数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 162-171

On a continuous function constructed by the triangle inequalities and its applications

静岡大学・教育　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Faculty of Education, Shizuoka University
横浜国立大学・教育学研究科　峰野宏祐 (Kosuke Mineno)
Graduate schools of Education, Yokohama National University
深良中学校　中村 有花 (Yuka Nakamura)
Fukara junior high school
韮山中学校　中村 紗緒里 (Saori Nakamura)
Nirayama junior high school
美和中学校　田宮 千裕 (Chihiro Tamiya)
Miwa junior high school

1 序

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間としたとき, 三角不等式とは 2 個の元 $x_1, x_2 \in X$ に関するノルム不等式

$$\|x_1 + x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\|$$

をいうが, ここでは, この一般化である n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に関する以下のノルム不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

もやはり三角不等式と呼ぶことにする. 三角不等式の有用性については改めて説明する必要はないであろうが, この基本的な不等式に関して現在でも多くの研究がなされている [1–3, 10, 14]. 三角不等式に関する, 我々の関心は以下の問題にある.

問題 1.1　ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に対して,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + D \tag{1}$$

をみたす正の値 C, D を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

この左側の不等式を**精密化された三角不等式**といい, 右側の不等式を三角不等式の**逆不等式**という. この問題の1つの解として, $n=2$ の場合 1992 年に Hudzik と Landes は [6] の中で次の不等式を与えている.

定理 1.2 ([6], Lemma 1) ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の0でない2個の元 x_1, x_2 に対して, 以下のノルム不等式が成り立つ.

$$\|x_1 + x_2\| + \left(2 - \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|\right) \min\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \leqq \|x_1\| + \|x_2\|.$$

その後, 2005 年に加藤-斎藤-田村 [7] はバナッハ空間の幾何学的な性質の特徴づけに関連して, Hudzik-Landes の不等式 (定理 1.2) を n 個の場合へ拡張するとともに, その逆不等式も与えた.

定理 1.3 ([7], Lemma 2, [9], Theorem 1) バナッハ空間 X の0でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1\leqq i\leqq n} \|x_i\| \\
&\leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \\
&\leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1\leqq i\leqq n} \|x_i\|
\end{aligned}$$

この不等式の成功に誘発されて, その後様々な設定のもとで三角不等式の精密化や逆不等式の研究が進んでいる. (cf. [4, 5, 11–13])

さて, 問題 1.1 の不等式 (1) は

$$0 \leqq C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq D$$

と見直すことが出来るので, 我々の問題は三角不等式から定まる正定数 $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|$ の前後の全ての正の値を特徴づけることである. この意味において, 定理 1.3 は

$$\begin{aligned}
&\left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1\leqq i\leqq n} \|x_i\| \\
&\leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \\
&\leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1\leqq i\leqq n} \|x_i\|
\end{aligned}$$

であるので, $\sum_{i=1}^n \|x_i\| - \|\sum_{i=1}^n x_i\|$ の前後の正定数をそれぞれ一つずつ与えているに過ぎないが, 多くの応用をもつ有用性から, それ自身とても興味深い結果と言える. そこで我々は, $[0,\infty)$ に値をとる連続関数で, その中間値として

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|$$

をとるものを, そして更には定理 1.3 の正定数

$$\left(n - \left\|\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \quad および \quad \left(n - \left\|\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$$

をとるものを構成するとともに, その図形的な意味も解説することを目的とする.

2 連続関数 ($n = 2$ の場合)

この章では, ノルム空間 X の 2 個の元によって構成される連続写像とその性質について述べる.

命題 2.1 ノルム空間 X の任意の元 x_1, x_2 に対して, 次の (i),(ii) が成立する.

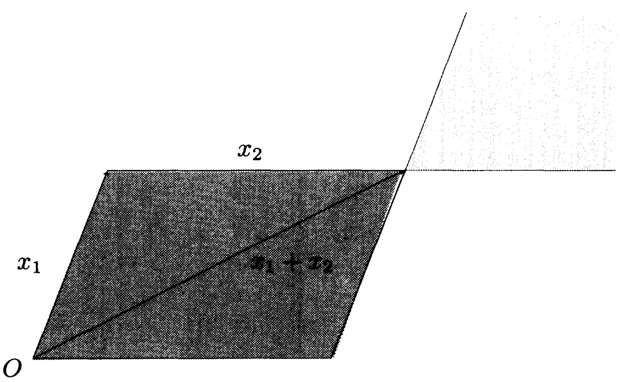
(i) $[0,1] \times [0,1]$ に含まれる全ての (s_1, s_2) に対して,

$$\|s_1 x_1\| + \|s_2 x_2\| - \|s_1 x + s_2 x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\| - \|x_1 + x_2\|.$$

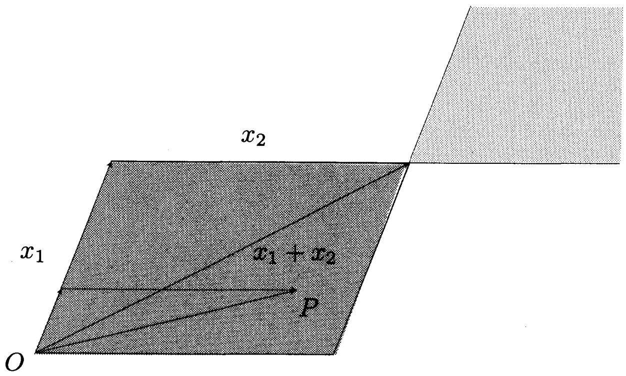
(ii) $[1,\infty) \times [1,\infty)$ に含まれる全ての (t_1, t_2) に対して,

$$\|x_1\| + \|x_2\| - \|x_1 + x_2\| \leqq \|t_1 x_1\| + \|t_2 x_2\| - \|t_1 x_1 + t_2 x_2\|.$$

これらの不等式を理解するために, $X = \mathbb{R}^2$ の設定のもとで X の 2 つの平行でない元 x_1, x_2 で構成される平行四辺形を考える.

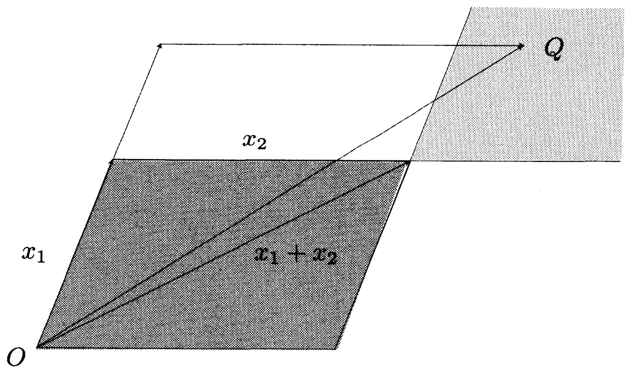


ことのき不等式 (i) は, x_1 と x_2 で作られる平行四辺形の内部に点 P をどのように選んでも, 2 点 O, P を頂点にもつ三角形に関する三角不等式の差分は, x_1, x_2 および $x_1 + x_2$ で作



られる三角形に関する三角不等式の差分 $(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|)$ を超えないことを示している. (ただし, 内部の三角形の 2 辺は, それぞれ x_1, x_2 に平行である)

これに対して, 不等式 (ii) は x_1 と x_2 をそれぞれ 1 倍以上して作られる平行四辺形の外側の領域内に, 点 Q をどのように選んでも, 2 点 O, Q を頂点にもつ三角形に関する三角不等式の差分は, x_1, x_2 および x_1+x_2 で作られる三角形に関する三角不等式の差分を超えることを示している. (ただし, 外部の三角形の 2 辺は, それぞれ x_1, x_2 に平行である)



命題 2.1 の範囲は本質的であり, それ以外の範囲ではこれらの不等式は成立しない.

例 2.2 $X=\mathbb{R}^2$ とし, $x_1=(0,1)$, $x_2=(2,0)$ ととる. このとき x_1, x_2 および x_1+x_2 に関する三角不等式の差分は

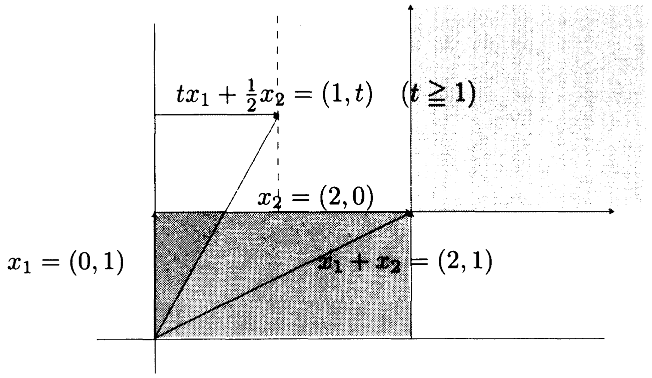
$$\|x_1\|+\|x_2\|-\|x_1+x_2\|=3-\sqrt{5}\fallingdotseq 0.7639$$

であるが, tx_1, $\frac{1}{2}x_2$ および $tx_1+\frac{1}{2}x_2$ に関する三角不等式の差分は

$$\begin{aligned}0.5857\fallingdotseq 2-\sqrt{2}\leqq \|tx_1\|+\left\|\frac{1}{2}x_2\right\|-\left\|tx_1+\frac{1}{2}x_2\right\|\\ =t+1-\sqrt{1+t^2}\leqq 1\end{aligned}$$

より, $1\leqq t$ の範囲で $2-\sqrt{2}$ と 1 の間の値を連続的に変化する. すなわち, $[1,\infty)\times[0,1]$

においては $\|tx_1\| + \left\|\dfrac{1}{2}x_2\right\| - \left\|tx_1 + \dfrac{1}{2}x_2\right\|$ の値は $\|x_1\| + \|x_2\| - \|x_1 + x_2\|$ の値より大きくも小さくもなることがわかる．



$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上で f_2 は**単調増加である**とは，(s_1, s_2), $(t_1, t_2) \in D$ が $s_1 \leqq t_1$ かつ $s_2 \leqq t_2$ を満たすとき，

$$f_2(s_1, s_2) \leqq f_2(t_1, t_2)$$

であるときをいう．

命題 2.1 より，我々は次の定理を得る．

定理 2.3 ノルム空間 X の任意の元 x_1, x_2 をとり固定する．このとき，$(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f_2(s_1, s_2) = \|s_1x_1\| + \|s_2x_2\| - \|s_1x_1 + s_2x_2\|$$

とすれば，f_2 は $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数であり，$[0,\infty) \times [0,\infty)$ 上で単調増加である．

いま，f_2 の定義より明らかに

$$f_2(0,0) = 0, \qquad f_2(1,1) = \|x_1\| + \|x_1\| - \|x_1 + x_2\|$$

であり，$x_1, x_2 \in X$ が $0 < \|x_1\| \leqq \|x_2\|$ であるとき，

$$0 < \frac{\|x_1\|}{\|x_2\|} \leqq 1 \leqq \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}$$

となるので，定理 2.3 から以下の不等式を得る．

$$0 = f_2(0,0) \leqq f_2\left(\frac{\|x_1\|}{\|x_2\|}, 1\right) \leqq f_2(1,1) \leqq f_2\left(1, \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}\right).$$

よって，

$$f_2\left(\frac{\|x_1\|}{\|x_2\|}, 1\right) = \left(2 - \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|\right)\|x_1\|$$

$$f_2\left(1, \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}\right) = \left(2 - \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|\right)\|x_2\|$$

より次の系を得る．

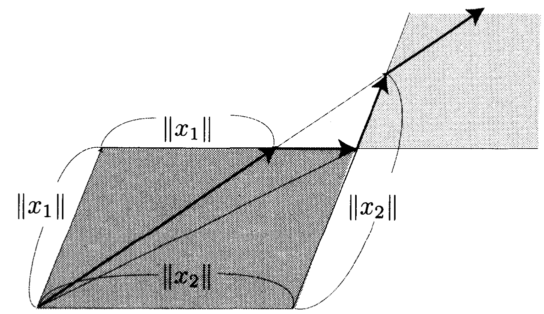
系 2.4 (cf. 定理 1.3) ノルム空間 X の任意の元 x_1, x_2 が $0 < \|x_1\| \leqq \|x_2\|$ を満たすとき, 次の不等式が成立する.

$$0 \leqq \left(2 - \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|\right)\|x_1\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\| - \|x_1 + x_2\| \leqq \left(2 - \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|\right)\|x_2\|$$

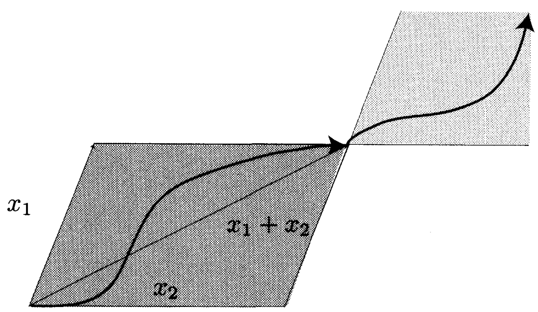
実際には, 変数 (s_1, s_2) を以下のようにとれば, f_2 は 1 変数関数とすることが出来る.

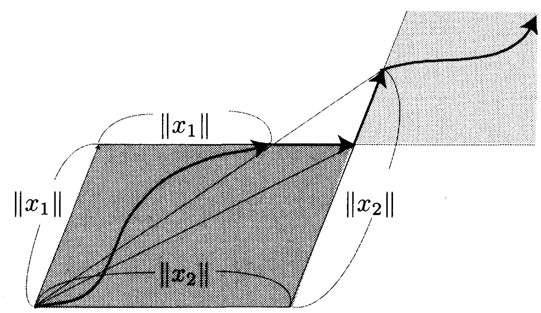
$$(s_1^t,\, s_2^t) = \begin{cases} \left(\frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}t,\, t\right) & (0 \leqq t \leqq \frac{\|x_1\|}{\|x_2\|}) \\ (1,\, t) & (\frac{\|x_1\|}{\|x_2\|} \leqq t \leqq 1) \\ (t,\, 1) & (1 \leqq t \leqq \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}) \\ (t,\, t) & (\frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} \leqq t) \end{cases}$$

このとき, 系 2.4 における f_2 を表す三角形の 1 つの頂点は下図の矢印のように動いている.



この矢線のように, 変数 (s_1, s_2) が $0 \leqq s_1,\ s_2$ を満たすように連続的に変化するときに, f_2 をあらわす三角形の 1 つの頂点 $s_1x_1 + s_2x_2$ の軌跡を **f_2 のパス**と呼ぶことにする. 定理 2.3 より, $x_1 + x_2$ を通り単調増加であるような全ての f_2 のパスは, 精密化された三角不等式および逆不等式を与えていて, 特に $x_1 + \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}x_2$ および $\frac{\|x_1\|}{\|x_2\|}x_1 + x_2$ を通るパスを考えたとき, 系 2.4 の不等式を中間値として含んでいる.





いま, x_1, x_2 が $\|x_1\| + \|x_2\| - \|x_1 + x_2\| \neq 0$ のときは $\lim_{s_1 \to \infty,\, s_2 \to \infty} f_2(s_1, s_2) = \infty$ を満たす. よって我々は定理 2.3 の応用として, 問題 1.1 の解を以下のように与える事が出来る.

系 2.5 ノルム空間 X の元 x_1, x_2 が $\|x_1\| + \|x_2\| - \|x_1 + x_2\| \neq 0$ を満たすとする．このとき，負でない任意の実数 ω に対して，$(s_1^0, s_2^0) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ が存在して

$$\omega = f_2(s_1^0, s_2^0)$$

をみたす．

3 連続関数 (一般の場合)

前章で我々は連続関数による三角不等式の特徴づけの基本的なアイデアを述べた．この章では，一般の場合における結果を述べる．

命題 3.1 ノルム空間 X の任意の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，次の (i),(ii) が成立する．

(i) $\prod_{i=1}^n [0,1]$ に含まれる全ての $(s_1, \cdots, s_n)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^n \|s_i x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^n s_i x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^n \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|.$$

(ii) $\prod_{i=1}^n [1,\infty)$ に含まれる全ての $(t_1, \cdots, t_n)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^n \|t_i x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^n t_i x_i\right\|.$$

$\mathbb{R}^n$ 上の関数 f が $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D 上で**単調増加であるとは**，$(s_1, \cdots, s_n), (t_1, \cdots, t_n) \in D$ が $s_i \leqq t_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を満たすとき，

$$f(s_1, \cdots, s_n) \leqq f(t_1, \cdots, t_n)$$

であるときをいう．

命題 3.1 より，我々は定理 2.2 の拡張として次の定理を得る．

定理 3.2 ノルム空間 X の任意の元 $x_1, \cdots, x_n$ をとり固定する．このとき，$(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して f_n を

$$f_n(s_1, \cdots, s_n) = \sum_{i=1}^n \|s_i x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^n s_i x_i\right\|$$

とすれば，f_n は $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数であり，$\prod_{i=1}^n [0,\infty)$ 上で単調増加である．

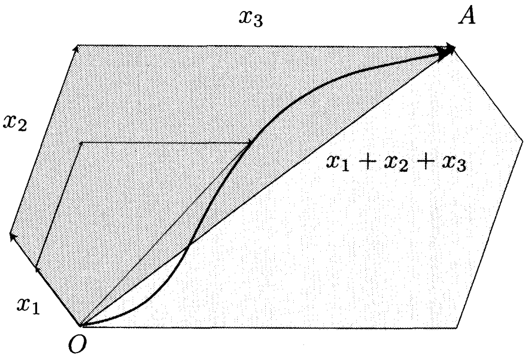
これより直ちに我々は定理 1.3 を得ることができる．

系 3.3 (cf. 定理 1.3) ノルム空間 X の 0 でない任意の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対して，次の不等式が成立する．

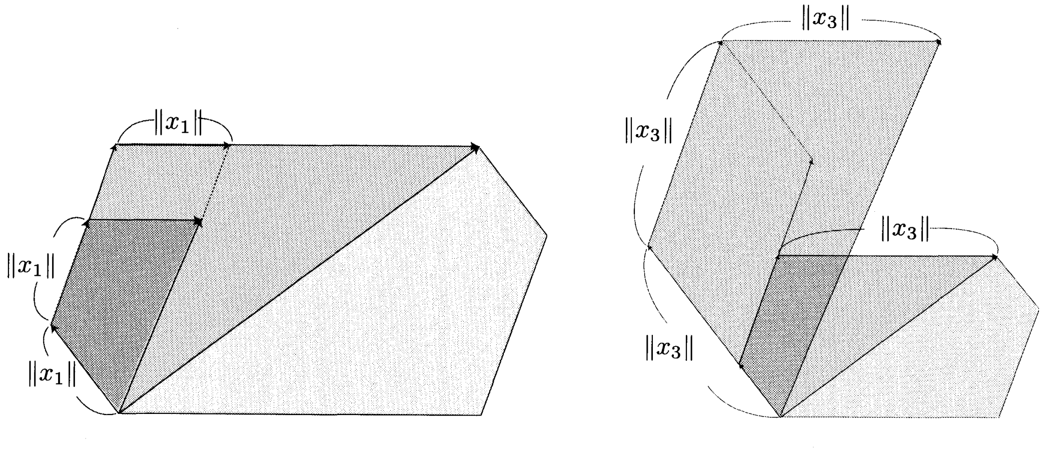
$$0 \leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \leqq \sum_{i=1}^n \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$$

一般の場合にも, $X=\mathbb{R}^2$ としたとき, f_n のパスを考えることができるが, 実際には $n=3$ の場合を理解すれば十分である.

例 3.4 $X=\mathbb{R}^2$ とする. このとき X の平行ではない元 $x_1,\ x_2,\ x_3$ を $0<\|x_1\|\leqq\|x_2\|\leqq\|x_3\|$ ととり, それらのベクトルから定まる六角形を考える. ここでは簡単のために, 下図のような六角形を考えるが, 一般にどのようなベクトルを選んでも六角形が一つ決まる. このとき, この六角形の内部を点 O から, 点 A まで連続的に変化する (四角形の) 頂点 $s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3$ の軌跡である f_3 のパスを考えれば, そのパス上にひとつの頂点をもつ四角形に関する三角不等式の差分は, $x_1,\ x_2,\ x_3$ および $x_1+x_2+x_3$ で決まる四角形に関する三角不等式の差分 $\sum_{i=1}^3\|x_i\|-\|\sum_{i=1}^3 x_i\|$ を超えない.

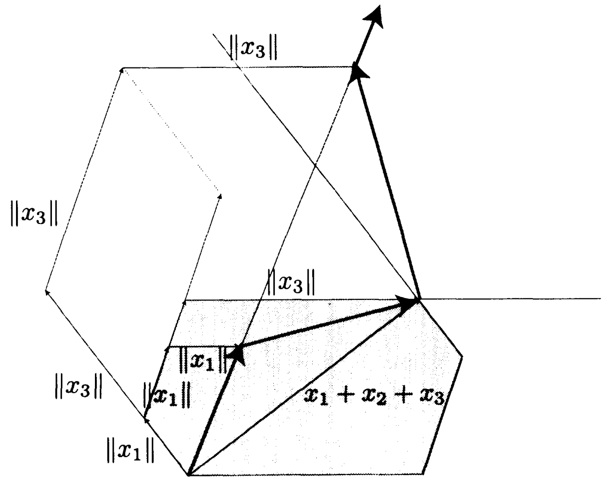


そして, 三辺の長さが $x_1,\ x_2,\ x_3$ の中で全て一番短い長さ (いまの場合は $\|x_1\|$) と等しいときが, 定理 1.3 の $n=3$ の場合における精密化された三角不等式を表わし, 三辺の長さが $x_1,\ x_2,\ x_3$ の中で一番長い長さ (いまの場合は $\|x_3\|$) と全て等しいとき, 逆不等式を表している.



精密化された三角不等式　　　　逆不等式

変数の取り方は省略するが, 下図の矢印が一変数で f_3 のパスを表している.



n 個の場合も, 同様に一番短い長さで合わせたものが定理 1.3 の精密化された三角不等式を表わし, 一番長い長さで合わせたものが逆不等式を与えている.

最後に我々は定理 3.2 の応用として, 問題 1.1 の解を以下のように得ることができた.

系 3.5 ノルム空間 X の元 $x_1, \cdots, x_2$ が $\sum_{i=1}^n \|x_i\| - \|\sum_{i=1}^n x_i\| \neq 0$ を満たすとする. このとき, 任意の負でない実数 ω に対して, $(s_1^0, \cdots, s_n^0) \in \prod_{i=1}^n [0, \infty)$ が存在して

$$\omega = f_n(s_1^0, \cdots, s_n^0)$$

をみたす.

参考文献

[1] A.H. Ansari and M.S. Moslehian, *More on reverse triangle inequality in inner products spaces*, Int. J. Math. Math. Sci. (2005), no.18, 2883–2893.

[2] S.S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in Banach spaces*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **6**(5)(2005), Art. 129, pp. 46.

[3] S.S. Dragomir, *Generalizations of the Pečarić-Rajić inequality in normed linear spaces*, Math. Inequal. Appl. **12** no.1 (2009), 53–65.

[4] M. Fujii, M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp mean triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. **13**(2010), no.4, 743–752.

[5] C.-Y. Hsu, S.-Y. Shaw and H.-J. Wong, *Refinements of generalized triangle inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **344**(2008), 17–31.

[6] H. Hudzik and T.R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces*, Math. Ann. **294**(1992), 117–124.

[7] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Uniform non-ℓ_1^n-ness of ψ-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$,* Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 1452(2005), 227–232.

[8] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Uniform non-ℓ_1^n-ness of ψ-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$,* J. Nonlinear Conv. Anal. **11**(2010), no. 1, 13–33.

[9] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[10] M.S. Martirosyan and S.V. Samarchyan, *Inversion of the triangle inequality in $\mathbb{R}^n$*, (Russian. English, Russian summary) Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **38** (2003), no. 4, 65–72; translation in J. Contemp. Math. Anal. **38** (2003), no. 4, 56–61.

[11] K. Mineno, Y. Nakamura and T. Ohwada, *On the intermediate value of the triangle inequality and its applications*, submitted.

[12] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle inequalities in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[13] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, *On sharp triangle inequalities in Banach spaces II,* J. Inequal. Appl., (2010), Art. ID 323609, 17pp.

[14] S. Saitoh *Generalizations of the triangle inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4**(2003), no. 3, Article 62, 5 pp.