

共単調加法的非線形汎関数の非加法的測度による積分表示

信州大学・工学部 河邊 淳* (Jun Kawabe)

Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. 共単調加法的汎関数の Daniell-Stone 型積分表示定理として有名な Greco の定理 (G.H. Greco, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 66, 21-42, 1982) から, Riesz 型積分表示定理を導く汎用的な手法を紹介し, それを用いて, 菅野らの積分表示定理 (M. Sugeno et al., Fuzzy Sets and Systems, 99, 205-211, 1998) の改良を与える.

1. はじめに

X を局所コンパクト空間とし, コンパクトな台をもつ X 上の非負実数値連続関数全体を C_{00}^+ で表す. 菅野 [6] らは, 空間 X の局所コンパクト性を用いた直接的な手法で, 単調で正斉次的な共単調加法的汎関数 $I : C_{00}^+ \rightarrow [0, \infty)$ が, 外正則な非加法的測度 $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ に関する Choquet 積分 [2] で表現できることを示した. 彼らの結果は, 非加法的測度による積算概念として重要な Choquet 積分の特徴付け (Riesz 型積分表示) を与えており, 空間 X が必ずしも局所コンパクトでない場合や, 汎関数の定義空間が C_{00}^+ 以外の場合にも, その成立性を吟味することは, 非加法的測度論における重要な課題の一つである. この論文では, Greco 定理 [4] (Daniell-Stone 型積分表示定理) から Riesz 型積分表示定理を導く汎用的な手法を紹介し, それを用いて, 菅野らの積分表示定理の改良を与える.

2. 記号と準備

以下では, $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0, \infty]$ とする. また, X は空でない集合とし, X の部分集合全体からなる集合族を 2^X で, 集合 $A \subset X$ の定義関数を χ_A で表す.

定義 1. 集合関数 $\mu : 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ は, (i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ を満たすとき, X 上の非加法的測度という.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28C05; Secondary 28A12, 28C15, 28E10.

Key words and phrases. nonadditive measure, comonotonic additivity, Choquet integral, Riesz type integral representation theorem.

*Research supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 20540163, Japan Society for the Promotion of Sciences (JSPS).

定義 2. μ は X 上の非加法的測度とする. 関数 $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ の μ に関する Choquet 積分を, Lebesgue 積分を用いて

$$(C) \int_X f d\mu := \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) dt$$

で定義する.

関数 $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は, 任意の $x, x' \in X$ に対して, $f(x) < f(x')$ ならば $g(x) \leq g(x')$ が成り立つとき, 共単調であるといい, $f \sim g$ で表す. Greco は 1982 年の論文 [4] で, 共単調関数に対して加法的な汎関数に関する Daniell-Stone 型の積分表示定理を与えた.

Greco 定理. 関数 $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ からなる空でない関数族 \mathcal{F} が

(i) $0 \in \mathcal{F}$

(ii) $f \geq 0$ for $\forall f \in \mathcal{F}$ (非負性)

(iii) $f \in \mathcal{F}$, $c \in \mathbb{R}^+$ ならば $cf, f \wedge c, f - f \wedge c = (f - c)^+ \in \mathcal{F}$ (Stone の条件) を満たすとする. また, 汎関数 $I: \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は

(iv) $I(0) = 0$

(v) $f, g \in \mathcal{F}$ で $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$ (単調性)

(vi) $f, g \in \mathcal{F}$, $f + g \in \mathcal{F}$ かつ $f \sim g$ ならば $I(f + g) = I(f) + I(g)$ (共単調加法的性)

(vii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して $\lim_{a \rightarrow +0} I(f - f \wedge a) = I(f)$

(viii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して $\lim_{b \rightarrow \infty} I(f \wedge b) = I(f)$

を満たすとする. 各 $A \subset X$ に対して

$$\alpha(A) := \sup\{I(f) : f \in \mathcal{F}, f \leq \chi_A\}$$

$$\beta(A) := \inf\{I(f) : f \in \mathcal{F}, \chi_A \leq f\}$$

で集合関数 $\alpha, \beta: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ を定義する. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ と約束する.

(1) α, β は X 上の非加法的測度で $\alpha \leq \beta$.

(2) X 上の非加法的測度 λ に対して, 次の条件は同値:

(a) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

(b) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $I(f) = (C) \int_X f d\lambda$.

注意 1. Greco 定理において, (v) と (vi) より, I の正斉次性, すなわち, 任意の $f \in \mathcal{F}$ と $c \in \overline{\mathbb{R}}^+$ に対して $I(cf) = cI(f)$ が導ける ([4], [5] を見よ).

3. 汎用的手法

次の定理は, Greco 定理から Riesz 型 Choquet 積分表示定理を導く汎用的手法を与える.

定理 1. Greco 定理と同じ記号を用いる.

(1) 関数族 \mathcal{F} と汎関数 I が

$$(i) \forall f \in \mathcal{F}, \exists g \in \mathcal{F}, \chi_{\{f>0\}} \leq g \text{ かつ } I(g) < \infty$$

を満たせば, Greco 定理の (vii) が成立する.

(2) 関数族 \mathcal{F} が

$$(ii) \forall f \in \mathcal{F} \text{ に対して } f \text{ は有界}$$

を満たせば, Greco 定理の (viii) が成立する.

4. RIESZ 型積分表示定理

以下, この章を通じて, X は局所コンパクト空間とし, コンパクトな台をもつ X 上の非負実数値連続関数全体を C_{00}^+ で表す. また, $S(f)$ は関数 f の台, すなわち, 集合 $\{f \neq 0\}$ の X における閉包とする.

まず初めに, 菅野らの積分表示定理 [6] を, この論文で使用している用語, 記号を用いて紹介する.

定理 2. 汎関数 $I : C_{00}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$(i) f, g \in C_{00}^+ \text{ で } f \leq g \text{ ならば } I(f) \leq I(g)$$

$$(ii) f, g \in C_{00}^+ \text{ で } f \sim g \text{ ならば } I(f+g) = I(f) + I(g)$$

$$(iii) f \in C_{00}^+ \text{ で } c \in \mathbb{R}^+ \text{ ならば } I(cf) = cI(f)$$

を満たすとする. 各 $A \subset X$ に対して

$$\gamma(A) := \sup\{I(f) : f \in C_{00}^+, 0 \leq f \leq 1, S(f) \subset A\}$$

$$\gamma^*(A) := \inf\{\gamma(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$$

で集合関数 $\gamma, \gamma^* : 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ を定義する. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ と約束する.

(1) 集合関数 γ, γ^* は X 上の非加法的測度.

(2) 任意のコンパクト集合 K に対して $\gamma^*(K) < \infty$.

(3) 任意の開集合 G に対して $\gamma^*(G) = \sup\{\gamma^*(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト}\}$.

(4) 任意の集合 A に対して $\gamma^*(A) = \inf\{\gamma^*(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$.

(5) 任意の $f \in C_{00}^+$ に対して $I(f) = (C) \int_X f d\gamma = (C) \int_X f d\gamma^*$.

注意 2. (1) 原論文 [6] では, γ は X の開集合全体上で, γ^* は X のボレル集合からなる σ -集合体上で定義されているが, 実際には, 定理 2 のように, それらの定義域を 2^X 上に拡大できる.

(2) 注意 1 で述べたように, 定理 2 の (iii) は, (i) と (ii) より自動的に導かれる.

Greco 定理と定理 1 より, 定理 2 の改良を与えることができる.

定理 3. 汎関数 $I : C_{00}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$(i) f, g \in C_{00}^+ \text{ で } f \leq g \text{ ならば } I(f) \leq I(g)$$

(ii) $f, g \in C_{00}^+$ で $f \sim g$ ならば $I(f+g) = I(f) + I(g)$ を満たすとする. 各 $A \subset X$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha(A) &:= \sup\{I(f) : f \in C_{00}^+, f \leq \chi_A\} \\ \beta(A) &:= \inf\{I(f) : f \in C_{00}^+, \chi_A \leq f\} \\ \gamma(A) &:= \sup\{I(f) : f \in C_{00}^+, 0 \leq f \leq 1, S(f) \subset A\} \\ \alpha^*(A) &:= \inf\{\alpha(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\} \\ \beta^*(A) &:= \sup\{\beta(K) : K \subset A, K \text{ はコンパクト}\} \\ \gamma^*(A) &:= \inf\{\gamma(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}\end{aligned}$$

で集合関数 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^* : 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ を定義する. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ と約束する.

- (1) 集合関数 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ は X 上の非加法的測度.
- (2) X 上の非加法的測度 λ に対して, 次の条件は同値:
 - (a) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.
 - (b) 任意の $f \in C_{00}^+$ に対して $I(f) = (C) \int_X f d\lambda$.
- (3) 任意のコンパクト集合 K に対して $\gamma^*(K) = \beta(K) = \beta^*(K) < \infty$.
- (4) 任意の開集合 G に対して $\gamma^*(G) = \sup\{\gamma^*(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト}\}$.
- (5) 任意の集合 A に対して $\gamma^*(A) = \inf\{\gamma^*(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$.
- (6) 任意の集合 A に対して $\beta^*(A) = \sup\{\beta^*(K) : K \subset A, K \text{ はコンパクト}\}$.
- (7) 任意のコンパクト集合 K に対して $\beta^*(K) = \inf\{\beta^*(G) : K \subset G, G \text{ は開集合}\}$.
- (8) 任意の開集合 G に対して $\beta^*(G) = \gamma(G) = \gamma^*(G)$.
- (9) $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ は比較可能, すなわち, $\alpha = \gamma \leq \beta^* \leq \alpha^* = \gamma^* \leq \beta$. それゆえ, これらはすべて I の表現測度となる.

注意 3. 菅野らが [6] で構成した非加法的測度は γ^* である.

5. おわりに

この論文では, Greco 定理と定理 1 を用いて, 菅野らの Riesz 型積分表示定理の改良と, その別証明を与えた. 実際には, われわれの汎用的な手法を用いれば, 様々な関数空間や数列空間上の共単調加法的な汎関数に対する Riesz 型積分表示定理が得られる.

参考文献

- [1] S.K. Berberian, Measure and Integration, Macmillan, New York, 1965
- [2] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier Grenoble 5 (1953-54) 131-295.

- [3] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral*, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [4] G.H. Greco, Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 66 (1982) 21–42.
- [5] Y. Narukawa, T. Murofushi, M. Sugeno, Regular fuzzy measure and representation of comonotonically additive functional, *Fuzzy Sets and Systems* 112 (2000) 177–186.
- [6] M. Sugeno, Y. Narukawa, T. Murofushi, Choquet integral and fuzzy measures on locally compact space, *Fuzzy Sets and Systems* 99 (1998) 205–211.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF ENGINEERING
SHINSHU UNIVERSITY
4-17-1 WAKASATO, NAGANO 380-8553, JAPAN
E-mail address: jkawabe@shinshu-u.ac.jp