

楕円渦の弱非線形安定性と 2 次不安定性

九州大学大学院数理学研究院

彌榮洋一 (Yoichi Mie)

福本康秀 (Yasuhide Fukumoto)

Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 序

航空機は翼端から渦を剥離させながら飛行する。この剥離渦は航空機が揚力を得るために不可欠であるが、背後を飛行する航空機には非常に危険なものである。航空機が安全に飛行するために、この後流渦がなるべく早く消えて欲しい。後流渦の流体力学的不安定性はそのための鍵を握る。

この渦は互いに反対回転の平行な 2 本の渦管として近似される。Leweke & Williamson [17] は、精妙な実験により、この渦対が普遍的な仕組みで不安定を起し崩壊に至ることを示した。反平行渦対の不安定性には 2 つのタイプがある。1 つは長波不安定で、Crow の不安定と呼ばれる [4]。もう 1 つは短波不安定で、Moore-Saffman-Tsai-Widnall(MSTW) 不安定と呼ぶ [22, 26, 7]。片方の渦管に注目するとき、相手方の渦管が誘導する速度を渦糸といっしょに下降する座標系で見ると、ひずみ場が誘導される。ここでは、注目する渦を、ひずみ場中の単独渦管としてモデル化する。MSTW 不安定性は、ひずみ場により、方位波数が 2 だけ異なり、同一の振動数、同一の軸方向波数をもつ 2 個の Kelvin 波同士のパラメータ共鳴である。この不安定のメカニズムはハミルトン系における Krein 理論で説明できる [15, 3, 18]。単独の Kelvin 波からなる攪乱は中立安定振動である。ひずみ場を介して、負のエネルギーをもつモードから正のエネルギーをもつモードにエネルギーを受け渡しすることで、両方のモードが増幅することが可能になる。これが共鳴の姿である。

このひずみ場によって、渦核は楕円形に変形する。Pierrehumbert [23] は、数値シミュレーションによって、流線が楕円形を描く流れは局所的に不安定であることを示し、Bayly [2] はその理論的基礎を与えた。Waleffe [29] は、3 次元攪乱を受けた楕円回転流の渦度は水平方向成分をもち、ひずみ場がその渦度をひきのばすことで攪乱が増幅するという物理的な解釈を与えた。これを楕円型不安定というが、これは MSTW 不安定の短波長極限である [7]。

Malkus [19] は、断面が楕円形に変形した筒状容器内の回転流を実験室で実現し、それが崩壊することを示した。Waleffe [28] は、Malkus の実験に関して、Euler 的方法により弱非線形解析を行い、可解条件を用いることで攪乱振幅の弱非線形発展方程式を与えた。Guckenheimer & Mahalov [11] や Knobloch, Mahalov & Marsden [14] は、円筒断面が楕円になるという対称性の破れに起因する不安定波に対する弱非線形振幅方程式の標準形を与えた。Sipp [25] は、エネルギーの保存を別途利用することで、振幅方程式をこの標準形の形に変形した。これによると攪乱振幅が飽和してしまうが、実験事実 [19, 5] と一致しない。Kerswell [13] や Mason & Kerswell [20] は 3 波相互作用による 2 次不安定性の数値解析を行った。Fukumoto, Hattori & Fujimura [8] は 2 次不安定性の理論を試みた。

さて、従来使われる Euler 的方法では、Kelvin 波の非線形相互作用による平均流を得られない。このこととはとりも直さず Sipp [25] が得た弱非線形振幅方程式が不完全であることを示唆する。これまで、平均流

が存在しない特別な場合を扱ったり [24]、平均流が存在しないことじつけをして [20, 25, 16]、波の非線形相互作用によって誘起される平均流を正面から扱うことが避けられてきた。

安定性を調べるために Lagrange 的方法が有効である [6]。この方法では、Helmholtz の渦定理と整合するよう、攪乱を等循環面 (isovortical sheet) 上に制限したものを考える。この制限の下では、定常基本流は運動エネルギーの極値状態と特徴づけられる [1]。Hirota & Fukumoto [12] は、この極値性を利用して、攪乱 1 次の Lagrange 変数から攪乱 2 次のエネルギーを計算し、さらに、Fukumoto & Hirota [9] は攪乱 2 次の平均流を求める枠組みを与えた。そして、われわれは、Lagrange 変数を用いることで、定常 Kelvin 波の 3 次元攪乱弱非線形振幅方程式を計算することに成功した [21]。ここで得られた振幅方程式は Hamilton の標準形となる [14]。そして、Euler 的方法で得られた従来の結果 [25, 16] が不十分であることを明らかにする。従来の方法では攪乱 2 次のエネルギーを求めることができないことに関連して、不定パラメータが 1 つ残り、余分な自由度が 1 つ残ってしまう。このまま振幅方程式の数値計算を行うと、物理的にあり得ない結果が導かれる。Lagrange 的方法を用いること、したがって、攪乱を isovortical sheet 上に制限することは特殊な拘束ではなく、物理的に自然な扱いであることを強調しておく。

§2 では、本稿で考える楕円筒内の回転流の安定性の定式化を行う。§3 では攪乱として Kelvin 波を導入する。§4 では Kelvin 波の非線形相互作用、とくに平均流を導く Lagrange 的方法を解説する。§5 では楕円ひずみによって生じる MSTW 不安定を考える。ここでは、一般的に、方位波数 m が 2 だけ異なる $(m, m+2)$ モード対の増幅率を与え、すべての共存点で不安定となることを示す。§6 で、 $(0, 2)$ モードの振幅方程式を与える。定常 Kelvin 波の攪乱は、攪乱 3 次の弱非線形効果まで考えると、振幅が飽和してしまう [25, 21]。 $(0, 2)$ モードでも同様なことが起こり、2 次不安定 [13, 20, 8] を考える必要がある。§7 でこの点に触れる。

2 基礎方程式

本研究では、容器の断面が

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon} + \frac{y^2}{1-\varepsilon} = 1 \quad (2.1)$$

で与えられる楕円筒内の回転流の安定性について考える。ここで、 ε は楕円ひずみを表すパラメータであり、ひずみは十分小さい $\varepsilon \ll 1$ とする。楕円筒の中心軸を z 軸とする円柱座標系を導入し、速度 $\mathbf{u}$ の動径方向成分、方位角方向成分、軸方向成分を u, v, w とする。Euler 方程式を満足する定常 2 次元基本流の速度場 $\mathbf{U}$ 、圧力場 P の解は次のようになる：

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \varepsilon \mathbf{U}_1 + O(\varepsilon^2), \quad P = P_0 + \varepsilon P_1 + O(\varepsilon^2), \quad (2.2)$$

$$U_0 = 0, \quad V_0 = r, \quad P_0 = r^2/2 - 1, \quad (2.3)$$

$$U_1 = -r \sin 2\theta, \quad V_1 = -r \cos 2\theta, \quad P_1 = 0. \quad (2.4)$$

楕円筒内の流体が非粘性、非圧縮であることを仮定したとき、攪乱により与えられる速度場 $\mathbf{u}$ 、圧力場 p を支配する方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

となる。そして、「流れは境界を貫通しない」という境界条件

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{at } r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta/2 \quad (2.6)$$

を課す。楕円筒側面の外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n} = (1 - \varepsilon \cos e\theta/2)\mathbf{e}_r + \varepsilon \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta$ とする。攪乱速度 $\mathbf{u}$ を、攪乱振幅をあらわす α と楕円ひずみの強さをあらわす ε の2つのパラメータで漸近展開する：

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_{01} + \alpha^2 \mathbf{u}_{02} + \varepsilon \alpha \mathbf{u}_{11} + \alpha^3 \mathbf{u}_{03} + \dots \quad (2.7)$$

攪乱圧力 p も同様に展開する。軸方向波数 k 、振動数 ω は、楕円ひずみの強さ ε について展開する：

$$k = k_0 + \varepsilon k_1 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (2.8)$$

各オーダー $O(\varepsilon^i \alpha^j)$ で、Euler 方程式と連続の式 (2.5) を導いて、それらを逐次解く。

3 Kelvin 波

円筒まわりの無限小攪乱を Kelvin 波という。Kelvin 波の固有モード表現は

$$\mathbf{u}_{01} = \sum A_m(t) \mathbf{u}_{01}^{(m, k_0)} \exp[i(m\theta + k_0 z)] + c.c., \quad A_m(t) \propto \exp(-i\omega_0 t) \quad (3.1)$$

である。 $c.c.$ は複素共役を表している。 $O(\alpha)$ までは、Euler 方程式と連続の式 (2.5) を打ち切る。適当な計算の後、この方程式は攪乱圧力 $p_{01}^{(m, k_0)}$ の2階の線形微分斉次方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\eta_m^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] p_{01}^{(m, k_0)} = 0 \quad (3.2)$$

に帰着する。中心軸を含む近傍 ($r \rightarrow 0$) で有限となるこの方程式の斉次解は、

$$p_{01} = J_1(\eta_m r), \quad \eta_m = \left[\left(\frac{4}{(\omega_0 - m)^2} - 1 \right) k_0^2 \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

であり、 $u_{01}^{(m, k_0)}$, $v_{01}^{(m, k_0)}$, $w_{01}^{(m, k_0)}$ も同様にベッセル関数で書かれる。

境界条件 (2.6) は波数 k_0 と振動数 ω_0 が満たすべき分散関係

$$J_{m+1}(\eta_m) = \frac{\omega_0 - m - 2}{\omega_0 - m} J_m(\eta_m) \quad (3.4)$$

を与える。

4 非線形相互作用によって誘導される平均流

Euler 方程式の移流項 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ により、Kelvin 波の非線形作用は θ と z に依存しない平均流を生み出す。この直流成分に対しては Euler 方程式の線形作用素が縮退するため、解を決定できない [21]。これを解決する有効な手段が Lagrange 的方法である [6]。

同一の流体粒子群からなる任意の部分系がもつ循環が一定に保たれるよう渦度場の発展を制限した流れ場の集合が *isovortical sheet* である。Arnold [1] は、この制限下では、定常のまわりのエネルギーの第一変分はゼロになることを示した。Hirota & Fukumoto [12] は Lagrange 変数を振幅 α について2次まで展開し、*isovortical sheet* 上に制限された攪乱について $O(\alpha^2)$ のエネルギーの表式を与えた。Fukumoto & Hirota [9] は、波の非線形相互作用によって誘導される $O(\alpha^2)$ の平均流は、エネルギーと同様、1次の Lagrange 変数のみであらわすことができることを示した。

この章では、まず、Kelvin 波の非線形相互作用によって誘起される平均流が、Euler 的方法では求めることが困難であることを示し (§4.1)、Lagrange 的方法によって、平均流やエネルギーがどのように計算されるかをみる (§4.2)。エネルギーの符号と安定性とは密接に関連する。これは、§5 で述べる MSTW 不安定につながっていく。

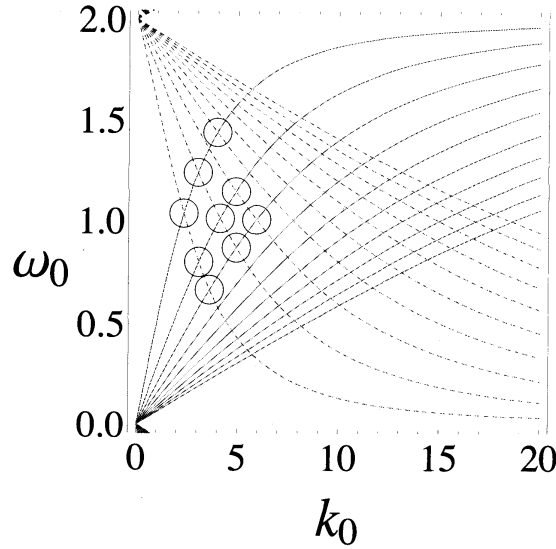


図 1: Kelvin 波の分散関係。赤い実線が $m=0$ (軸対称波) に、青い波線が $m=+2$ に対応する。

4.1 Euler 的方法の限界

単一の Kelvin 波同士の攪乱の非線形相互作用により、 θ と z に依存しない直流成分、すなわち、平均流

$$\overline{u_{02}} = \sum |A_m(t)|^2 \overline{u_{02}}^{(m,k_0)}(r) \quad (4.1)$$

が生じる。 $|A_m|^2 \overline{u_{02}}^{(m,k_0)}(r)$ は Kelvin 波 $A_m u_{01}^{(m,k_0)} \exp[i(m\theta + k_0 z)] + c.c.$ によって誘導される直流成分である。2 次の攪乱 $O(\alpha^2)$ のうち、直流成分 $\exp[i(m\theta + kz)] = \exp[0]$ を支配する Euler 方程式、連続の式 (2.5) は

$$\frac{d\overline{p_{02}}}{dr} - 2\overline{v_{02}} = N_r, \quad (4.2)$$

$$2\overline{u_{02}} = N_\theta, \quad (4.3)$$

$$0 = N_z, \quad (4.4)$$

$$\frac{d\overline{u_{02}}}{dr} + \frac{\overline{u_{02}}}{r} = 0 \quad (4.5)$$

である。ただし、非線形項 N は、 $N = (N_r, N_\theta, N_z) = -\sum |A_m|^2 \left[\left(\overline{u_{02}}^{(m,k_0)} \cdot \nabla \right) \overline{u_{02}}^{(m,k_0)*} + \left(\overline{u_{02}}^{(m,k_0)*} \cdot \nabla \right) \overline{u_{02}}^{(m,k_0)} \right] / 2$ によって与えられる。

上の線形微分方程式には 2 つの可解条件 $N_\theta = N_z = 0$ が必要である。これら可解条件は自動的に満足され、動径方向成分も $\overline{u_{02}} = 0$ と自明解しかもたず、境界条件も自明に満たされるため、有意な情報を何ももたらさない。結局、この方程式は攪乱 2 次の平均流 (= 直流成分) を決定しない； $\overline{u_{02}}$ は勝手にとることができ、程式 (4.2) は、 $\overline{v_{02}}$ と $\overline{p_{02}}$ として勝手な r の関数を許す。

Mason & Kerswell [20] は、Greenspan [10] を頼りに、平均流が存在しないと仮定している。しかし、Kelvin 波を攪乱として初期時刻に導入すると、非線形相互作用も同時に初期に生じるため、平均流がゼロとなるとは考えにくい。

4.2 Lagrange 的方法による平均流の導出

領域 $\mathcal{D}$ の体積保存微分同相写像群を $SDiff(\mathcal{D})$ 、その元である流れ写像を $\phi \in SDiff(\mathcal{D})$ とする。Lagrange 変位 ξ を

$$\xi = \alpha \xi_1 + \frac{\alpha^2}{2} \xi_2 + \dots \quad (4.6)$$

のように攪乱振幅について 2 次 $O(\alpha^2)$ まで展開する。基本回転流の渦度を $\omega_0 = \nabla \times U_0$ とすると、isovortical sheet 上に制限された攪乱速度 (2.7) は、 $O(\alpha^2)$ まで、 $u = \alpha u_{01} + \alpha^2 u_{02}$;

$$u_{01} = \mathcal{P}[\xi_1 \times \omega_0], \quad u_{02} = \mathcal{P}[\xi_1 \times (\nabla \times (\xi_1 \times \omega_0)) + \xi_2 \times \omega_0]/2 \quad (4.7)$$

となる [9]。基本流が定常であるとき、isovortical sheet 上の攪乱により与えられるエネルギー H は

$$H = H_0 + \alpha H_1 + \frac{\alpha^2}{2} H_2 + \dots, \quad (4.8)$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = \int_{\mathcal{D}} \omega_0 \cdot \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} \times \xi_1 \right) dV \quad (4.9)$$

と計算される [12]。攪乱振幅について 2 次のエネルギーは 1 次の Lagrange 変位のみで、これに関連して、平均速度 $\overline{u_{02}}$ も 1 次の Lagrange 変位のみで表現される [9]、すなわち、

$$\overline{u_{02}} = \overline{\mathcal{P}[\xi_1 \times (\nabla \times (\xi_1 \times \omega_0))]/2} \quad (4.10)$$

である。

以下、Kelvin 波 (3.1) に対して、攪乱がもつエネルギー (4.9) と非線形相互作用により誘導される平均流 (4.10) を具体的に計算する。この場合、Lagrange 変位 ξ_1 は、時間発展方程式

$$u_{01} = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + (U_0 \cdot \nabla) \xi_1 - (\xi_1 \cdot \nabla) U_0 \quad (4.11)$$

から、

$$\xi_1 = \sum \frac{iA_m}{\omega_0 - m} u_{01}^{(m, k_0)} + c.c. \quad (4.12)$$

のように速度場攪乱 $u_{01}^{(m, k_0)}$ と関係づけられる。 z 軸方向単位長さあたりのエネルギーは

$$H_{02} = \sum H_{02}^{(m, k_0)}, \quad (4.13)$$

$$H_{02}^{(m, k_0)} = \sum i\omega_0 |A_m|^2 \int_{\mathcal{D}} e_z \cdot \left(\xi_1^{(m, k_0)} \right)^* \times \xi_1^{(m, k_0)} dV = - \frac{8\pi\omega_0(2k_0^2 + m\omega_0 + m^2)J_m(\eta_m)^2}{(\omega_0 - m - 2)(\omega_0 - m)^3(\omega_0 - m + 2)} |A_m|^2 \quad (4.14)$$

と計算できる。分散関係 (3.4) から、任意の波数 k_0 に対して、 $-2 < \omega_0 - m < 2$ であることがわかる。したがって、Kelvin 波の各モードのエネルギー $H_{02}^{(m, k_0)}$ の符号は、 $\omega_0(\omega_0 - m)$ の符号と一致する。定常 Kelvin 波 ($\omega_0 = 0$) がもつエネルギー H_{02} はゼロである。方位波数が $m \geq 1$ の場合、攪乱が剛体回転流の角速度 1 よりも速い角速度で回転するとき (cograde mode)、すなわち分散曲線の上側にのびる枝に対応する Kelvin 波は正のエネルギーをもつ。正のエネルギーであることは、エネルギーをもらうことで攪乱が増幅するということである。剛体回転流の角速度 1 よりも遅い角速度で回転するとき (retrograde mode)、すなわち、分散曲線のうち下側にのびる枝は負のエネルギーである。負のエネルギーであることは、エネルギーを失うことで攪乱が増幅するということである。平均流は

$$\overline{u_{02}} = \overline{\xi \times \frac{\partial \xi}{\partial z}} = \sum 2ik_0 |A_m|^2 \left(\xi^{(m, k_0)} \right)^* \times \xi^{(m, k_0)} \quad (4.15)$$

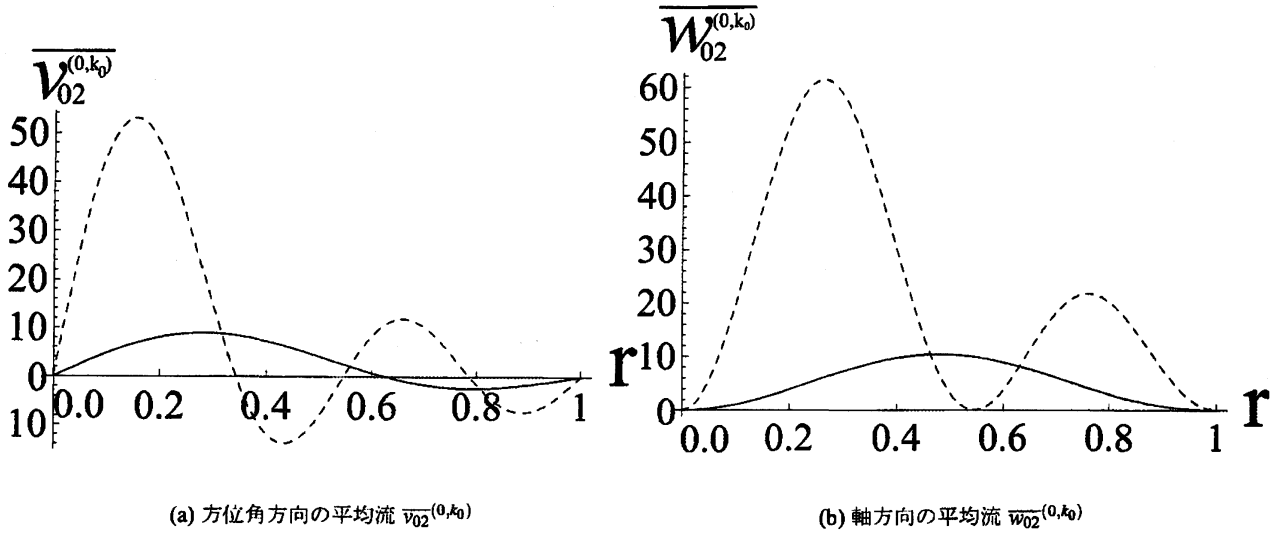


図 2: 方位波数 $m=0$ の Kelvin 波の非線形作用によって誘導される平均流。実線は $(k_0, \omega_0) = (2.326, 1.038)$ のとき、破線は $(k_0, \omega_0) = (4.125, 1.014)$ のとき

となる。この動径成分は $\bar{u}_{02} = 0$ となる。方位角方向、軸方向成分の平均流は、それぞれ、

$$\bar{v}_{02}^{(m,k_0)} = \frac{4k_0^2}{(\omega_0 - m)^2(\omega_0 - m + 2)} J_m(r\eta_m) \left[\frac{m}{(\omega_0 - m)r} J_m(\eta_m) - \frac{\eta_m}{\omega_0 - m - 2} J_{m+1}(r\eta_m) \right], \quad (4.16)$$

$$\bar{w}_{02}^{(m,k_0)} = \frac{4k_0}{(\omega_0 - m)^2(\omega_0 - m + 2)} \times \left[\frac{-m^2}{(\omega_0 - m + 2)r^2} J_m(r\eta_m)^2 + \frac{m\eta_m}{(\omega_0 - m + 2)r} J_m(r\eta_m) J_{m+1}(r\eta_m) + \frac{2k_0^2}{(\omega_0 - m)(\omega_0 - m - 2)} J_{m+1}(r\eta_m)^2 \right] \quad (4.17)$$

となる。

エネルギー (4.14) の被積分関数の形と平均流 (4.15) の形はよく似ている。とくに、 $O(\alpha^2)$ での軸方向への流量

$$J_z = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{u}}_{02} dV \quad (4.18)$$

は時間微分と z 微分の違いだけである。すなわち、作用 (action) を $\mu^{(m,k_0)} = H_{02}^{(m,k_0)} / \omega_0$ で定義したとき、軸流は

$$J_z^{(m,k_0)} = k_0 \mu^{(m,k_0)} \quad (4.19)$$

と書きあらわせる。これは、軸流 J_z が擬運動量 (pseudo-momentum) であることを意味する。

Euler 的方法では、攪乱が生み出す平均流を系統的に決める手立てがなかったため、Sipp [25] は、エネルギー保存を頼りにして、ハミルトンの標準形の形で振幅方程式を書き下そうとした。しかし、Kelvin 波がもつエネルギーを決定できていないので、振幅方程式の最終形には至らず、不定パラメータが 1 つ残されたままになっている。彼は、攪乱 2 次のエネルギーが正であると考えている。しかし、実際には、(4.14) のように、攪乱によるエネルギーは負の値をとることもあり得る。このことは重要である。なぜなら、次章で述べるように、MSTW 不安定は正エネルギーと負エネルギーのモードが共存してはじめて起こるからである [18]。

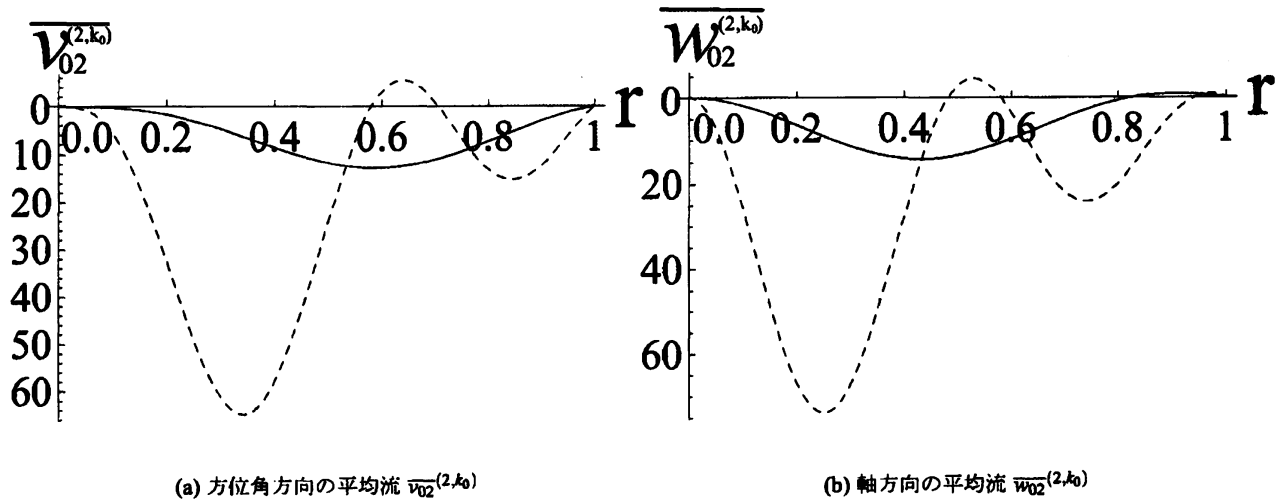


図 3: 方位波数 $m=2$ の Kelvin 波の非線形作用によって誘導される平均流。実線は $(k_0, \omega_0) = (2.326, 1.038)$ のとき、破線は $(k_0, \omega_0) = (4.125, 1.014)$ のとき

5 MSTW 不安定

軸対称回転流に加えられた 3 次元攪乱である Kelvin 波においては、各モードは中立安定である。楕円ひずみの摂動 (2.4) は、この安定性を壊す。一般的に、同一の波数 k_0 、同一の振動数 ω_0 をもち、方位波数 m が 2 異なるモードの組み合わせからなる $(m, m+2)$ モード対が楕円ひずみの摂動により共鳴し合う可能性がある。われわれは $(m, m+2)$ モードの一般的な重ね合わせ [14] として、

$$\begin{aligned} u_{01} = & A_+(t)u_{A+}(r)e^{i(m\theta+kz)} + B_+(t)u_{B+}(r)e^{i(m+2)\theta+kz} \\ & + A_-(t)u_{A-}(r)e^{i(m\theta-kz)} + B_-(t)u_{B-}(r)e^{i(m+2)\theta-kz} + c.c., \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$A_{\pm}, B_{\pm} \propto \exp(-i\omega_0 t) \quad (5.2)$$

を導入する。圧力 p_{01} も u_{01} と同様の形とする。

$O(\varepsilon)$ の楕円ひずみ (2.4) である $\exp[\pm 2i\theta]$ 型摂動の効果は、 $O(\varepsilon\alpha)$ で、

$$\begin{aligned} u_{11} = & u_{11}^{(m-2)}(r, t)e^{i(m-2)\theta}e^{ikz} + u_{11}^{(m)}(r, t)e^{im\theta}e^{ikz} + u_{11}^{(m+2)}(r, t)e^{i(m+2)\theta}e^{ikz} + u_{11}^{(m+4)}(r, t)e^{i(m+4)\theta}e^{ikz} \\ & + u_{11}^{(-m-2)}(r, t)e^{i(m-2)\theta}e^{-ikz} + u_{11}^{(-m)}(r, t)e^{im\theta}e^{-ikz} + u_{11}^{(-m+2)}(r, t)e^{i(m+2)\theta}e^{-ikz} + u_{11}^{(-m+4)}(r, t)e^{i(m+4)\theta}e^{-ikz} \end{aligned} \quad (5.3)$$

というモードを励起する。このうち、 $\exp[i(m\theta \pm k_0 z)]$, $\exp[i(m+2)\theta \pm k_0 z]$ モードに関しては、 $O(\varepsilon\alpha)$ の Euler 方程式、連続の式 (2.5) が一般の非斉次項に対して解をもたない。なぜなら、 $u_{A\pm}$, $u_{B\pm}$ が (2.5) の斉次方程式の解だからである。したがって、可解条件を課す必要がある。この可解条件を満足させるよう u_{01} に対する制限がつけられ、そこから、振動数の摂動 $\varepsilon\omega_1$ が決まる。

$O(\varepsilon\alpha)$ で計算すべき線形微分方程式は、

$$\begin{aligned} -i\omega_0 u_{11} + (U_0 \cdot \nabla) u_{11} + (u_{11} \cdot \nabla) U_0 + \nabla p_{11} \\ = -(U_1 \cdot \nabla) u_{01} - (u_{01} \cdot \nabla) U_1 + i\omega_1 u_{01} - ik_1 p_{01} e_z, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot u_{11} = -ik_1 w_{01} \quad (5.5)$$

である。ここで、円柱座標では、 $\nabla = (\partial/\partial r, \partial/\partial \theta, ik_0)$ である。この方程式は積分できて、解がベッセル関数を用いてあらわに書き下される [7]。

可解条件は、 $O(\varepsilon\alpha)$ の境界条件 (2.6)、すなわち、

$$u_{11} + (du_{01}/dr - u_{01}) \cos 2\theta/2 + v_{01} \sin 2\theta = 0 \text{ at } r = 1 \quad (5.6)$$

から導かれる。 $\omega_0 \neq m+1$ のとき、可解条件は

$$(\omega_1 - p_{21}k_1)A_{\pm} + p_{11}B_{\pm} = 0, \quad (\omega_1 + p_{22}k_1)B_{\pm} - p_{12}A_{\pm} = 0, \quad (5.7)$$

$$p_{11} = -\frac{(\omega_0 - m + 2)(\omega_0 - m)^3(\omega_0 - m - 2)}{32k_0^2(\omega_0 - m - 1)(2k_0^2 + m(\omega_0 + m))} \frac{J_{m+2}(\eta_{m+2})}{J_m(\eta_m)} \times f(r), \quad (5.8)$$

$$p_{12} = \frac{(\omega_0 - m)(\omega_0 - m - 2)^3(\omega_0 - m - 4)}{32k_0^2(\omega_0 - m - 1)(2k_0^2 + (m+2)(\omega_0 + m + 2))} \frac{J_m(\eta_m)}{J_{m+2}(\eta_{m+2})} \times f(r), \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} f(r) = & \omega_0^2(m+1)[k_0^2 + m(m+2)] \\ & - 2\omega_0 m(m+2)[k_0^2 + (m+1)^2] \\ & + (m+1)[k_0^2(m^2 + 2m - 4) + m^2(m+2)^2], \\ p_{21} = & -\frac{(k_0^2 + m^2)(\omega_0 - m - 2)(\omega_0 - m)(\omega_0 - m + 2)}{2k_0(2k_0^2 + \omega_0 m + m^2)}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$p_{22} = \frac{(k_0^2 + (m+2)^2)(\omega_0 - m - 4)(\omega_0 - m - 2)(\omega_0 - m)}{2k_0(2k_0^2 + \omega_0(m+2) + (m+2)^2)} \quad (5.11)$$

と書き下せる。係数 p_{21} と p_{22} は、縮退する任意の $(m, m+2)$ モード対に対して正である。数值的に計算すると、係数 p_{11} と p_{12} は、 $(0, 2)$ モードの共存点において正となる。可解条件 (5.7) が非自明な解 $(A_{\pm}, B_{\pm}) \neq (0, 0)$ に対して満たされるための必要十分条件は

$$(\omega_1 - p_{21}k_1)(\omega_1 + p_{22}k_1) + p_{11}p_{12} = 0 \quad (5.12)$$

である。とくに、線形増幅率 $\varepsilon\sigma_1 = \varepsilon \text{Im}[\omega_1]$ は $k_1 = 0$ のとき最大値 $\varepsilon\sigma_{1\max}$ をとり、その値は

$$\sigma_{1\max} = \sqrt{p_{11}p_{12}} \quad (5.13)$$

である。任意の $(m, m+2)$ モードに関して、 p_{11} と p_{12} は同符号である。これは、すべての $(m, m+2)$ モード対の縮退点で不安定性が起こることを意味している。不安定となる波数の幅 Δk_1 は

$$\Delta k_1 = \sqrt{p_{11}p_{12}/(p_{21}p_{22})} \quad (5.14)$$

である。 $(0, 2)$ モードの共存点のうち、低波数側の 9 個をとりだして、最大増幅率 σ_1 と不安定波数幅 Δk_1 を書き下したものが表 4 である。最大増幅率 σ_1 は $\omega_0 \approx 1$ で、ほかと比べて桁違いに大きいことがわかる。これは、増幅率 $\sigma_{1\max}$ が因数 $(\omega_0 - m - 1)^{-1}$ をもつからである。右・左巻きらせん波対 $(m, m+2) = (-1, 1)$ においては、定常共鳴 ($\omega_0 = 0$) が卓越するが、支配方程式が特異となり、増幅率は

$$\sigma_{1\max} = 3(3k_0^2 + 1)/(8(2k_0^2 + 1)) \quad (5.15)$$

となる [27, 21]。 $(0, 2)$ 共鳴においても、 ω_0 が 1 に近いとき、(5.15) に近い値をとることがわかる。一方、 ω_0 が 1 から離れた点では、波数が大きくなれば $\sigma_{1\max} \rightarrow 0$ となる。

表 4: The growth rate for (0, 2) resonance

k_0	ω_0	σ_{1max}	Δk_1
2.3263273	1.0379349	0.53248518	1.5673371
3.0337202	1.2414779	0.039419061	0.16492150
3.0750456	0.80289243	0.068319356	0.27877281
3.6136886	0.66943637	0.027713333	0.14482768
3.9805207	1.4408914	0.0075116523	0.049319910
4.1249196	1.0136941	0.55094873	2.9587821
4.9117916	1.1470628	0.031889128	0.21045168
4.9293115	0.87207728	0.044659093	0.29266000
5.9276342	1.0068689	0.55659931	4.3431318

次に攪乱のエネルギーについて考えよう。前節で、Euler 的方法ではエネルギーを求めることは困難であるが、Lagrange 変位を導入して isovortical sheet 上に攪乱を制限することによって、エネルギーの計算が可能になることを述べた。Kelvin 波の組み合わせとして、線形攪乱を (5.1) のように導入したとき、攪乱を与えることによって増加したエネルギーは、

$$H_{02} = (|A_+|^2 + |A_-|^2) H_{02}^{(m,k_0)} + (|B_+|^2 + |B_-|^2) H_{02}^{(m+2,k_0)} \quad (5.16)$$

である。分散曲線を描いたとき、 $\exp[i(m\theta + k_0 z)]$ のモードは上向き (retrograde mode)、 $\exp[i((m+2)\theta + k_0 z)]$ のモードは下向き (cograde mode) で、これらの固有値が共存点で衝突する。このことは $H_{02}^{(m,k_0)}$ が正、 $H_{02}^{(m+2,k_0)}$ が負の値をとることを意味する。正と負のエネルギーが共存するとき、負エネルギーモードから正エネルギーモードにエネルギーを渡すことによって、両方が増幅することが可能になる。これが MSTW 不安定のメカニズムである [7, 18]。

式 (4.14), (5.8), (5.9) より、

$$-H_{02}^{(m,k_0)} / H_{02}^{(m+2,k_0)} = p_{12} / p_{11} \quad (5.17)$$

であることに気づく。そして、増幅率 σ_1 が最大になるとき、すなわち $k_1 = 0$ のとき、

$$|B_{\pm}|^2 / |A_{\pm}|^2 = p_{12} / p_{11} \quad (5.18)$$

である。方位波数対 $(m, m+2)$ の Kelvin 波の組み合わせ (5.1) において、最も増幅する共鳴モードに対しては攪乱 2 次のエネルギー (5.16) はちょうど $H_{02} = 0$ となることがわかる。軸流の総流量

$$J_z = (|A_+|^2 - |A_-|^2) J_z^{(m,k_0)} + (|B_+|^2 - |B_-|^2) J_z^{(m+2,k_0)} \quad (5.19)$$

に関してもエネルギーと同様で、 $(m, m+2)$ モードの最大増幅率をとる点で軸流の総量はゼロとなる。

振幅の割合 (5.18) を考慮して、Kelvin 波 (5.1) の非線形作用によって誘導される平均流の方位角方向成分 $\overline{v_{02}}$ と軸方向成分 $\overline{w_{02}}$ をプロットしたのが図 5 である。平均流の軸方向成分は確かに存在する。しかし、その総流量はゼロとなる。

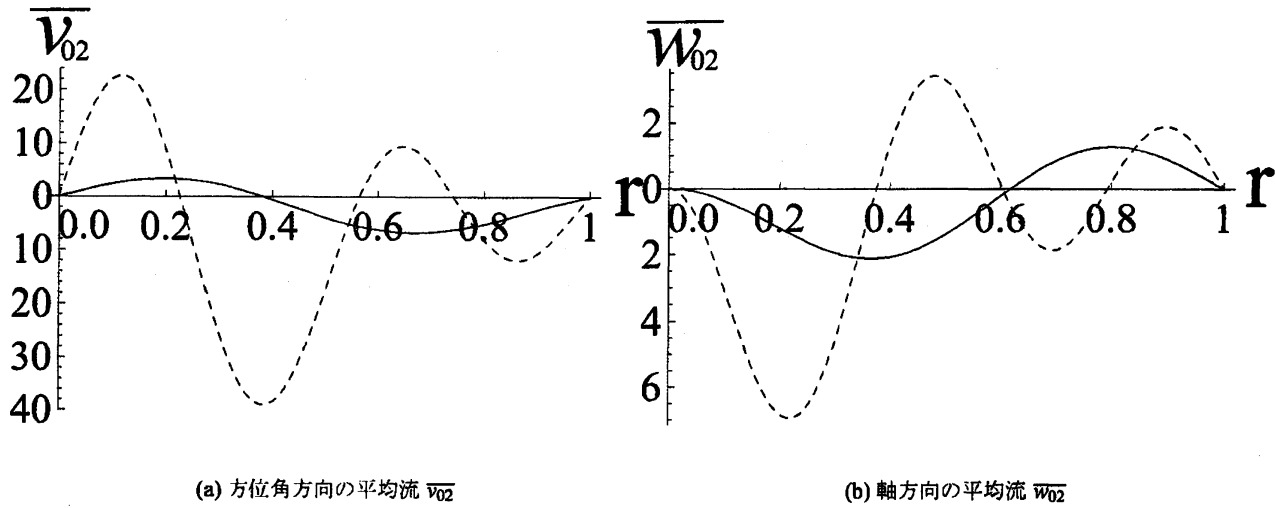


図 5: Kelvin 波 (5.1) の非線形作用によって誘導される平均流。実線は $(k_0, \omega_0) = (2.326, 1.038)$ のとき、破線は $(k_0, \omega_0) = (4.125, 1.014)$ のとき

6 振幅方程式

非線形項導出の詳細については文献 [25, 21] に委ねる。攪乱振幅の 3 次 $O(\alpha^3)$ において、 $O(\alpha)$ と同じ $\exp[i(m\theta + k_0 z)]$ と $\exp[i((m+2)\theta + k_0 z)]$ 型のモードが再び励起され、この 2 つのモードに課せられる可解条件により、振幅方程式の弱非線形項が与えられる。

$O(\alpha)$ の Kelvin 波を (5.1) のように導入したとき、楕円ひずみの効果と合わせた弱非線形振幅方程式は次のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\pm}}{dt} &= i[-\omega_0 A_{\pm} + \varepsilon(p_{11}B_{\pm} - k_1 p_{21}A_{\pm}) + \alpha^2 A_{\pm}(s_{11}|A_{\pm}|^2 + s_{12}|B_{\pm}|^2 + s_{13}|A_{\mp}|^2 + s_{14}|B_{\mp}|^2) + \alpha^2 s_{15}A_{\mp}B_{\pm}\overline{B_{\mp}}], \\ \frac{dB_{\pm}}{dt} &= i[-\omega_0 B_{\pm} + \varepsilon(-p_{12}A_{\pm} + k_1 p_{22}B_{\pm}) + \alpha^2 B_{\pm}(s_{21}|A_{\pm}|^2 + s_{22}|B_{\pm}|^2 + s_{23}|A_{\mp}|^2 + s_{24}|B_{\mp}|^2) + \alpha^2 s_{25}B_{\mp}A_{\pm}\overline{A_{\mp}}] \end{aligned} \quad (6.1)$$

Lagrange 的方法を用いて平均流 (4.15) を導出すると、Sipp [25] の場合と違って、平均流を別途手で導入する必要がない。そして、 $O(\alpha^3)$ での可解条件が、振幅方程式を Hamilton の標準形 [14] の形に導く。これは、平均流の直接的導出によってはじめて可能になる [21]。この方程式は保存量

$$\frac{1}{p_{11}}(|A_+|^2 + |A_-|^2) - \frac{1}{p_{12}}(|B_+|^2 + |B_-|^2) \quad (6.2)$$

をもつ。

以下では、 $p_{11} > 0, p_{12} > 0$ という事実を利用して議論する。変数変換 $z_{1\pm} = A_{\pm}/\sqrt{p_{11}}, z_{2\pm} = \overline{B_{\pm}}/\sqrt{p_{12}}$ を行くと、

$$\begin{aligned} \frac{dz_{1\pm}}{dt} &= i[-\omega_0 z_{1\pm} + \varepsilon\sigma_{1\max}\overline{z_{2\pm}} - \varepsilon p_{21}z_{1\pm} + \alpha^2 z_{1\pm}(c_{11}|z_{1\pm}|^2 + c_{12}|z_{2\pm}|^2 + c_{13}|z_{1\mp}|^2 + c_{14}|z_{2\mp}|^2) + \alpha^2 c_{15}z_{1\mp}\overline{z_{2\pm}}z_{2\mp}], \\ \frac{dz_{2\pm}}{dt} &= -i[-\omega_0 z_{2\pm} - \varepsilon\sigma_1\overline{z_{1\pm}} + \varepsilon p_{22}z_{2\pm} + \alpha^2 z_{2\pm}(c_{21}|z_{1\pm}|^2 + c_{22}|z_{2\pm}|^2 + c_{23}|z_{1\mp}|^2 + c_{24}|z_{2\mp}|^2) + \alpha^2 c_{25}z_{2\mp}\overline{z_{1\pm}}z_{1\mp}] \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。この方程式の係数間に

$$c_{12} = -c_{21}, \quad c_{14} = -c_{23}, \quad c_{25} = -c_{15} \quad (6.4)$$

表 6: The coefficients of amplitude equation Eq. (6.3)

k	2.326	3.075	4.125	5.928
ω_0	1.038	0.8028	1.014	1.007
σ_{1max}	0.5325	0.06832	0.5509	0.5566
p_{21}	0.3260	0.2190	0.1826	0.1268
p_{22}	0.3541	0.2742	0.1899	0.1295
c_{11}	-7.208	-2.330	-46.51	-147.8
c_{12}	12.20	4.530	77.79	249.8
c_{13}	11.11	4.001	73.88	238.3
c_{14}	5.734	-0.4880	24.47	59.17
c_{15}	-2.913	-1.510	-15.18	-31.02
c_{21}	-12.19	-4.530	-78.21	-249.6
c_{22}	11.33	3.109	65.01	199.1
c_{23}	-5.734	0.4880	-24.47	-59.17
c_{24}	-1.749	-1.950	-21.92	-82.42
c_{25}	2.913	1.510	15.19	31.02
$c_{11} + 2c_{12} - c_{22}$	5.862	3.631	44.06	152.7
$c_{13} + 2c_{14} - c_{24}$	20.83	4.975	144.7	439.1

という関係が成立するとき、(6.3) は、ハミルトニアン

$$\begin{aligned}
H(z_{1+}, z_{2+}, z_{1-}, z_{2-}) = & \omega_0 (|z_{1+}|^2 - |z_{2+}|^2 + |z_{1-}|^2 - |z_{2-}|^2) / 2 \\
& + \varepsilon k_1 [p_{21} (|z_{1+}|^2 + |z_{1-}|^2) + p_{22} (|z_{2+}|^2 + |z_{2-}|^2)] / 2 - \varepsilon \sigma_{1max} \text{Re}[z_{1+} z_{2+} + z_{1-} z_{2-}] \\
& - c_{11} (|z_{1+}|^4 + |z_{1-}|^4) / 4 + c_{22} (|z_{2+}|^4 + |z_{2-}|^4) / 4 - c_{13} |z_{1+}|^2 |z_{1-}|^2 / 2 + c_{24} |z_{2+}|^2 |z_{2-}|^2 / 2 \\
& - c_{12} (|z_{1+}|^2 |z_{2+}|^2 + |z_{1-}|^2 |z_{2-}|^2) / 2 - c_{14} (|z_{1+}|^2 |z_{2-}|^2 + |z_{1-}|^2 |z_{2+}|^2) / 2 + c_{25} \text{Re}[z_{1+} z_{2+} \overline{z_{1-} z_{2-}}]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

をもつ正準方程式となる。表 6 は、(0, 2) モードに関して振幅方程式の係数を数値計算した結果である。この計算結果は係数関係 (6.4) をほぼ完全に満足しているように見える。また、エネルギーに関連する H と、軸流の流量に関連する

$$|z_{1+}|^2 - |z_{2+}|^2, \quad |z_{1-}|^2 - |z_{2-}|^2, \tag{6.6}$$

の 3 つの量が正準方程式 (6.3) の保存量となる。方位波数 0 のモードは正のエネルギーをもち、方位波数 2 のモードは負のエネルギーをもつことがハミルトニアン H の符号により確認できる。ハミルトニアン H の主要項 $\omega_0 (|z_{1+}|^2 - |z_{2+}|^2 + |z_{1-}|^2 - |z_{2-}|^2) / 2$ は $O(\alpha^2)$ のエネルギーに相当する。

とくに最大増幅をとるとき、振幅比が (5.18) となることから、

$$|z_{1\pm}|^2 - |z_{2\pm}|^2 = 0. \tag{6.7}$$

とハミルトニアンの主要項がゼロとなるので、 $O(\alpha^2)$ のエネルギーがゼロとなる前節の記述に一致する。同時に軸方向の総流量もゼロになる。以下では、この最も増幅するモードに限定して考える。式 (6.6) から、初期時刻に (6.7) を満足する攪乱を与えると仮定すると、任意の時刻で (6.7) は成り立つ。われわれは

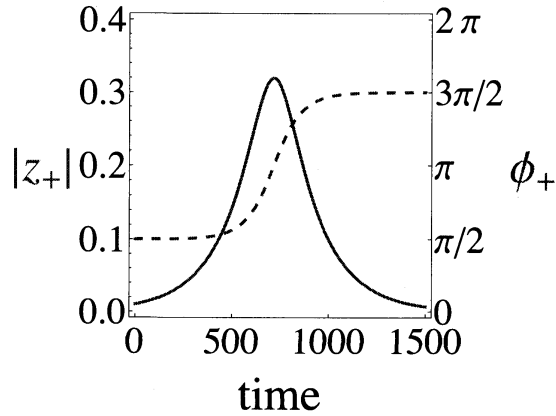


図 7: (6.8) の初期段階での時間発展

$|z_{1+}| = |z_{2+}|$ と $|z_{1-}| = |z_{2-}|$ のそれぞれを $|z_+|$, $|z_-|$ とおいて、さらに $\phi_+ = \arg(z_{1+}z_{2+})$, $\phi_- = \arg(z_{1-}z_{2-})$ とおくと、正準方程式 (6.3) は

$$\begin{aligned} \frac{d|z_{\pm}|}{dt} &= \varepsilon \sigma |z_{\pm}| \sin \phi_{\pm} \mp \alpha^2 c_{25} |z_{\pm}| |z_{\mp}|^2 \sin(\phi_+ - \phi_-), \\ \frac{d\phi_{\pm}}{dt} &= \varepsilon 2\sigma \cos \phi_{\pm} + \alpha^2 [(c_{11} + 2c_{12} - c_{22}) |z_{\pm}|^2 + (c_{13} + 2c_{14} - c_{24}) |z_{\mp}|^2 - 2c_{25} |z_{\mp}|^2 \cos(\phi_+ - \phi_-)] \end{aligned} \quad (6.8)$$

と変形され、8 次元の力学系 (6.3) は 4 次元の力学系に還元される。

図 7 は、初期時刻に振幅を $|z_+| = |z_-| = 0.01$ 、位相を不安定方向 $\phi_+ = \phi_- = \pi/2$ に設定したとき、振幅 (実線) および位相 (破線) の時間発展をグラフに表示したものである。攪乱の振幅が小さい $|z_+| \ll 1$ ときは線形効果が強く、位相 ϕ_+ が不安定方向に傾いて、攪乱振幅は、時間について指数関数的に増幅する。これを物理的に解釈すると、渦度が楕円ひずみの摂動によって引き伸ばされるということである [29]。MSTW 不安定により攪乱が増幅されると、非線形効果の影響が徐々に強くなる。図 7 を見ると、この効果は位相を正の方向に回転させ、不安定方向 $\phi_+ = \pi/2$ から安定方向 $\phi_+ = 3\pi/2$ に位相を急激に変化させている。安定期には攪乱振幅は指数関数的減衰に転じる。位相の回転は、 ϕ_+ に対しては $|z_-|$ がより強く、 ϕ_- に対しては $|z_+|$ がより強く影響することが表 6 の係数により読み取れる。定常らせん波共鳴の場合と異なり、非線形効果が振幅の時間変化にもあらわれる。しかし、結局は定常 Kelvin 波のときと同様に攪乱は飽和する [21]。長時間計算を続けると (図 8)、しばらくこの増幅・減衰を繰り返した後、解はカオス的な振る舞いに移行する。いずれにせよ、攪乱振幅が飽和することには変わりはない。

7 2 次不安定

2 つのモードの共鳴である MSTW 不安定は、それ自身の弱非線形相互作用を考えると成長が止まってしてしまう。実験 [5] では、線形不安定モードが成長しながら、新たなモードを次々に励起した。可能性として、3 波相互作用によって生じる 2 次不安定性が考えられる [13, 20, 8]。Fukumoto, Hattori & Fujimura [8] は

$$\exp[i(\theta \pm \beta z)], \quad \exp[i(3\theta \pm \beta z/2 - \omega_0 t)], \quad \exp[i(4\theta \pm 3\beta z/2 - \omega_0 t)], \quad (7.1)$$

の 3 波が、 $\omega_0 = 3.32$, $\beta \approx 3.286$ で共鳴し合う可能性を指摘した。共鳴点においてのそれぞれのエネルギーはゼロ、正、負となり、正と負のエネルギーが共存することで増幅可能となる。それぞれのモードの振幅

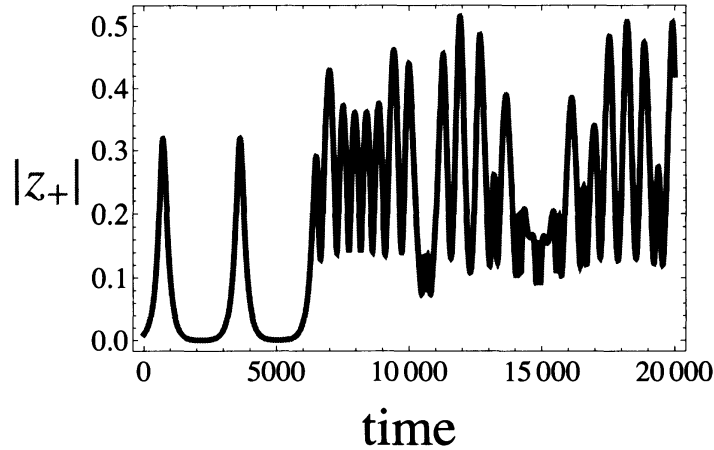


図 8: (6.8) の長時間発展

を $A_{\pm}, B_{\pm}, C_{\pm}$ とすると、弱非線形振幅方程式系は

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\pm}}{dt} &= i \left[\varepsilon (p_{11} \overline{A_{\mp}} + p_{21} k_1 A_{\pm}) + \alpha q_1 \overline{B_{\pm}} C_{\pm} + \alpha^2 (s_{11} |A_{\pm}|^2 + s_{12} |B_{\pm}|^2 + s_{13} |C_{\pm}|^2 + s_{14} |A_{\mp}|^2 + s_{15} |B_{\mp}|^2 + s_{16} |C_{\mp}|^2) \right], \\ \frac{dB_{\pm}}{dt} &= i \left[\varepsilon p_{22} k_1 B_{\pm} + \alpha q_2 \overline{A_{\mp}} C_{\pm} + \alpha^2 (s_{21} |A_{\pm}|^2 + s_{22} |B_{\pm}|^2 + s_{23} |C_{\pm}|^2 + s_{24} |A_{\mp}|^2 + s_{25} |B_{\mp}|^2 + s_{26} |C_{\mp}|^2) \right], \\ \frac{dC_{\pm}}{dt} &= i \left[\varepsilon p_{22} k_1 C_{\pm} + \alpha q_3 A_{\pm} B_{\pm} + \alpha^2 (s_{31} |A_{\pm}|^2 + s_{32} |B_{\pm}|^2 + s_{33} |C_{\pm}|^2 + s_{34} |A_{\mp}|^2 + s_{35} |B_{\mp}|^2 + s_{36} |C_{\mp}|^2) \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

の形をとる。Lagrange 的方法を用いると、平均流に対して特別なパラメータを導入する必要がなくなる。より少ない計算量で、 $O(\alpha^3)$ までの弱非線形振幅方程式を計算することが可能となろう。

8 まとめ

断面が楕円形の筒状容器内の回転流の弱非線形安定性解析を行った。線形攪乱を Kelvin 波の組み合わせにとると、方位波数 $(m, m+2)$ のモード対が楕円ひずみの摂動を受けて共鳴して攪乱が成長する。この不安定のメカニズムを、ハミルトン力学系の Krein 理論の観点から考察した。 $(m, m+2)$ モードの共鳴点において Kelvin 波のエネルギーを計算すると、 m モードは正、 $m+2$ モードは負のエネルギーをもつことがわかり、負エネルギーモードから正エネルギーモードにエネルギーを受け渡しすることによって、エネルギーの総和を保存しながらも攪乱が増幅することがわかった。とくに、最大増幅率をとる共鳴点で m モードと $m+2$ モードのエネルギーを足すとちょうどゼロになることがわかった。

弱非線形振幅方程式は直接ハミルトンの標準形に導ける。これは、Lagrange 変位を導入して攪乱を *isovortical sheet* 上に制限することによって可能となった。らせん波の定常共鳴の場合 [21] にハミルトニアンを与えることができたように、任意の $(m, m+2)$ モード共鳴に対しても変数変換によってハミルトニアン H を具体的に書きあらわせることがわかった。しかし、 $(m, m+2)$ 共鳴モード単独の非線形相互作用だけでは成長を続けることはできない。

実験では、線形不安定性が実現した直後から無数のモードが励起される。 $(m, m+2)$ 共鳴モード単独ではなく、より多くのモードが加わった 2 次、3 次不安定性が楕円渦の崩壊を記述する上で必要となろう。

参考文献

- [1] V. I. Arnold. Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires. *J. Méc.*, 5:29–43, 1966.
- [2] B. J. Bayly. Three-dimensional instability of elliptical flow. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2160–2163, 1986.
- [3] R. A. Cairns. Role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *J. Fluid Mech.*, 92:1–14, 1979.
- [4] S. C. Crow. Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA J.*, 8:2172–2179, 1970.
- [5] C. Eloy, P. L. Gal, and S. L. Dizés. Experimental study of the multipolar vortex instability. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3400–3403, 2000.
- [6] E. Frieman and M. Rotenberg. On hydromagnetic stability of stationary equilibria. *Rev. Mod. Phys.*, 32:898–902, 1960.
- [7] Y. Fukumoto. The three-dimensional instability of a strained vortex tube revisited. *J. Fluid Mech.*, 493:287–318, 2003.
- [8] Y. Fukumoto, Y. Hattori, and K. Fujimura. Weakly nonlinear evolution of an elliptical flow. In *Proc. of the 3rd International Conference on Vortex Flows and Vortex Models (The Japan Society of Mechanical Engineers)*, page 149, 2005.
- [9] Y. Fukumoto and M. Hirota. Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it. *Phys. Scr.*, T132(014041), 2008.
- [10] H. Greenspan. On the non-linear interaction of inertial modes. *J. Fluid Mech.*, 236:257–264, 1969.
- [11] J. Guckenheimer and A. Mahalov. Instability induced by symmetry reduction. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 68:2257–2260, 1992.
- [12] M. Hirota and Y. Fukumoto. Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra. *J. Math. Phys.*, 49(083101), 2008.
- [13] R. R. Kerswell. Secondary instabilities in rapidly rotating fluids: inertial wave breakdown. *J. Fluid Mech.*, 382:283–306, 1999.
- [14] E. Knobloch, A. Mahalov, and J. E. Marsden. Normal forms for three-dimensional parametric instabilities in ideal hydrodynamics. *Physica D*, 73:49–81, 1994.
- [15] M. G. Krein. Ob odnomernoi singulyarnoi kraevoi zadache chetnogo poryadka v intervale (0, infinity). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 74:9–12, 1950.
- [16] T. Lehner, W. Mouhali, J. Leorat, and A. Mahalov. Mode coupling analysis and differential rotation in a flow driven by a precessing cylindrical container. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 104(4):369–401, 2010.
- [17] T. Lewke and C. H. K. Williamson. Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *J. Fluid Mech.*, 360:85–119, 1998.

- [18] R. S. Mackay. Stability of equilibria of hamiltonian systems. *In Nonlinear Phenomena and Chaos*, pages 254–270, 1986.
- [19] W. V. R. Malkus. An experimental study of the grobal instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 48:123–134, 1989.
- [20] D. M. Mason and R. R. Kerswell. Nonlinear evolution of the elliptical instability: an example of inertial wave breakdown. *J. Fluid Mech.*, 396:73–108, 1999.
- [21] Y. Mie and Y. Fukumoto. Weakly nonlinear saturation of stationary resonance of a rotating flow in an elliptic cylinder. *Journal of Math-for-Industry*, A4:27–37, 2010.
- [22] D. W. Moore and P. G. Saffman. Instability of a straiht vortex filament in a strain field. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 346:413–425, 1975.
- [23] R. T. Pierrehumbert. Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2157–2159, 1986.
- [24] S. B. Rodrigues and J. D. Luca. Weakly nonlinear analysis of short-wave elliptical instability. *Phys. Fluids*, 21(014108), 2009.
- [25] D. Sipp. Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained lamb-oseen vortex. *Phys. Fluids*, 12:1715–1729, 2000.
- [26] C. Y. Tsai and S. E. Widnall. The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.*, 66:721–733, 1976.
- [27] V. A. Vladimirov, V. F. Tarasov, and L. Y. Rybak. Stability of elliptically deformed rotation of an ideal incompressible fluid in a coriolis force field. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 19:437–442, 1983.
- [28] F. A. Waleffe. *The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence*. PhD thesis, MIT, 1989.
- [29] F. A. Waleffe. On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluids A*, 2:76–80, 1990.