数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 97-102

共通不動点問題と収縮射影法

東京工業大学・大学院情報理工学研究科
木村泰紀 (Yasunori Kimura)

1 共通不動点の近似列

本稿では, 多くの非線形問題に応用され, 研究がすすめられている不動点問題, とくに複数の写像に対する共通不動点問題について, その解を近似する点列の生成アルゴリズムを取り扱う. 近似点列の生成アルゴリズムについては多くの研究成果がある. 凸結合や Cesàro 平均, 射影を用いた方法等のさまざまな手法が提案されており, 強収束や弱収束等, 定理の種類は多岐にわたっている. 対象とする写像族についても, 非拡大写像をはじめとしてその一般化となるいろいろな写像が提案されており, 新しい結果が次々と発表されている.

2008 年に Takahashi, Takeuchi, Kubota によって共通不動点への強収束が証明された次の近似列生成アルゴリズムは, 収縮射影法と呼ばれ, 近年急速な発展が見られる手法として知られている.

定理 1.1 (Takahashi-Takeuchi-Kubota [3]). H を Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C からそれ自身への非拡大写像の族とし, $\{S_n\}$ を C 上の非拡大写像列で $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(T_\lambda) \neq \emptyset$ をみたすものとする. また, $\{S_n\}$ は $\{T_\lambda\}$ に関する NST 条件 (I) をみたすものと仮定する. a を $0 < a < 1$ をみたす実数とし, $\{\alpha_n\}$ を $[0, a]$ の数列とする. 点 $u \in H$ に対し, 次の手順によって点列 $\{x_n\}$ を構成する: $x_1 \in C$ を任意にとり, $C_1 = C$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in H : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} u \end{aligned}$$

Key words and phrases. Approximation, fixed point, nonexpansive mapping, shrinking projection method, metric projection, Mosco convergence.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09

とする．このとき $\{x_n\}$ は $P_F u \in C$ へと強収束する．ただし P_K は閉凸集合 K への距離射影であり，$F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(T_\lambda)$ である．

この定理では NST 条件 (I) と呼ばれる条件によって写像列 $\{S_n\}$ と写像族 $\{T_\lambda\}$ とを関連づけ，$\{S_n\}$ を用いて生成された近似列によって $\{T_\lambda\}$ の共通不動点への収束が保証されるという結果を得ている．

この定理に対し Kimura, Takahashi は，同様の収縮射影法において点列の構成法を変えることにより，共通不動点を考える写像族そのものを用いた近似点列の収束を証明した．

定理 1.2 (Kimura-Takahashi [1]). E を回帰的で狭義凸な Banach 空間とし，Kadec-Klee 条件とノルムの Fréchet 微分可能性を仮定する．C を E の閉凸集合で，$\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C 上で定義された共通不動点をもつ relatively nonexpansive 写像の族とする．$\{\alpha_n\}$ を閉区間 $[0,1]$ の数列で $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたすものとする．$x \in E$ を任意にとり，点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する．$x_1 \in C$ を任意にとり，$C_1 = C$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
y_n(\lambda) &= J^*(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J S_\lambda x_n) \quad (\lambda \in \Lambda), \\
C_{n+1} &= \left\{ z \in E : \sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(z, y_n(\lambda)) \le \phi(z, x_n) \right\} \cap C_n, \\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x
\end{aligned}
$$

とする．このとき，$\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ に強収束する．

この定理の証明では集合値解析における Mosco 収束と距離射影の関係に関する定理が利用されており，定理 1.1 とは異なった手法で強収束が示されている．

一方，Plubtieng, Ungchittrakool は有限個の写像族に対し，その凸結合を用いた収縮射影法によって，次の強収束定理を示した．

定理 1.3 (Plubtieng-Ungchittrakool [2]). E を一様凸かつ一様滑らかな Banach 空間とし，C を E の閉凸部分集合とする．$I = \{1, 2, \dots, m\}$ を添字集合とする C から H への relatively nonexpansive 写像の有限個の族 $\{T_i : i \in I\}$ が共通不動点をもつと仮定する．実数の族 $\{\alpha_n^k : n \in \mathbb{N},\ k \in I \cup \{0\}\}$, $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [0,1]$ が次の条件をみたすとする:

(i) 各 $k \in I$ に対して $\sum_{k \in I} \alpha_n^k = 1$ が成り立ち，さらに次のいずれかが成り立つ．
 (a) 各 $k \in I$ に対して $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n^0 \alpha_n^k > 0$,
 (b) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^1 = 0$ かつ異なる $k, l \in I$ に対して $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n^k \alpha_n^l > 0$,

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n < 1$ が成り立つ．

このとき, $u \in H$ に対し, 次のように点列を構成する: $x_1 \in C$ を任意にとり, $C_1 = C$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} z_n &= J^{-1}\left(\alpha_n^0 Jx_n + \sum_{k\in I} \alpha_n^k JT_k x_n\right), \\ y_n &= J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)Jz_n), \\ C_{n+1} &= \{z \in H : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &= \Pi_{C_{n+1}} u \end{aligned}$$

とする. このとき $\{x_n\}$ は $\Pi_F u$ に強収束する. ただし, 空でない閉凸集合 K に対し, Π_K は H から K への generalized projection であり, $F = \bigcap_{k\in I} F(T_k)$ である.

本稿では, 定理 1.3 の点列構成法をもとに, 凸結合を用いた点列の構成を試み, 定理 1.2 の証明で用いられた手法を適用することで, 点列の強収束を証明する.

2 凸結合を用いた共通不動点近似定理

本節では収縮射影法による共通不動点近似アルゴリズムに関する, 次の強収束定理を証明する.

定理 2.1. H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸部分集合とする. $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ を添字集合とする C から H への非拡大写像の有限個の族 $\{T_i : i \in I\}$ が共通不動点をもつと仮定する. 実数の族 $\{\alpha_n^k : n \in \mathbb{N},\ k \in I\} \subset [0, 1]$ が次の条件をみたすと仮定する:

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k\in I} \alpha_n^k = 1$,
(ii) 各 $k \in I$ に対して $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n^k > 0$.

さらに, 実数列 $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [0, 1]$ が $\limsup_{n\to\infty} \beta_n(1-\beta_n) > 0$ をみたすと仮定する. このとき, $u \in H$ に対し, 次のように点列を構成する: $x_1 \in C$ を任意にとり, $C_1 = C$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} y_n &= \beta_n x_n + (1-\beta_n)\sum_{k\in I} \alpha_n^k T_k x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} u \end{aligned}$$

とする. このとき $\{x_n\}$ は $P_F u$ に強収束する. ただし, 空でない閉凸集合 K に対し, P_K は H から K への距離射影であり, $F = \bigcap_{k\in I} F(T_k)$ である.

証明. まず $\{C_n\}$ が H の空でない閉凸集合の列であることを示す．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$C_1 = C$ であり，

$$C_{n+1} = \{z \in H : 2\langle x_n - y_n, z\rangle \le \|x_n\|^2 - \|y_n\|^2\} \cap C_n$$

とあらわせるから，帰納法によって $\{C_n\}$ は閉凸集合の列であることがわかる．また，$z \in F$ に対し

$$\begin{aligned}
\|y_n - z\| &= \left\|\beta_n x_n + (1-\beta_n)\sum_{k\in I}\alpha_n^k T_k x_n - z\right\| \\
&\le \beta_n \|x_n - z\| + (1-\beta_n)\sum_{k\in I}\alpha_n^k \|T_k x_n - z\| \\
&\le \beta_n \|x_n - z\| + (1-\beta_n)\sum_{k\in I}\alpha_n^k \|x_n - z\| \\
&= \|x_n - z\|
\end{aligned}$$

が成り立つので，$F \subset \{z \in H : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ．これを用いて

$$\emptyset \ne F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

が得られ，各 C_n は空でないことも示される．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して写像 P_{C_n} が存在し，$\{x_n\}$ が矛盾なく定義されていることも同時に示される．

$\{C_n\}$ は包含関係に関して減少列であり，$F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \ne \emptyset$ であることを用いることで，[4, Theorem 3.2] より点列 $\{x_n\}$ は $P_{F_0}u$ に強収束することが示される．

ここで，$P_{F_0}u$ が $F = \bigcap_{k\in I} F(T_k)$ に属することを示そう．$P_{F_0}u \in F_0$ より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $P_{F_0}u \in C_n$ であることから，

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - P_{F_0}u\| \le \lim_{n\to\infty} \|x_n - P_{F_0}u\| = 0$$

となり，$\{y_n\}$ も $P_{F_0}u$ に強収束することがわかる．$j \in I$ を一つ固定し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\gamma_n^j = \beta_n + (1-\beta_n)\alpha_n^j$ とすると，

$$\begin{aligned}
1 - \gamma_n^j &= 1 - \beta_n - (1-\beta_n)\alpha_n^j \\
&= (1-\beta_n)(1-\alpha_n^j) \\
&= (1-\beta_n)\sum_{\substack{k\in I \\ k\ne j}}\alpha_n^k.
\end{aligned}$$

よって, $z \in F$ に対して, $n \in \mathbb{N}$ が十分大きいときに

$$
\begin{aligned}
&\|y_n - z\|^2 \\
&= \left\|\beta_n x_n + (1-\beta_n)\sum_{k\in I}\alpha_n^k T_k x_n - z\right\|^2 \\
&= \left\|\beta_n x_n + (1-\beta_n)\alpha_n^j T_j x_n + (1-\beta_n)\sum_{\substack{k\in I\\ k\neq j}}\alpha_n^k T_k x_n - z\right\|^2 \\
&\leq \gamma_n^j \left\|\frac{\beta_n}{\gamma_n^j}x_n + \frac{(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}T_j x_n - z\right\|^2 + (1-\gamma_n^j)\left\|\frac{1-\beta_n}{1-\gamma_n^j}\sum_{\substack{k\in I\\ k\neq j}}\alpha_n^k T_k x_n - z\right\|^2 \\
&\leq \gamma_n^j \left\|\frac{\beta_n}{\gamma_n^j}x_n + \frac{(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}T_j x_n - z\right\|^2 + (1-\gamma_n^j)\left(\frac{1-\beta_n}{1-\gamma_n^j}\sum_{\substack{k\in I\\ k\neq j}}\alpha_n^k \|T_k x_n - z\|\right)^2 \\
&\leq \gamma_n^j \left\|\frac{\beta_n}{\gamma_n^j}x_n + \frac{(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}T_j x_n - z\right\|^2 + (1-\gamma_n^j)\left(\frac{1-\beta_n}{1-\gamma_n^j}\sum_{\substack{k\in I\\ k\neq j}}\alpha_n^k \|x_n - z\|\right)^2 \\
&= \gamma_n^j \left\|\frac{\beta_n}{\gamma_n^j}x_n + \frac{(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}T_j x_n - z\right\|^2 + (1-\gamma_n^j)\|x_n - z\|^2 \\
&= \gamma_n^j \left(\frac{\beta_n}{\gamma_n^j}\|x_n - z\|^2 + \frac{(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}\|T_j x_n - z\|^2 - \frac{\beta_n(1-\beta_n)\alpha_n^j}{{\gamma_n^j}^2}\|x_n - T_j x_n\|^2\right) \\
&\quad + (1-\gamma_n^j)\|x_n - z\|^2 \\
&\leq (\beta_n + (1-\gamma_n^j))\|x_n - z\|^2 + (1-\beta_n)\alpha_n^j\|x_n - z\|^2 - \frac{\beta_n(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}\|x_n - T_j x_n\|^2 \\
&= \|x_n - z\|^2 - \frac{\beta_n(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}\|x_n - T_j x_n\|^2.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
0 \leq \frac{\beta_n(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}\|x_n - T_j x_n\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|y_n - z\|^2
$$

が十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ. よって

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n(1-\beta_n)\alpha_n^j}{\gamma_n^j}\|x_n - T_j x_n\|^2 = 0.
$$

ここで, 仮定より $\{\beta_n\}$ の部分列 $\{\beta_{n_i}\}$ で

$$\lim_{i\to\infty}\beta_{n_i}(1-\beta_{n_i})=\liminf_{n\to\infty}\beta_n(1-\beta_n)>0$$

をみたすものが存在するので,

$$\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}-T_jx_{n_i}\|^2=\|P_{F_0}u-T_jP_{F_0}u\|^2=0,$$

すなわち, $P_{F_0}u\in F(T_j)$ を得る. したがってすべての $j\in I$ に対して $P_{F_0}u$ は T_j の不動点であり, $P_{F_0}u\in F$ が得られた. 一方, $F\subset F_0$ であることから $P_{F_0}u=P_Fu$ となり, 定理が証明された. □

この定理では Hilbert 空間上の写像族を用いたが, 然るべき性質をもった Banach 空間でも同様の証明が可能であると思われる. とくに定理 1.2 の結果は, 定理 1.3 で用いられている一様凸かつ一様滑らかという仮定がさらに改良できる可能性を示唆している. また, 係数条件についても改良の余地があると考えられる.

参考文献

[1] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[2] S. Plubtieng and K. Ungchittrakool, *Hybrid iterative methods for convex feasibility problems and fixed point problems of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Art. ID 583082, 19.

[3] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[4] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.