

## 離散時間モデルにおける最大持続生産量について

Maximal Sustainable Yield (MSY) for discrete-time dynamical model

\* 佐藤一憲・\*\* 山田慎也

\*\*\* 静岡大学工学部システム工学科

\*Kazunori Sato and \*\*Shinya Yamada

\*\*\* Department of Systems Engineering, Faculty of Engineering,  
Shizuoka University, Hamamatsu 432-8561 JAPAN  
sato@sys.eng.shizuoka.ac.jp

It is one of the important problems how to maximize the fish population catch permanently for our enough food supply. The amount for it is referred to as “Maximum Sustainable Yield (MSY)” in fishery resource management. Originally the continuous-time logistic model has often been used to formulate and evaluate MSY. Although we can only deal with the case of globally asymptotically stable equilibrium as MSY by using this model, fish population usually shows the temporal fluctuation, so we should carefully consider the dynamics including unstable equilibria, exhibiting, for example, the periodic cycle and chaotic behavior. In this article we use discrete-time logistic model to evaluate the MSY other than the globally asymptotically stable equilibrium.

### 1 はじめに

魚類をわれわれのタンパク源としての水産資源と考えたときに、その十分な量を永続的に確保することは重要である。過度に漁獲をおこなえば、その見返りとして、漁獲量が減ってしまうであろうし、逆にそのようになることを心配しすぎて漁獲が少なすぎると、われわれの食糧が十分に供給されなくなってしまう。したがって、どの程度の漁獲をおこなえば、食糧源としての水産資源を長期的には最も多く確保できるのかという問題を理論的に明らかにすることは重要である。水産資源管理学では、このような漁獲量を最大持続生産量 (Maximum Sustainable Yield = MSY) または最大持続収穫量と呼ぶ。

これまでに、MSY を推定するための数理モデリングが数多くおこなわれてきたが、もっとも古典的なものとして、以下のように、微分方程式によって表現される、連続時間のロジスティック成長モデル (水産資源管理学では Schaffer (1954) モデルと呼ばれたり、一般化したものは Pella and Tomlinson (1969) モデルと呼ばれる) によるものがある (たとえば、クラーク 1988) :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - eN(t) \quad (1)$$

ここで、 $N(t) \geq 0$  は時刻  $t$  での資源量を表す変数である。また、定数のパラメータとして、 $r > 0$  は内的自然増加率を、 $K > 0$  は環境収容力を、 $e \geq 0$  は漁獲努力を、それぞれ表す。 $r \leq e$  のとき、 $0$  は唯一の平衡点となり、全領域  $\mathbb{R}_+$  を吸引域とする大域的漸近安定な平衡点である。一方、 $r > e$  のときには、 $0$  と  $N^* = K(r - e)/r > 0$  は、それぞれ局所的な不安定な平衡点と局所的漸近安定な平衡点となる。そして、 $N^*$  は  $\text{int}\mathbb{R}_+$  を吸引域とする大域的漸近安定な平衡点である。

そこで、以降では、 $r > e$  のときのみを考えることにする。すなわち、自然に増加する分より少なめに漁獲すれば、資源は枯渇せずに永続的に獲り続けることができると言える。ここで考える MSY とは、平衡点において資源獲得量が最大となるような漁獲努力をしたときに実現する漁獲量のことをいう。いま考えているモデルでは、平衡点は  $N^*$  であり、このときの漁獲量 (持続生産量 SY) は  $eN^* = eK(r - e)/r$  である。この値を最大にする  $e$  の値は  $r/2$  であり、このときの漁獲量 (MSY) が  $rK/4$  と求められる。

このようにして得られた MSY は、水産資源を管理するためのひとつの方針としては意味があると思われるが、時間的に変動するような水産資源に対する指針は与えていない。これは、近年、MSY に対して批判されている理由のひとつにもなっている (Hilborn 2002; Matsuda and Abrams 2008)。時間変動を引き起こす原因のひとつとして、多種間相互作用が挙げられるが、複数の魚種を含む食物網のダイナミクスを明らかにすることはそれほど容易なことではない。いくつかの先駆的な研究は注目に値する (たとえば、原田・中島 1991; Matsuda and Abrams 2006)。

本論文では、1変数の離散時間モデルを取り上げることによって、内部平衡点が常に安定であるとは限らない場合のMSYを考えることを目的とする。なお、同様なモデルにより、解の安定性がモデルパラメータの推定や漁獲量の予測に与える影響を論じた研究もある (Kizner 1997)。

## 2 モデルとその結果

ここでは、離散時間モデルとして、連続時間モデルの式(1)を離散化したロジスティック写像を考える。すなわち、式(1)を離散化すると

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - eN(t)$$

より

$$N(t+\Delta t) = N(t) + r\Delta t N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - e\Delta t N(t)$$

となるが、ここでは、 $\Delta t = 1$ として考える。また、連続時間モデルの式(1)と区別するために、変数の記号を変更する：

$$N_{t+1} = N_t + rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - eN_t \quad (2)$$

$$= (r+1-e)N_t \left(1 - \frac{r}{r+1-e} \frac{N_t}{K}\right). \quad (3)$$

式(3)は、

$$n_t = \frac{r}{r+1-e} \frac{N_t}{K}, \quad (4)$$

$$a = r+1-e \quad (5)$$

という変数変換によって、さらに

$$n_{t+1} = an_t(1-n_t) \quad (6)$$

と変形できる。  $0 < n_0 < 1$  に対する定常軌道については、よく知られているように、パラメータ  $1 < a \leq 4$  に関して以下のようにまとめられる (いまは  $r > e$  として考えていたので  $a > 1$  である)。すなわち、  $1 < a \leq 3$  のとき平衡点  $1 - 1/a$  に収束、  $3 < a \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$  のとき  $1/2 + \{1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4}\}/(2a)$  の2つの値を交互に取る周期2、  $a$  の値が  $1 + \sqrt{6}$  を越えると周期4が現れる。この周期4の場合の定常軌道上の値は、12次の代数方程式の解であり、もはや代数的に解くことができない。そして、このような周期倍分岐を経て最終的にカオスへと至ることは良く知られている (たとえば、長島・馬場 1992; 図1(a))。

内部平衡点によって式(2)のMSYを求めると  $rK/4$  である (求め方は1節と同様)。しかし、パラメータ  $a$  の値が3を超える場合には、もはや内部平衡点は不安定であるので、このようにしてMSYを求めるのは現実的ではない。そこで、MSYを「定常軌道上の生産量の平均値の最大値」として定義する。これは、連続時間モデルでのMatsuda and Abrams (2006)の定義と同じであるが、彼らのモデルではLokta-Volterraモデルを用いているために、このようにして定義されたものと平衡点での値がたまたま同一視できる (Hofbauer and Sigmund 1998) ものとなっている。しかし、いまの式(2)では、両者は一致しないために、MSYの値を定義にしたがって求める必要がある。

内部平衡点に収束する場合と周期2の場合については、定常軌道上の値の平均値が

$$\langle n_t \rangle_{1 < a \leq 3} = 1 - \frac{1}{a}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \langle n_t \rangle_{3 < a \leq 1 + \sqrt{6}} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4}}{2a} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4}}{2a} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \end{aligned} \quad (8)$$

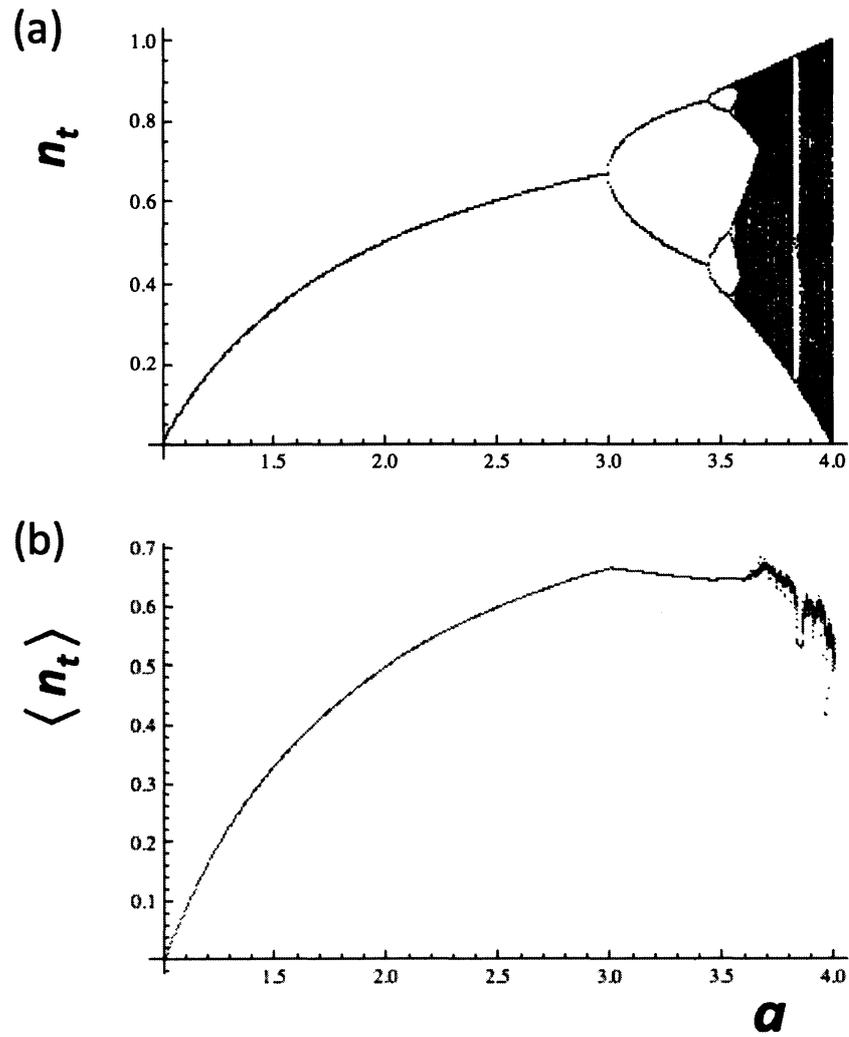


図 1: (a) ロジスティック写像 [式 (6)] の分岐図. (b) 定常軌道上の値の平均値.  $1 < a \leq 1 + \sqrt{6}$  および  $a = 4$  の値は式 (7)-式 (9) による. それ以外の  $1 + \sqrt{6} < a < 4$  の値は数値計算によって得られた近似値.

のように求められる。

$a = 4$  の場合には、定常軌道上の値に対する密度関数（不変測度）が

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

であることが知られている（たとえば、長島・馬場 1992）ので、そのときの軌道上の値の平均値を

$$\langle n_t \rangle_{a=4} = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2} \quad (9)$$

として得ることができる。

それ以外の  $a$  の場合には、数値計算によっておおよその値が得られる（図 1(b)）。

したがって、式 (2) の持続生産量  $SY$  は、式 (4) と式 (5) に注意すれば、式 (7)-式 (9) より

$$e\langle N_t \rangle_{r-2 \leq e < r} = \frac{e(r-e)K}{r}, \quad (10)$$

$$e\langle N_t \rangle_{r-\sqrt{6} \leq e < r-2} = \frac{(r+2-e)eK}{2r}, \quad (11)$$

$$e\langle N_t \rangle_{e=r-3} = \frac{2(r-3)K}{r} \quad (12)$$

となる。これ以外の  $r-3 < e < r-\sqrt{6}$  の場合については、数値計算によっておおよその値がわかる。ここで、 $1 < a \leq 4$  より、内的自然増加率  $r$  が与えられたときの漁獲努力  $e$  の範囲は  $r-3 \leq e < r$  であることに注意。したがって、以下のようにして、これらの値を最大にするような漁獲努力  $e$ 、および、そのときの  $MSY$  が（数値計算によって）求められる。

まず、 $e = r-3$  および  $r-\sqrt{6} \leq e < r$  の範囲について、 $r$  の値に応じて変わる  $e\langle N_t \rangle$  の最大値の様子をまとめたものが図 2 である。式 (10) と式 (11) の交点は  $(r-2, 2(r-2)K/r)$  である。 $r-\sqrt{6} \leq e < r$  の範囲における  $e\langle N_t \rangle$  の最大値を求めよう。式 (10) の  $r-2 \leq e < r$  における最大値の位置と、式 (11) の  $r-\sqrt{6} \leq e < r-2$  における最大値の位置によって、以下の場合分けが生じる。 $r \leq 4$  の場合には、 $e = r/2$  で最大値  $rK/4$  を取る。 $4 < r < 6$  の場合には、 $e = r-2$  で最大値  $2(r-2)K/r$  を取る。 $6 \leq r \leq 2+2\sqrt{6}$  の場合には、 $e = (r+2)/2$  で最大値  $(r+2)^2K/(8r)$  を取る。 $r > 2+2\sqrt{6}$  の場合には、 $e = r-\sqrt{6}$  で最大値  $e = (2+\sqrt{6})(r-\sqrt{6})K/(2r)$  を取る。また、 $e = r-\sqrt{6}$  における  $e\langle N_t \rangle$  の値  $(2+\sqrt{6})(r-\sqrt{6})K/(2r)$  は、式 (12) による  $e = r-3$  における  $e\langle N_t \rangle$  の値  $2(r-3)K/r$  よりも常に大きい。

これらの場合分けのそれぞれに対して、 $r-3 < e < r-\sqrt{6}$  の範囲における最大値を数値計算によって求めたものと比較して、 $r-3 \leq e < r$  の範囲において最大値を与える  $e$  の値と、それに対応する  $a$  の値、さらにそのときのダイナミクスも示しながら、 $MSY$  をまとめたものが図 3 である。この図から、離散ロジスティックモデルの場合には、 $MSY$  は内部平衡点によって求めた値とは異なっていて、より小さい値を取ることがわかる。

### 3 おわりに

水産資源学では、 $MSY$  を推定することは、長期的に水産資源を確保しながら食糧を供給する上で、極めて重要である。通常、安定な内部平衡点によって求めることが多いが、変動する資源の場合には内部平衡点から予想されるものとは異なる値となることを、ロジスティック写像の場合に示した。ただし、内的自然増加率が大きい場合には、パラメータの制約から漁獲努力を 0 とすることはできない。これは、水産資源のモデルとしては少し不自然かもしれない。生態学では、内的自然増加率の制約をなくすために、式 (6) の代わりに  $n_{t+1} = \max\{0, an_t(1-n_t)\}$  のような定式化をおこなうこともあるが、そもそも資源がない状態で漁獲はおこなえないから、内的自然増加率が大きい場合にはやはり理屈が必要だろう。あるいは、Ricker モデルのような別のモデルに対して同様の解析をおこなう方がモデリングとしては自然かもしれない。

今後の発展としては以下のようなものが挙げられる。まず、上で述べたように、Schafer モデル以外のモデルについて解析をおこなうことである。また、「はじめに」で引用した文献にならって、多種系のモデル

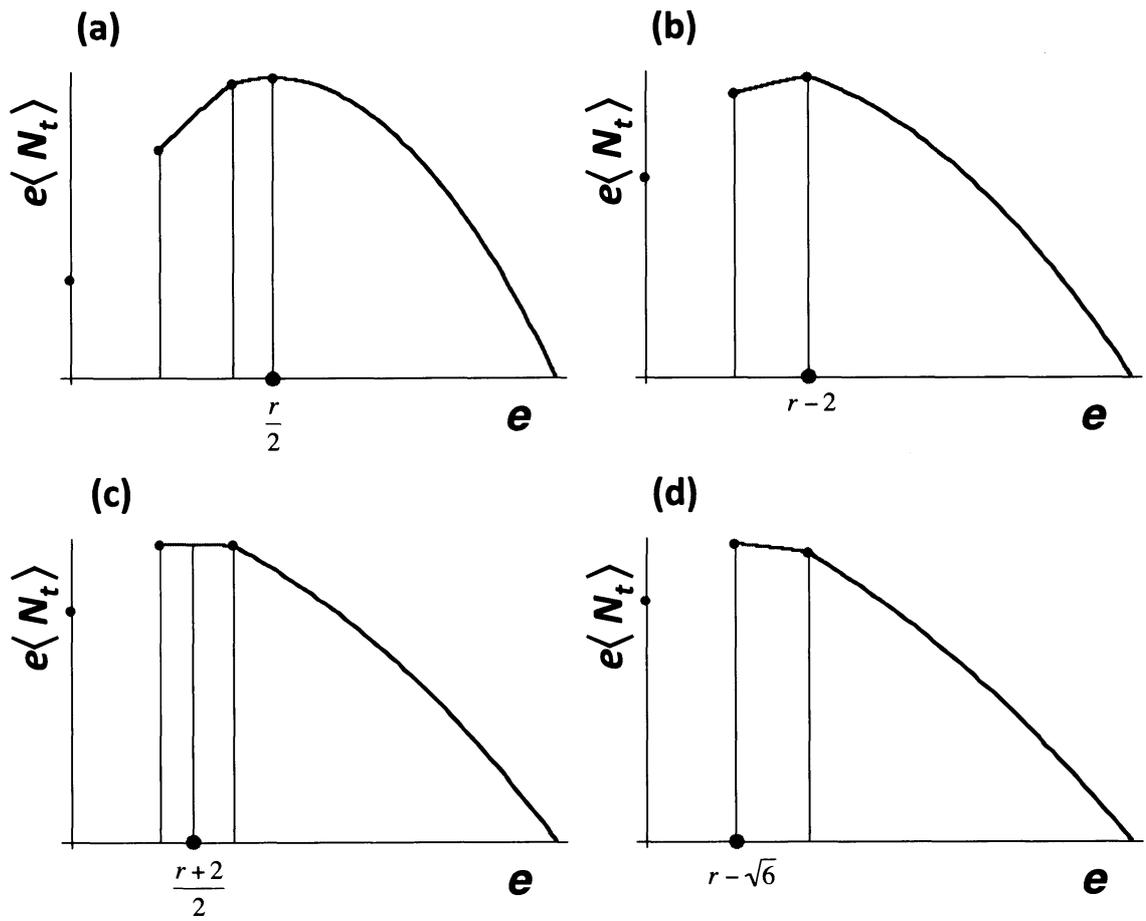


図 2:  $e$  に対する  $e(N_t)$  の値. (a)  $r \leq 4$  の場合. (b)  $4 < r < 6$  の場合. (c)  $6 \leq r \leq 2 + 2\sqrt{6}$  の場合. (d)  $r > 2 + 2\sqrt{6}$  の場合. (a) より,  $0 \leq r \leq \sqrt{6}$  では MSY の値が正しく得られる.

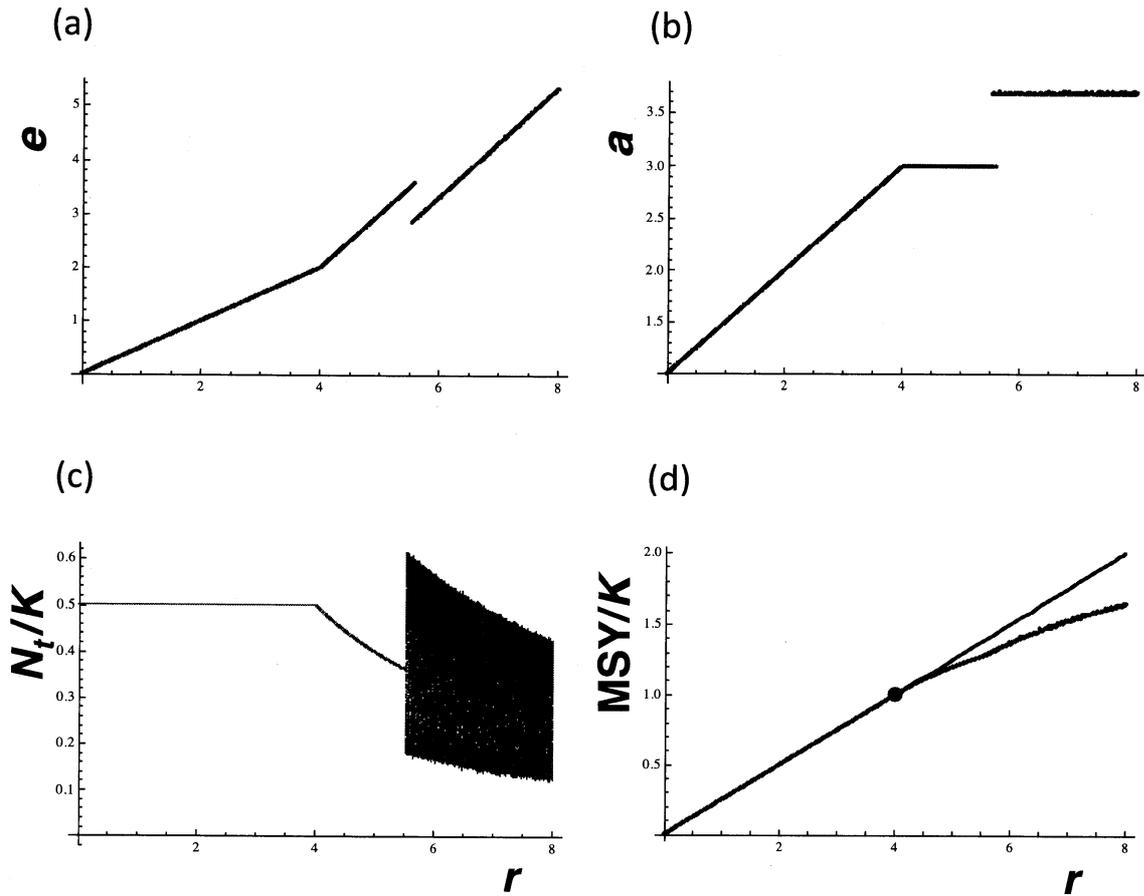


図 3: ロジスティック写像 [式 (2)] の MSY. (a) MSY を与える  $e$  の値. (b) 式 (5) において (a) を書き換えたもの. (c) MSY を与えるパラメータを用いたときのダイナミクス. (d) MSY の値. ただし, 太線は十分に時間が経過した後の平均値として得られた MSY. 細線は内部平衡点を用いた場合.  $0 \leq r \leq \sqrt{6}$  では, 両者は一致する. また,  $\sqrt{6} < r \leq 4$  でも両者の値は一致すると思われる.

も考えていくべき課題である。さらに、現実的な変動を表すために、ノイズを入れたモデル（確率差分方程式）によってMSYを定義して、その解析をおこなうことが挙げられる。このとき、これまでに得られている確率微分方程式による結果と対応づけた解析をおこなっていくことも必要である。

## 謝辞

広島大学の瀬野裕美氏には、本論文に関連のある文献を教えていただきました。ここに感謝の意を表します。

## 参考文献

- クラーク, C. W. (田中昌一 監訳) (1988). “生物資源管理論.” 恒星社厚生閣.
- 原田泰志・中島久男. (1991). 複数種相互作用系の管理についての理論的研究. 数理解析研究所講究録 762: 201-211.
- Hilborn, C. W. (2002). The dark side of reference points. *Bull. Mar. Sci.* 70: 403-408.
- Hofbauer, J. and Sigmund, K. (1998). “Evolutionary Games and Population Dynamics.” Cambridge University Press, Cambridge.
- Kizner, Z. (1997). Stability properties of discrete stock-production models. *Sci. Mar.* 61: 195-201.
- Matsuda, H. and Abrams, P. A. (2006). Maximal yields from multispecies fisheries systems: Rules for systems with multiple trophic levels. *Ecol. Appl.* 16: 225-237.
- Matsuda, H. and Abrams, P. A. (2008). Can we say goodbye to the maximum sustainable yield theory? Reflections on trophic level fishing in reconciling fisheries with conservation. in Nielsen JL, Dodson JJ, Friedland K, Hamon TR, Musick J, Verspoor E (eds) “Reconciling fisheries with conservation: proceedings of the Fourth World Fisheries Congress.” American Fisheries Society, Symposium 49, Bethesda, Maryland 587-594.
- 長島弘幸・馬場良和. (1992). “カオス入門.” 培風館, 東京.
- Pella, J. J. and Tomlinson, P. K. (1969). A generalized stock production model. *Bull. Int. Am. Trop. Tuna Commun.* 13: 419-496.
- Schafer, M. B. (1954). Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Bull. Int. Am. Trop. Tuna Commun.* 1: 27-56.