数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 152-159

2次計画における交互フィボナッチ経路

(Alternately Fibonacci Paths in Quadratic Programming)

岩本誠一* (九州大学·名誉教授), 木村寛† (秋田県立大学)

概要

本報告では、主と双対の関係にある 2 次計画問題 (P_4) と (D_4) において、主問題の最小解と双対問題の最大解の間には美しい関係—交互フィボナッチ相補双対性—が成り立つことを示す。また最適化の一階条件として新たに交互フィボナッチ条件を導出して、この条件に基づく交互フィボナッチ最適分割法および、交互フィボナッチ経路を提示する。

1 交互フィボナッチ相補双対性

1.1 フィボナッチ数列

映画「ダ・ヴィンチ・コード」(2006年) では冒頭のシーンで 10 桁の暗証番号

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \tag{1}$$

が現れている。この 10 個の数字は 8 つの数字からなる列

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21 \tag{2}$$

すなわち、フィボナッチ数列 (表 1) の第 1 項 $F_1 = 1$ から第 8 項 $F_8 = 21$ までの数列に他ならないことを紹介した [11, 12]。フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式 (3 項間漸化式)

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0 \tag{3}$$

の解で定まっている [4, 6, 7, 8, 9, 16]。

表 1 フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

*Seiichi IWAMOTO, E-mail: iwamotodp@kyudai.jp
†Yutaka KIMURA, E-mail: yutaka@akita-pu.ac.jp

1.2 2次計画問題

ここで、次の主問題と双対問題を考える。4変数 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の主問題として次の最小化問題 (P_4) を考える。

$$
(\mathrm{P}_4) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{3} \left[(x_n + x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < x_n < \infty \quad n = 1, 2, 3, 4 \\ & \text{(ii)} \quad x_0 = c. \end{array}
$$

ただし $c > 0$ とする。主問題 (P_4) の最小解 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ 及び、最小値 m_4 は、

$$
\hat{x} = (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) = \frac{c}{F_9}(F_9,\ -F_7,\ F_5,\ -F_3,\ F_1) \tag{4}
$$

のとき、最小値 $m_4 = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

主問題 (P_4) の双対問題 (D_4) は、4変数 $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ の最大化問題として次で与えられる。

$$
(\mathrm{D}_4) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \displaystyle\sum_{n=0}^{2} \left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_3^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, 2, 3. \end{array}
$$

双対問題 (D_4) の最大解 $\mu^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*)$ 及び、最大値 M_4 は、

$$
\mu^* = (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) = \frac{c}{F_9}(F_8,\ -F_6,\ F_4,\ -F_2) \tag{5}
$$

のとき、最大値 $M_4 = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

ここで、主問題 (P_4) の最小解と双対問題 (D_4) の最大解の間には次の3つのの関係が成り立っている。

1. **（双対性）** 最小値と最大値が等しい：$m_4 = M_4$. 共に初期値 c の2次関数で、その係数は相隣るフィボナッチ数列の比 $\dfrac{F_8}{F_9}$ である。
2. **（2段階フィボナッチ）** 最小解 $(x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)$ と最大解 $(\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*)$ は共に**交代**[1]フィボナッチ数列の後ろ向き2段跳びである。
3. **（相補フィボナッチ）** 最小解と最大解を交互に編むと、**2連交代**[2]フィボナッチ数列の後ろ向き（1段跳び）である。

この三位一体の関係を**交互フィボナッチ相補双対性** (alternately Fibonacci complementary duality, AFCD) という。

[1] $+$ と $-$ が交互に繰り返されることをいう。
[2] $++$ と $--$ が交互に繰り返される。

2 交互フィボナッチ経路

この節では、まず最適化の1階条件が「美しい条件」に帰着できことを示す。これを交互フィボナッチ条件という。次に、この条件に基づいて所与の区間をフィボナッチ比で逐次分割すれば、最適な分割が得られることを示す。すなわち、**交互フィボナッチ最適分割** (alternately Fibonacci optimal section) を提示する。

2.1 主問題

主問題 (P_4) の目的関数を $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の4変数関数 $f(x)$、

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{3}\left[(x_n + x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2\right]$$

で表す。ただし、$x_0 = c$ である。このとき $f(x)$ は凸関数であるので、一般に最小解 x は最適化の1階条件を満たす。したがって、この問題では最適化の1階条件を満たす x を求めれば、最小解が得られる。実際、1階条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad n = 1, 2, 3, 4$$

は4つの式からなる連立一次方程式系

$$\begin{aligned}(c + x_1) + x_1 + (x_1 + x_2) \;&=\; 0 \\ (x_1 + x_2) + x_2 + (x_2 + x_3) \;&=\; 0 \\ (x_2 + x_3) + x_3 + (x_3 + x_4) \;&=\; 0 \\ (x_3 + x_4) + x_4 \;&=\; 0\end{aligned} \tag{6}$$

になる。これら4つの式からなる方程式系は、

$$\frac{c + x_1}{21} = \frac{x_1}{-13} = \frac{x_1 + x_2}{-8} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_2 + x_3}{3} = \frac{x_3}{-2} = \frac{x_3 + x_4}{-1} = \frac{x_4}{1}$$

となり、すなわちこの系より、

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}} \qquad \frac{c + x_1}{F_8} = \frac{x_1}{-F_7} = \frac{x_1 + x_2}{-F_6} = \frac{x_2}{F_5} = \frac{x_2 + x_3}{F_4} = \frac{x_3}{-F_3} = \frac{x_3 + x_4}{-F_2} = \frac{x_4}{F_1}$$

が導かれる。この系を問題 (P_4) における**交互フィボナッチ条件** (alternately Fibonacci condition, AFC) といい $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ で表す。また交互フィボナッチ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ により定まる列 (x_1, x_2, x_3, x_4) を**交互フィボナッチ経路**(alternately Fibonacci path, AFP) といい、交互フィボナッチ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ による経路 (x_1, x_2, x_3, x_4) の分割を**交互フィボナッチ分割**(alternately Fibonacci section, AFS) という。

ここで、この交互フィボナッチ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ は次の8つの1次量

$$c + x_1, \quad x_1, \quad x_1 + x_2, \quad x_2, \quad x_2 + x_3, \quad x_3, \quad x_3 + x_4, \quad x_4$$

を、連続する**2連交代**フィボ連比 $F_8 : -F_7 : -F_6 : F_5 : F_4 : -F_3 : -F_2 : F_1$ で配分することを意味している。すなわち、

$$c - x_1, \quad -x_1, \quad -x_1 + x_2, \quad x_2, \quad x_2 - x_3, \quad -x_3, \quad -x_3 + x_4, \quad x_4$$

を、連続するフィボナッチ連比 $F_8 : F_7 : F_6 : F_5 : F_4 : F_3 : F_2 : F_1$ で配分することである。交互フィボナッチ分割とは、区間 $[-c, c]$ に絶対値の大きい方から順に 4 つの分点 x_1, x_2, x_3, x_4 を入れて、8 つの量がこの連比になるように分割することである。

主問題 (P$_4$) における交互フィボナッチ分割のアルゴリズム

Step 1. 初期値 $x_0 = c\ (>0)$ のもと、$-x_1\ (>0)$ を区間 $[0, x_0]\ (= [0, c])$ の $\{c - (-x_1)\} : -x_1 = F_8 : F_7\ (= 21 : 13)$ となる内分点に取る。

Step 2. $x_2\ (>0)$ を 区間 $[0, -x_1]$ の $(-x_1 - x_2) : x_2 = F_6 : F_5\ (= 8 : 5)$ となる内分点に取る。

Step 3. $-x_3\ (>0)$ を 区間 $[0, x_2]$ の $\{x_2 - (-x_3)\} : -x_3 = F_4 : F_3\ (= 3 : 2)$ となる内分点に取る。

Step 4. x_4 を $[0, x_3]$ の $(-x_3 - x_4) : x_4 = F_2 : F_1\ (= 1 : 1)$ となる内分点に取る。

2.2 主問題の最小解と最小値

補題 1 *(Lucas formula)* フィボナッチ数列 $\{F_k\}$ において、任意の $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

が成り立つ。

条件 (AF)$_{\mathrm{P}}$ は次の 4 つの等式からなる系に同値である。

$$\frac{c + x_1}{F_8} = \frac{x_1}{-F_7}, \quad \frac{x_1 + x_2}{-F_6} = \frac{x_2}{F_5}, \quad \frac{x_2 + x_3}{F_4} = \frac{x_3}{-F_3}, \quad \frac{x_3 + x_4}{-F_2} = \frac{x_4}{F_1}.$$

したがって、この系より実際に主問題 (P$_4$) の最小解は逐次に求められ、

$$\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) = \frac{c}{34}\Big(\ -13,\ \ 5,\ \ -2,\ \ 1\ \Big) \tag{7}$$

となる。また主問題 (P$_4$) の最小値 m_4 は、補題 1 を用いることにより、

$$\begin{aligned} 34^2 \frac{f(\hat{x})}{c^2} &= \left[(34-13)^2 + (-13)^2\right] + \left[(-13+5)^2 + 5^2\right] + \left[(5-2)^2 + (-2)^2\right] \\ &\qquad + \left[(-2+1)^2 + 1^2\right] \\ &= 21^2 + 13^2 + 8^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 21 \cdot 34 \end{aligned}$$

となり、

$$m_4 = f(\hat{x}) = \frac{21}{34}c^2 \tag{8}$$

である。

2.3 双対問題

双対問題 (D_4) の目的関数を 4 変数 $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ の関数 $g(\mu)$、

$$g(\mu) \ = \ 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_3^2$$

で表す。このとき、$g(\mu)$ は凹関数であるので最大解 μ は最適化の 1 階条件を満たす。実際、1 階条件

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_n} = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

は 4 式からなる連立一次方程式系

$$\begin{aligned} -(c - \mu_0) + (\mu_0 + \mu_1) \ &= \ 0 \\ (\mu_0 + \mu_1) + \mu_1 + (\mu_1 + \mu_2) \ &= \ 0 \\ (\mu_1 + \mu_2) + \mu_2 + (\mu_2 + \mu_3) \ &= \ 0 \\ (\mu_2 + \mu_3) + 2\mu_3 \ &= \ 0 \end{aligned} \tag{9}$$

になる。これから双対問題 (D_4) に対する次の系、

$$\frac{c - \mu_0}{13} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{13} = \frac{\mu_1}{-8} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{-5} = \frac{\mu_2}{3} = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} = \frac{\mu_3}{-1}$$

すなわち

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}} \qquad \frac{c - \mu_0}{F_7} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{F_7} = \frac{\mu_1}{-F_6} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{-F_5} = \frac{\mu_2}{F_4} = \frac{\mu_2 + \mu_3}{F_3} = \frac{\mu_3}{-F_2}$$

が導かれる。この条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$を 双対問題 ($D_4$) に対する交互フィボナッチ条件といい、その分割を交互フィボナッチ分割という。

交互フィボナッチ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$ は 7 つの 1 次量

$$c - \mu_0, \quad \mu_0 + \mu_1, \quad \mu_1, \quad \mu_1 + \mu_2, \quad \mu_2, \quad \mu_2 + \mu_3, \quad \mu_3$$

をフィボナッチ連比 $F_7 : F_7 : -F_6 : -F_5 : F_4 : F_3 : -F_2$ で配分することを意味している。すなわち、区間 $[-c, c]$ に絶対値が大きい方から順に 4 つの分点 μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 を入れて、7 つの量がこの連比になるように分割することである。

双対問題 (D_4) に対する交互フィボナッチ分割は、初期値 $x_0 = c\ (> 0)$ が与えられているもとで、以下のステップにより与えられる。

双対問題 (D_4) における交互フィボナッチ分割のアルゴリズム

Step 1. $\mu_0\ (>0)$ は区間 $[-\mu_1, x_0]\ (=[-\mu_1, c])$ を $F_7 : F_7\ (=13:13)$ の比に内分する点、すなわち $[-\mu_1, c]$ の中点に取り、かつ、$-\mu_1\ (>0)$ は区間 $[0, \mu_0]$ を $F_6 : F_7\ (=8:13)$ の比に内分する点に取る。

Step 2. $\mu_2\ (>0)$ を $[0, -\mu_1]$ を $F_4 : F_5\ (=3:5)$ に内分する点に取る。

Step 3. $-\mu_3\ (>0)$ を $[0, \mu_2]$ の $F_2 : F_3\ (=1:2)$ の内分点に取る。

すなわち、μ_0 から始まる以下の 7 つの量

$$\mu_0, \quad \mu_0-\mu_1, \quad -\mu_1, \quad -\mu_1+\mu_2, \quad \mu_2, \quad \mu_2-\mu_3, \quad -\mu_3$$

とは、連続するフィボナッチ連比 $F_8 : F_7 : F_6 : F_5 : F_4 : F_3 : F_2$ になる。

2.4 双対問題の最大解と最大値

条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$ は次の 4 つの等式からなる系に同値である。

$$\frac{c-\mu_0}{F_7} = \frac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \frac{\mu_1}{-F_6}, \qquad \frac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \frac{\mu_2}{F_4}, \qquad \frac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \frac{\mu_3}{-F_2}.$$

したがって、この系より実際に双対問題 (D_4) の最大解は求められ、

$$\mu^* = (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) = \frac{c}{34}\Big(\ 21,\ \ -8,\ \ 3,\ \ -1\ \Big) \tag{10}$$

となる。また双対問題 (D_4) の最大値 M_4 は、補題 1 を用いることにより、

$$\begin{aligned} g(\mu^*)F_9^2/c^2 &= 2F_8F_9 - F_8^2 - \left[(F_8-F_6)^2 + (-F_6)^2\right] - \left[(-F_6+F_4)^2 + F_4^2\right] \\ &\quad - \left[(F_4-F_2)^2 + (-F_2)^2\right] - (-F_2)^2 \\ &= 2F_8F_9 - \left[F_8^2 + F_7^2 + F_6^2 + F_5^2 + F_4^2 + F_3^2 + F_2^2 + F_1^2\right] \\ &= 2F_8F_9 - F_8F_9 \\ &= F_8F_9 \end{aligned}$$

であり、

$$M_4 = g(\mu^*) = \frac{F_8}{F_9}c^2 \tag{11}$$

である。

3　交互ダ・ヴィンチ・コード

主問題 (P_4) および双対問題 (D_4) の変数を反転させて、反転問題

$$
(\mathrm{RP}_4)\quad
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left[x_n^2+(x_n+x_{n+1})^2\right] & \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ -\infty<x_n<\infty & n=1,2,3,4 \\
 & \text{(ii)}\ x_5=c &
\end{array}
$$

および

$$
(\mathrm{RD}_4)\quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle -\mu_1^2-\sum_{n=1}^{3}\left[\mu_n^2+(\mu_n+\mu_{n+1})^2\right]-\mu_4^2+2c\mu_4 \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ -\infty<\mu_n<\infty \quad n=1,2,3,4
\end{array}
$$

を考えると、両反転問題の最適解の間には今度は**前向きの**交互フィボナッチ相補双対性が成り立つ。ここで、問題 (RP_4) の最小解 $\tilde{x}$ は、

$$\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3,\ \tilde{x}_4,\ x_5)=\frac{c}{34}(1,\ -2,\ 5,\ -13,\ 34) \tag{12}$$

であり、問題 (RD_4) の最大解 $\mu^\star$ は、

$$\mu^\star=(\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \mu_3^\star,\ \mu_4^\star)=\frac{c}{34}(-1,\ 3,\ -8,\ 21) \tag{13}$$

であるので、相補フィボナッチは列 $(\tilde{x}_1,\ \mu_1^\star,\ \tilde{x}_2,\ \mu_2^\star,\ \tilde{x}_3,\ \mu_3^\star,\ \tilde{x}_4,\ \mu_4^\star,\ x_5)$ であり、特に $c=34$ のとき、

$$1\quad -1\quad -2\quad 3\quad 5\quad -8\quad -13\quad 21\quad 34 \tag{14}$$

となる。すなわち、交互列 (14) は「ダ・ヴィンチ・コード」の 2 連交代になっており、交互ダ・ヴィンチ・コードを構成している。

参考文献

[1] Bellman, R.E., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] Bellman, R.E., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[3] Brown, D.,『ダ・ヴィンチ・コード (上・下)』(越前敏弥訳), 角川書店, 2004 年; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[4] Dunlap, R.A.,『黄金比とフィボナッチ数』(岩永恭雄・松井講介訳), 日本評論社, 2003 年; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[5] 岩本誠一,『動的計画論』, 九大出版会, 1987 年.

[6] Iwamoto, S., "Cross dual on the Golden optimum solutions,"「経済の数理解析」, 京大数理研講究録 1443, 2005 年, pp.27–43.

[7] Iwamoto, S., "The Golden trinity — optimility, inequality, identity —,"「経済の数理解析」, 京大数理研講究録, 2006 年, pp.1–14.

[8] Iwamoto, S., "The Golden optimum solution in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2007, pp.199–205.

[9] 岩本 誠一,「黄金最適解を鑑賞する — 経済数学へのプレリュード (V) —」, 経済学研究・別冊 第 12 号 (九大経済学会), 2006 年, pp.39–43.

[10] 岩本 誠一,「最適化『ダ・ヴィンチ・コード』 — 経済数学へのプレリュード (VI) —」, 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会), 2007 年, pp.45–52.

[11] 岩本 誠一,「ダ・ヴィンチ・コードは最適か?」, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 2009 年, pp.1–9.

[12] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之,「ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 2/3 号, 2009 年, pp.1–22.

[13] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之,「ダ・ヴィンチ・コード 64」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 77 巻 1 号, 2010 年, pp.1–25.

[14] 岩本 誠一・木村 寛,「交互ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 4 号, 2010 年, pp.1–18.

[15] Iwamoto, S. and Kira, A., "The Fibonacci complementary duality in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Proceedings of the 5th Intl. Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2009, pp.63–73.

[16] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Dynamic programming creates the Golden Ratio, too," *Proc. of the Sixth Intl. Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, 2004.

[17] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes," Ed. Elaydi, S., Nishimura, K., Shishikura, M. and Tose, N., *Advanced Studies in Pure Mathematics* Vol.53, Advances in Discrete Dynamic Systems, 2009, pp.77–86. *Proceedings of the Intl. Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006)*, Kyoto, 2006.

[18] Kira, A. and Iwamoto, S., "Golden complementary dual in quadratic optimization," Modeling Decisions for Artificial Intelligence, *Proceedings of the Fifth Intl. Confernece (MDAI 2008)*, Barcelona, 2008. Eds. Torra, V. and Narukawa, Y., Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.