

# 凸不等式制約付き DC 計画問題における最弱の制約想定

島根大学大学院 総合理工学研究科 佐伯 雄介 (Yusuke Saeki)

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University

島根大学 総合理工学部 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

## 概要

凸計画問題においては、basic constraint qualification (BCQ) が大域的な最適性条件のための最弱の制約想定であることが知られている。本論文では、BCQ が凸不等式制約付き DC 計画問題における局所的な最適性条件のための最弱の制約想定であることを紹介する。また、BCQ が分数計画問題と弱凸計画問題における局所的な最適性条件のための最弱の制約想定であることも紹介する。

## 1 導入

本論文では、次のような DC 計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) - g(x) \\ & \text{subject to} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned}$$

ただし、 $X$  は実局所凸ハウスドルフ線形位相空間、 $I$  は添数集合、 $f, h_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ( $i \in I$ ) は下半連続な真凸関数、 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  は下半連続な凸関数である。DC 計画問題の研究に関して、Hiriart-Urruty [6] は劣微分と  $\varepsilon$ -劣微分を用いることで制約なし DC 計画問題における局所的な最適性と大域的な最適性を特徴付けた。また、Jeyakumar と Glover [9] は  $\varepsilon$ -劣微分を用いることで凸不等式制約付き DC 計画問題における大域的な最適性条件を与えた。さらに、彼らはこの結果を弱凸計画問題や分数計画問題に応用した。その他にも、[1, 2, 3, 4] のように、DC 計画問題や分数計画問題は広く研究されている。

凸計画問題において、Slater 条件は大域的な最適性条件のための制約想定であることが知られている。Li, Ng と Pong [10] は凸計画問題における大域的な最適性条件のための制約想定を研究し、basic constraint qualification (BCQ) が凸計画問題における大域的な最適性条件のための最弱の制約想定であることを証明した。最近の同様な研究として、[5, 7, 8] が挙げられる。

本論文では、BCQ が凸不等式制約付き DC 計画問題における局所的な最適性条件のための最弱の制約想定であることを紹介する。また、DC 計画問題の結果を分数計画問題や弱凸計画問題に応用する。

## 2 準備

本論文を通じて、 $X$  は実局所凸ハウスドルフ線形位相空間、 $X^*$  はその双対空間とする。また、次のような制約集合  $S$  の下で数理計画問題を考える。

$$S = \{x \in X \mid h_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$$

ただし、 $I$  は添数集合、 $h_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ( $i \in I$ ) は下半連続な真凸関数である。

まず、凸計画問題における大域的な最適性条件のための最弱の制約想定である basic constraint qualification (BCQ) の定義と Li、Ng と Pong [10] によって証明された定理を紹介する。

**定義 2.1** ([10]).  $\{h_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid i \in I\}$  は下半連続な真凸関数族とする。このとき、関数族  $\{h_i \mid i \in I\}$  が  $\bar{x} \in S$  で BCQ をみたすとは、次が成り立つときをいう。

$$N_S(\bar{x}) = \text{cone co} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial h_i(\bar{x})$$

ただし、 $I(\bar{x}) = \{i \in I \mid h_i(\bar{x}) = 0\}$  である。

**定理 2.1** ([10]).  $\{h_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid i \in I\}$  は下半連続な真凸関数族、 $\bar{x} \in S$  とする。このとき次は同値である。

- (i) 関数族  $\{h_i \mid i \in I\}$  が  $\bar{x}$  で BCQ をみたす。
- (ii)  $\text{dom} f \cap S \neq \emptyset$  であり、かつ  $\text{epi} f^* + \text{epi} d_S^*$  が汎弱閉であるような任意の下半連続な真凸関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  に対して、 $\bar{x}$  が  $S$  での  $f$  の最小点であることと、次の2つの条件をみたすようなある  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$  が存在することは同値である。

$$\begin{cases} 0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial h_i(\bar{x}) \\ \lambda_i h_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I \end{cases}$$

ただし、 $\mathbb{R}_+^{(I)}$  は  $\lambda_i \neq 0$  となるような  $i$  の個数が多くても有限個しかない非負実数の組  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$  の集合である。

この定理は BCQ が凸計画問題における大域的な最適性条件のための最弱の制約想定であることを示している。

次は、Hiriart-Urruty [6] によって証明された制約なし DC 計画問題における局所的な最適性を特徴付けた結果を紹介する。

**定理 2.2** ([6]).  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  は下半連続な真凸関数、 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  は下半連続な凸関数とする。もし  $\bar{x} \in X$  が  $X$  での  $f - g$  の局所的な最小点であるならば、次は成り立つ。

$$\partial g(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$$

この定理を用いることによって、BCQ が凸不等式制約付き DC 計画問題における局所的な最適性条件のための最弱の制約想定であることが示される。

### 3 DC 計画問題

この章では、再び次のような DC 計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) - g(x) \\ & \text{subject to} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned}$$

ただし、 $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  は下半連続な真凸関数、 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  は下半連続な凸関数である。

**定理 3.1.**  $\{h_i: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid i \in I\}$  は下半連続な真凸関数族、 $\bar{x} \in S$  とする。このとき次は同値である。

- (i) 関数族  $\{h_i \mid i \in I\}$  が  $\bar{x}$  で BCQ をみたす。
- (ii)  $\text{dom} f \cap S \neq \emptyset$  であり、かつ  $\text{epi} f^* + \text{epi} \delta_S^*$  が汎弱閉であるような任意の下半連続な真凸関数  $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  と任意の下半連続な凸関数  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、もし  $\bar{x}$  が  $S$  での  $f - g$  の局所的な最小点であるならば、任意の  $v \in \partial g(\bar{x})$  に対して、次の 2 つの条件をみたすようなある  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$  が存在する。

$$\begin{cases} v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial h_i(\bar{x}) \\ \lambda_i h_i(\bar{x}) = 0, \quad \forall i \in I \end{cases}$$

この定理は BCQ が凸不等式制約付き DC 計画問題における局所的な最適性条件のための最弱の制約想定であることを示している。

## 4 応用

この章では、DC 計画問題の結果を分数計画問題や弱凸計画問題に応用する。特に弱凸計画問題に関しては滑らかな実バナッハ空間で考える。

### 4.1 分数計画問題

次のような分数計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x)/g(x) \\ & \text{subject to} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned}$$

ただし、 $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  は下半連続な真凸関数、 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  は下半連続な凸関数である。また、 $S$  上での  $f$  の値は非負、 $g$  の値は正である。

**定理 4.1.1.**  $\{h_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid i \in I\}$  は下半連続な真凸関数族、 $\bar{x} \in S$  とする。このとき次は同値である。

- (i) 関数族  $\{h_i \mid i \in I\}$  が  $\bar{x}$  で BCQ をみたす。
- (ii)  $\text{dom} f \cap S \neq \emptyset$  で、 $\text{epi} f^* + \text{epi} \delta_S^*$  が汎弱閉であり、かつ  $S$  上での値が非負であるような任意の下半連続な真凸関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  と  $S$  上での値が正であるような任意の下半連続な凸関数  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、もし  $\bar{x}$  が  $S$  での  $f/g$  の局所的な最小点であるならば、ある  $\lambda_0 \geq 0$  が存在して、任意の  $v \in \lambda_0 \partial g(\bar{x})$  に対して、次の2つの条件をみたすようなある  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$  が存在する。

$$\begin{cases} v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial h_i(\bar{x}) \\ \lambda_i h_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I \end{cases}$$

この定理は BCQ がまた分数計画問題における局所的な最適性条件のための最弱の制約想定であることを示している。

## 4.2 弱凸計画問題

ここでは、 $X$  はノルム  $\|\cdot\|$  をもつ実バナッハ空間とする。便宜上、 $X^*$  のノルムも  $\|\cdot\|$  で表す。 $X$  の双対写像  $J : X \rightarrow 2^{X^*}$  を任意の  $x \in X$  に対して、

$$J(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

と定義する。 $X$  の単位球面を  $S(X) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$  と表す。 $X$  が滑らかであるとは、任意の  $x, y \in S(X)$  に対して、極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在するときをいう。この場合、 $X$  の双対写像  $J$  は一価であることが知られている [11]。

関数  $p$  が弱凸関数であるとは、ある凸関数  $q$  と  $\rho \geq 0$  で  $p = q - \frac{\rho}{2} \|\cdot\|^2$  と表せるときをいう。次のような弱凸計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) - \frac{\rho}{2} \|x\|^2 \\ & \text{subject to} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned}$$

ただし、 $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  を下半連続な真凸関数、 $\rho \geq 0$  である。

次の定理は滑らかな実バナッハ空間において示される。

**定理 4.2.1.**  $\{h_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid i \in I\}$  は下半連続な真凸関数族、 $\bar{x} \in S$  とする。 $X$  が滑らかであると仮定するならば、このとき次は同値である。

- (i) 関数族  $\{h_i \mid i \in I\}$  が  $\bar{x}$  で BCQ をみたす。
- (ii)  $\text{dom} f \cap S \neq \emptyset$  であり、かつ  $\text{epi} f^* + \text{epi} \delta_S^*$  が汎弱閉であるような任意の下半連続な真凸関数  $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  と任意の  $\rho \geq 0$  に対して、もし  $\bar{x}$  が  $S$  での  $f - \frac{\rho}{2} \|\cdot\|^2$  の局所的最小点であるならば、次の2つの条件をみたすようなある  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$  が存在する。

$$\begin{cases} \rho J(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial h_i(\bar{x}) \\ \lambda_i h_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I \end{cases}$$

## 参考文献

- [1] R.I. BOŢ, I.B. HODREA, G. WANKA, *Farkas-type results for fractional programming problems*, *Nonlinear Anal.* 67 (2007) 1690–1703.
- [2] R.I. BOŢ, I.B. HODREA, G. WANKA, *Some new Farkas-type results for inequality systems with DC functions*, *J. Global Optim.* 39 (2007) 595–608.
- [3] N. DINH, T.T.A. NGHIA, G. VALLET, *A closedness condition and its applications to DC programs with convex constraints*, *Optimization.* 59 (2010) 541–560.
- [4] N. DINH, B. MORDUKHOVICH, T.T.A. NGHIA, *Subdifferentials of value functions and optimality conditions for DC and bilevel infinite and semi-infinite programs*, *Math. Program.* 123 (2010) 101–138.
- [5] M.A. GOBERNA, V. JEYAKUMAR, M.A. LÓPEZ, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, *Nonlinear Anal.* 68 (2008) 1184–1194.
- [6] J.-B. HIRIART-URRUTY, *From convex optimization to nonconvex optimization. Necessary and sufficient conditions for global optimality*, in: F.H. Clarke, V.F. Dem'yanov, F. Giannessi (Eds.), *Nonsmooth Optimization and Related Topics*, Plenum, New York, 1989, pp. 219–239.
- [7] V. JEYAKUMAR, *Constraint qualifications characterizing Lagrangian duality in convex optimization*, *J. Optim. Theory Appl.* 136 (2008) 31–41.
- [8] V. JEYAKUMAR, N. DINH, G.M. LEE, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization*, *Applied Mathematics Research Report AMR04/8*, University of New South Wales, Sydney, Australia, 2004.

- [9] V. JEYAKUMAR, B.M. GLOVER, *Characterizing global optimality for DC optimization problems under convex inequality constraints*, J. Global Optim. 8 (1996) 171–187.
- [10] C. LI, K.F. NG, T.K. PONG, *Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization*, SIAM J. Optim. 19 (2008) 163–187.
- [11] W. TAKAHASHI, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [12] Y. SAEKI, S. SUZUKI, D. KUROIWA, *The weakest constraint qualification for DC programming problems with convex inequality constraints*, submitted.