

具体的にアルフベン固有モードの相互作用を理解するため、ここでは円柱プラズマを仮定して結合係数の値を解析的、数値的に評価した。解析的には低 β 近似を用い、数値結果とよい一致を示す公式 (31) を導いた。固有モード間の結合が強くなるための条件として、三つの固有関数が空間的に重なりあっていることに加えて、振動モードが圧縮的 $\nabla \cdot \hat{\xi} (\sim \sqrt{\beta}) \neq 0$ であることが挙げられる。実際、結合係数は $\sqrt{\beta}$ (or $1/q$) におよそ比例する。

アルフベン固有モード間では厳密に共鳴条件が成り立つのは稀であり、共鳴からのズレ $\Delta\omega$ も考慮しなければならない。結合係数 $W_{a,b,c}^{(3)}$ が大きく、 $\Delta\omega$ が小さい程、モード間のエネルギー交換は活発になる。ここでは非線形性が効いてくる振幅の目安として、 $\Delta C_j \propto \sqrt{|\Delta\omega/W_{a,b,c}^{(3)}|}$ を定義した。ある固有モードに外部からエネルギーを供給していった場合、この振幅を越えたくらいで他のモードへとエネルギーが伝達する。そのため、実験的に観測される揺動の振幅と比較することが可能となる。

実際の実験装置は円柱ではなくトーラスであるため、定量的な比較を行うためには、ここで行った解析をトーラス系へ拡張する必要がある。第3節までの定式化は平衡の幾何形状には依存しないので、固有値問題を精度良く解けるコードを活用すれば、(12)に固有関数を代入することで数値的な評価は可能である。

参考文献

- [1] J. Larsson, *J. Plasma Phys.* **55** 261-78 (1996).
- [2] P. Axelsson, *Nonlinearity* **13**, 19 (2000).
- [3] A. J. Brizard and A. N. Kaufman, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4567 (1995).
- [4] W. A. Newcomb, *Nucl. Fusion Suppl. Pt. 2*, 451 (1962).
- [5] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud, *Proc. Roy. Soc. London A* **244**, 17 (1958).
- [6] E. Frieman and M. Rotenberg, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 898 (1960).
- [7] R. L. Dewar, *Phys. Fluids*, **13**, 2710 (1970).
- [8] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, "Nonlinear Plasma Theory" Benjamin, New York (1969).
- [9] B. Coppi, M. N. Rosenbluth and R. N. Sudan, *Ann. Phys.* **55**, 207 (1969).
- [10] K. Appert, R. Gruber, F. Troyon and J. Vaclavik, *Plasma Phys.* **24**, 1147 (1982).
- [11] S. M. Mahajan, D. W. Rose and G-L. Chen, *Phys. Fluids* **26**, 2195 (1983).
- [12] C. Z. Cheng, L. Chen and M. S. Chance, *Ann. Phys. (N.Y.)* **161**, 21 (1985).
- [13] H. L. Berk, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **87** 185002 (2001).
- [14] B. N. Breizman, et al., *Phys. Plasmas* **10**, 3649 (2003)
- [15] B. N. Breizman, M. S. Pekker, S. E. Sharapov, *Phys. Plasmas* **12**, 112506 (2005).
- [16] G. Y. Fu and H. L. Berk, *Phys. Plasmas* **13**, 052502 (2006).