

JUNGCK による縮小写像の不動点定理の拡張定理

九州工業大学

鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

本稿では論文 [23] の解説を書く。本稿のタイトルから容易に想像できるが、この論文では縮小写像の不動点定理の拡張定理が証明されている。まず、縮小写像の不動点定理に関する小歴史を述べ、そして本題に入る。

2. 縮小写像の不動点定理

筆者が「不動点定理」と聞いて思い浮かべるのは、Brouwer の不動点定理 [2]、縮小写像の不動点定理 [1]、非拡大写像の不動点定理 [3] の 3 つである。面白いことにこれらの定理を証明した 3 人の名前はすべて B で始まる: Brouwer, Banach, Browder. 3 つの定理の証明に際し、距離完備性は非常に大きな役割を果たしている。特に、「Banach の縮小原理」とも呼ばれる縮小写像の不動点定理では、その命題および証明において距離完備性を陽に用いる。また、以下で記述するが、証明も非常に簡単である。

定理 1 (Banach [1], Caccioppoli [4]). (X, d) を完備距離空間とし、 T を X 上の縮小写像 (contraction) とする。すなわち、 $r \in [0, 1)$ が存在して、すべての $x, y \in X$ について

$$d(Tx, Ty) \leq r d(x, y)$$

を満たすとす。このとき、 T は唯一つの不動点 $z \in X$ を持ち、すべての $x \in X$ に対して $\{T^n x\}$ は z に収束する。

MSC (2000). 54H25.

キーワード. 縮小写像, 不動点, compatible mappings, biased mappings.

住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区 九州工業大学工学研究院.

電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

証明. $u \in X$ を固定する.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} d(T^n u, T^m u) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} \sum_{j=n}^{m-1} d(T^j u, T^{j+1} u) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} \sum_{j=n}^{m-1} r^j d(u, Tu) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} \frac{r^n - r^m}{1 - r} d(u, Tu) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 - r} d(u, Tu) = 0 \end{aligned}$$

より, 点列 $\{T^n u\} \subset X$ は Cauchy 列であることが分かる. X は完備であるから, $\{T^n u\}$ はある元 $z \in X$ に収束する. T は連続なので

$$Tz = T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n u \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T \circ T^n u = z.$$

すなわち, z が T の不動点であることが分かる. すべての $x \in X$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z, T^n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n z, T^n x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r^n d(z, x) = 0$$

であるから, 不動点が唯一であることが分かる. \square

定理 1 は非常に有用であるが, その証明は驚くほど短い. むしろ... 実数の構成・完備化などの距離完備性に関する知識がないと, 証明に見えない可能性すらある. 定理 1 は, 微分方程式の解の存在など様々な所で使われる. また, 多くの拡張定理がある. いくつか挙げてみる.

- Edelstein (1961) [8] ε -chainable
- Nadler (1969) [16] set-valued $H(Tx, Ty) \leq r d(x, y)$
- Meir - Keeler (1969) [15] $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: d(x, y) < \varepsilon + \delta \implies d(Tx, Ty) < \varepsilon$
- Rus (1972) [20], Subrahmanyam (1974) [21] $d(Tx, T^2x) \leq r d(x, Tx)$, T is continuous
- Ekeland (1974) [9, 10] $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, 下半連続, 下から有界 $\implies \exists v, \forall w \neq v, f(w) > f(v) - d(v, w)$
- Ćirić (1974) [4] $d(Tx, Ty) \leq r \max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$
- Suzuki - Takahashi (1996) [24], Suzuki (2001) [22] w -distance 等

Ekeland の定理もとても有用な定理であるが, 写像 T が出てこないので一見不動点定理に見えない. しかし, 同値な命題として Caristi - Kirk [5, 6] の不動点定理がある.

3. JUNGCK による拡張

1976年, Jungck は興味深い拡張定理を証明している.

定理 2 (Jungck [11]). (X, d) を完備距離空間とし, I と T を X 上の写像とする. 次の4条件を仮定する:

- (a) I は連続
- (b) $T(X) \subset I(X)$
- (c) $I \circ T = T \circ I$
- (d) $r \in [0, 1)$ が存在して, すべての $x, y \in X$ について $d(Tx, Ty) \leq r d(Ix, Iy)$

このとき, I と T は唯一つの共通不動点を持つ.

I を恒等写像とすると, 定理2は定理1になるので, 定理2は定理1の拡張定理である. この定理は数学的に大変面白いものであるが, (c)の可換性に関する条件「 $I \circ T = T \circ I$ 」が強すぎて, 応用例はあまりないようだ. そこで, 応用例を持つために, 可換性の条件を緩和した条件が提案されている.

定義 3. (X, d) を距離空間とし, I と T を X 上の写像とする.

- (I, T) が **compatible** (Jungck [12]) であるとは, $\{Ix_n\}$ と $\{Tx_n\}$ が同じ点に収束しているときに

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(TIx_n, ITx_n) = 0$$

が成り立つことをいう.

- (I, T) が **I -biased** (Jungck and Pathak [14]) であるとは, $\{Ix_n\}$ と $\{Tx_n\}$ が同じ点に収束しているときに

$$(2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(Ix_n, ITx_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(Ix_n, TIx_n)$$

が成り立つことをいう.

明らかに「可換 \implies compatible $\implies I$ -biased」である. そして, 応用例を持つという当初の目的は達せられた. しかしながら, 数多くの似たような条件が提案され, 非常に混迷していた. 例えば,

- **compatible of type (A)** (Jungck, Murthy and Cho [13])
 $\lim_n d(ITx_n, TTx_n) = 0, \lim_n d(TIx_n, IIx_n) = 0$
- **compatible of type (P)** (Pathak, Cho, Kang and Lee [18])
 $\lim_n d(IIx_n, TTx_n) = 0$

- ***I*-compatible** (Pathak and Khan [19]) if

$$\lim_n d(ITx_n, TTx_n) = 0$$
- ***T*-compatible** (Pathak and Khan [19])

$$\lim_n d(TIx_n, IIx_n) = 0$$
- ***I*-biased of type (A)** (Pathak, Cho and Kang [17])

$$\limsup_n d(Tx_n, IIx_n) \leq \limsup_n d(Ix_n, TIx_n)$$

等がある. 今, 7条件を挙げたが同様な条件は — 正確にカウントしていないが, おそらく — 30以上はあると思う. これらの中で最弱な条件があれば話は簡単なのだが, 実際はそうではなかった. そこで, 「最弱な条件は何か」という問題が発生していた. 筆者らは論文 [23] において, この問題に対する非常に安易な解答を与えた.

定義 4 ([23]). (X, d) を距離空間とし, I と T を X 上の写像とする.

- (I, T) が **almost compatible** であるとは, 点列 $\{x_n\} \subset X$ が3条件
(C1) $Ix_{n+1} = Tx_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
(C2) $\{Ix_n\}$ が収束する
(C3) $\{TIx_n\}$ が有界である
を満たすときに, (1) が成り立つことをいう.
- (I, T) が **almost *I*-biased** であるとは, 点列 $\{x_n\} \subset X$ が (C1)–(C3) を満たすときに, (2) が成り立つことをいう.

(C1)–(C3) を満たすとき, $\{Ix_n\}$ と $\{Tx_n\}$ は明らかに同じ点に収束する. 結論部分は同じであるから, 「compatible \implies almost compatible」が成立する. 「*I*-biased \implies almost *I*-biased」も同様に成立する. また, **almost compatible of type (A)**, **almost compatible of type (P)**, **almost *I*-compatible**, **almost *T*-compatible**, **almost *I*-biased of type (A)** も同様に定義できる. そして, これらはそれぞれ元の条件より僅かに弱い.

さて, 新たに定義された7条件の関係が気になる所であるが, 以下の命題が成立する.

命題 5 ([23]). (X, d) を距離空間とし, I と T を X 上の写像で (d) を満たすとする. すなわち, $r \in [0, 1)$ が存在して, すべての $x, y \in X$ について $d(Tx, Ty) \leq r d(Ix, Iy)$ が成立すると仮定する. このとき, 以下は同値である.

- (I, T) は almost compatible である
- (I, T) は almost compatible of type (A) である
- (I, T) は almost compatible of type (P) である

- (I, T) は almost I -compatible である
- (I, T) は almost T -compatible である
- (I, T) は almost I -biased である
- (I, T) は almost I -biased of type (A) である

新しい7つの条件は、もちろん無条件では同値にならないが、不動点の存在を示すときに仮定する条件 (d) の下では同値になる。すなわち、これらの7つの条件は我々が求めていた最弱な条件であると言える。ただ、いくら条件を弱くしても不動点定理が証明できないと元も子もない。そこで、最後に不動点定理を証明して、本稿を終える。

定理 6. (X, d) を完備距離空間とし、 I と T を X 上の写像とする。 (a), (b), (d) および (c') を仮定する。

(c') (I, T) は almost I -biased である

このとき、 I と T は唯一つの共通不動点を持つ。

証明. 条件 (a) により、 $IU = T$ を満たす X 上の写像 U を定義することができる。条件 (b) により、 T の連続性を証明することができる。実際、 $\{x_n\}$ が x に収束しているとするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, Tx) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r d(Ix_n, Ix) = 0$$

となり、 $\{Tx_n\}$ は Tx に収束する。条件 (d) により、

$$d(IUx, IUy) = d(Tx, Ty) \leq r d(Ix, Iy)$$

が任意の $x, y \in X$ に対して成立する。 $u \in X$ を固定する。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} d(IU^n u, IU^m u) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} \sum_{j=n}^{m-1} d(IU^j u, IU^{j+1} u) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} \sum_{j=n}^{m-1} r^j d(Iu, IUu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} \frac{r^n - r^m}{1 - r} d(Iu, IUu) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 - r} d(Iu, IUu) = 0 \end{aligned}$$

より、点列 $\{IU^n u\} \subset X$ は Cauchy 列であることが分かる。 X は完備であるから、 $\{IU^n u\}$ はある元 $z \in X$ に収束する。 $\{TIU^n u\}$ は Tz に収束するので、有界である。よって $\{U^n u\}$ は (C1)-(C3) を満たす。条件 (c') により、

$$\begin{aligned} d(z, Iz) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(IU^n u, IIU^{n+1} u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(IU^n u, ITU^n u) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(IU^n u, TIU^n u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup r d(IU^{n-1} u, IIU^n u) = r d(z, Iz) \end{aligned}$$

が得られ, $z = Iz$ が成り立つ.

$$d(z, Tz) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(IU^n u, Tz) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r d(IU^{n-1} u, Iz) = 0$$

より $z = Tz$ が成り立つ. つまり, z は I と T の共通不動点である. 任意の $x \in X$ に対して

$$d(z, Tx) = d(Tz, Tx) \leq r d(Iz, Ix) = r d(z, Ix)$$

が成立するので, z は唯一の共通不動点である. \square

参考文献

- [1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.
- [2] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., **71** (1912), 97–115.
- [3] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 1272–1276. MR0178324
- [4] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, Rend. Accad. Naz. Lincei, **11** (1930), 794–799.
- [5] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., **215** (1976), 241–251. MR0394329
- [6] J. Caristi and W. A. Kirk, *Geometric fixed point theory and inwardness conditions*, Lecture Notes in Math., Vol. 490, pp. 74–83, Springer, Berlin, 1975. MR0399968
- [7] Lj. B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., **45** (1974), 267–273. MR0356011
- [8] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), 7–10. MR0120625
- [9] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353. MR0346619
- [10] ———, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **1** (1979), 443–474. MR0526967
- [11] G. Jungck, *Commuting mappings and fixed points*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 261–263. MR0400196
- [12] ———, *Compatible mappings and common fixed points*, Int. J. Math. Math. Sci., **9** (1986), 771–779. MR0870534
- [13] G. Jungck, P. P. Murthy and Y. J. Cho, *Compatible mappings of type (A) and common fixed points*, Math. Japon., **38** (1993), 381–390. MR1213401
- [14] G. Jungck and H. K. Pathak, *Fixed points via "biased maps"*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2049–2060. MR1283555
- [15] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl., **28** (1969), 326–329. MR0250291
- [16] S. B. Nadler, Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math., **30** (1969), 475–488. MR0254828

- [17] H. K. Pathak, Y. J. Cho and S. M. Kang, *Common fixed points of biased maps of type (A) and applications*, Int. J. Math. Math. Sci., **21** (1998), 681–693. MR1642200
- [18] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Kang and B. S. Lee, *Fixed point theorems for compatible mappings of type (P) and applications to dynamic programming*, Matematiche (Catania), **50** (1995), 15–33. MR1373565
- [19] H. K. Pathak and M. S. Khan, *A comparison of various types of compatible maps and common fixed points*, Indian J. Pure Appl. Math., **28** (1997), 477–485. MR1448037
- [20] I. A. Rus, *The method of successive approximations*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **17** (1972), 1433–1437. MR0322610
- [21] P. V. Subrahmanyam, *Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle*, J. Math. Phys. Sci., **8** (1974), 445–457. MR0358749
- [22] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458. MR1808147
- [23] T. Suzuki and H. K. Pathak, *Almost biased mappings and almost compatible mappings are equivalent under some condition*, J. Math. Anal. Appl., **368** (2010), 211–217. MR2609270
- [24] T. Suzuki and W. Takahashi, *Fixed point theorems and characterizations of metric completeness*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **8** (1996), 371–382. MR1483635