

## 実閉体の一つの応用—ŁOJASIEWICZ の不等式

名古屋大学多元数理科学研究科 塩田昌弘 (MASAHIRO SHIOTA)  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS,  
NAGOYA UNIVERSITY

### 1. 序文

$\mathbf{R}^n$  上の多項式関数または  $\mathbf{R}^n$  の準代数的部分集合に関する問題について次のような原則というか哲学というか、そんなものがある。

ある問題が局所的に constructive に証明されれば、大域的に成り立つ。

ここで準代数的部分集合とか constructive に証明とかいつているが、それはこの講究録の私のもう一つ別の論文で定義されている。以下もいくつかの言葉を再定義せずに用いる。局所的とは「任意の  $\mathbf{R}^n$  の各元に対して、その近傍が存在して…」のことで、または「 $\mathbf{R}^n$  の有界な閉部分集合の各元に対して、…」のことで、それが大域的とは「 $\mathbf{R}^n$  の各元に対して…」のことである。この哲学は厳密にはうそで、あまい意味で本当である。(ここで有界な閉部分集合と言って、コンパクトとは言っていない。その理由は  $\mathbf{R}^n$  の有界な閉部分集合はコンパクトであるが、一般の実閉体  $R$  では  $R^n$  の有界な準代数的閉部分集合はコンパクトとは限らないからである。また constructive に準代数的部分集合がコンパクトであるかどうか判定できないが、有界な閉部分集合であるかどうかは判定できる。以下の議論はコンパクトでなくて有界な閉部分集合で考える。) 例で示す。

問題 「 $n$  変数多項式関数  $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$  は有界である。」

もちろんこの問題は局所的に正しく、大域的に正しくない。さらに局所的に constructive に証明できる。実際  $b > 0 \in \mathbf{R}$  に対して  $c = \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha| b^{|\alpha|}$  と置けば、 $c$  は  $a_\alpha$  と  $b$  で constructive に記述できていて、 $x \in [-b, b]^n$  で  $|f(x)| \leq c$  がなりたつ。あまい意味で問題は正しいとは次の意味である。その前に代数的実 Puiseux ベキ級数のある性質を述べる。それが必要である。

$R$  を代数的実 Puiseux ベキ級数体とし、 $R$  は  $t$  をベキ級数の変数とする。これ以降  $R$  は常にこの体を意味し、 $t$  は常に代数的実 Puiseux ベキ級数の変数とする。 $R$  が実閉体であることを思い出してほしい。 $t^{1/2}$  は  $R$  の元で  $(t^{1/2})^2 = t$  となる。前の論文の注意 5 より  $R$  の元の 2 乗は正であるので、 $t > 0$  となる。同様に、 $1-t = (1-t/2-t^2/8+\dots)^2$  となり、前の論文の定義 1 より括弧の中の元は  $R$  の元なので、 $1-t > 0$  で  $t < 1$  となる。ここで 1 は本質的でなく、任意の正の実数  $a$  に対して、 $t < a$  となる。すなわち  $t$  は  $\mathbf{R}$  の中で 0 と开区間  $(0, \infty)$  の隙間にある。隙間があると思っしてほしい。また  $1/t$  は  $\infty$  にあり、 $0 < \dots < t^2 < t < 1 < 1/t < 1/t^2 < \dots$  となる。

2000 Mathematics Subject Classification. 12D10, 12J15, 14P10.

Key words and phrases. Łojasiewicz の不等式、代数的実 Puiseux ベキ級数体、実閉体。

ここで上の問題に戻る。関数  $f(x)$  の変数  $x$  の動く範囲を  $\mathbf{R}$  から  $R$  に拡張する。その関数を区別するため、 $f_R$  と書く。ただし  $f_R$  を記述すれば、 $f_R(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$  で  $f$  と変わらない。(区間も  $R$  での区間は、もし  $a$  と  $b$  が実数なら、 $(a, b)$  では  $\mathbf{R}$  の区間とも取れるので、 $R$  での区間を  $(a, b)_R$ ,  $[a, b]_R$  のように書く。)  $R$  で考えても局所的に問題は正しい。すなわち  $R^n$  の任意の有界閉部分集合で  $f_R$  は有界である。なぜなら上の  $c$  は constructive に作れるから。よって有界閉部分集合  $[-1/t, 1/t]_R^n$  で  $f_R$  は有界で、特に  $\mathbf{R}^n$  で有界になる。ただし  $c$  は例えば、 $1/t^{m+1}$  とする。よって  $|f(x)| < 1/t^{m+1}$  が  $\mathbf{R}^n$  上でいえる。これが「あまい意味で本当である」ということである。もちろん  $1/t^{m+1}$  が実数でないので役に立たない。しかし問題によっては、 $c$  に当たるのが実数で取れ、実数の中で正しいことがある。そんな一つの問題をこれから説明する。

## 2. LOJASIEWICZ の第二不等式

Lojasiewicz の不等式には第一と第二がある。第一はよく知られているが、第二はそうではない。しかし、応用数学で使われているようである。昔、応用数学の人と Lojasiewicz の不等式について話をしていた、話が噛み合なかったことがある。こちらは第一のつもりで、相手は第二のつもりで話をしていたからである。

Lojasiewicz の第二不等式.  $f$  を  $n$  変数多項式関数、 $x = (x_1, \dots, x_n)$  を変数とする。すると  $f^{-1}(0)$  の  $\mathbf{R}^n$  での準代数的近傍  $V$  と 1 より小さい正の有理数  $\theta$  が存在して、不等式

$$|f(x)|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|, \quad x \in V$$

がなりたつ。

Lojasiewicz はこれを局所的に証明した [2]。但しその証明は constructive なものではなく、ベクトル場の積分を使っている。この論文では constructive に局所的に証明する。簡単な証明である。大事なことは、序文にあった  $c$  はここでは  $\theta$  にあたり、 $c$  は有界閉集合によって決まったが、この  $\theta$  は  $f$  によって決まることである。だから  $\mathbf{R}$  を  $R$  に代えても  $\theta$  は変わらない。だから Lojasiewicz の不等式は大域的に成り立つ。この証明では代数的実 Puiseux ベキ級数体を 2 度使う。最初は局所的に証明するのを constructive にするため。ここではどうしても必要なわけではない。ただ準代数的連続曲線を考えるので十分である。2 度目では、大域的証明で  $\mathbf{R}$  を  $R$  で置き換えて、 $\mathbf{R}$  のいわゆるコンパクト化をする。普通の一点コンパクト化は、不等式に微分があるので、不十分である。ここでも 6 節で述べるように、代数的実 Puiseux ベキ級数という言葉を使わずに、証明できる。しかし代数的実 Puiseux ベキ級数を通して見れば、すべてがよく見える。

証明をするとき、 $f$  は定値関数ではない、また  $f^{-1}(0)$  は空集合でないとして良い。

注意 1.  $V$  を  $\mathbf{R}^n$  に代えると不等式は成り立つとはいえない。例えば  $n = 1$  で  $f(x) = 1 + x^2$  のとき  $x = 0$  で  $f(x) = 1$  かつ  $\frac{df}{dx}(x) = 0$  なので、不等式は成り立たない。

注意 2.  $n = 1$  なら証明は次のように簡単である。 $f^{-1}(0)$  は有限集合なので、 $f(0) = 0$  とし、0 の近傍で考えれば良い。 $f(x) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots$ ,  $a_k \neq 0$  とする。すると

$f(x)$  は 0 の近傍で  $a_k x^k$  に近いので、 $f(x) = a_k x^k$  だと思い、 $\theta = (k-1)/k$  と置けば、 $|f(x)|^\theta \leq \left| \frac{df}{dx}(x) \right|$  が 0 の近くでいえる。大域的には  $\theta = (f \text{ の次数} - 1) / (f \text{ の次数})$  と置けば良い。

よって不等式の証明は  $n > 1$  と仮定して行う。

注意 3. 同様にもし  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が準代数的 (グラフが準代数的という意味) 連続関数で  $f(0) = 0$  ならば、0 の区間  $[0, \infty)$  での近傍  $V$  と有理数  $\theta$  が存在して、 $0 < \theta < 1$  で、 $f$  は  $V - \{0\}$  で  $C^1$  級で、そして、不等式

$$|f(x)|^\theta \leq \left| \frac{df}{dx}(x) \right|, \quad x \in V - \{0\}$$

がなりたつ。どうしてかといえ、次の節で説明することだが、0 の区間  $[0, \infty)$  での近傍  $U$  と、代数的実 Puiseux ベキ級数  $\sum_{n=p, p+1, \dots} a_n t^{n/q}$ ,  $a_n \in \mathbf{R}$ ,  $p, q \in \mathbf{Z}$ ,  $p, q > 0$  が存在して、 $\sum_{n=p, p+1, \dots} a_n t^{n/q}$  は  $U - \{0\}$  の各点で収束して、そこで  $\sum_{n=p, p+1, \dots} a_n t^{n/q} = f(t)$  となる。よって  $U - \{0\}$  で関数  $\sum_{n=p, p+1, \dots} a_n x^{n/q}$  を調べれば良い。  $p \leq q$  なら  $\theta = 1/2$  とし  $V$  を十分小さくとれば不等式が成り立つ。(なぜなら  $x \rightarrow 0$  なら  $\frac{df}{dx}(x) \rightarrow \infty$  であるから。)  $p > q$  とする。そのときは  $\theta = (p/q - 1) / (p/q)$  と置けば、不等式は注意 2 と同じようにして証明できる。実は Lojasiewicz の不等式の証明は問題をこの場合に帰着させて行う。

注意 4.  $\theta = 1$  で良いならば不等式は次のように簡単に証明できる。(これも注意 3 に帰着させるのが簡単な証明である。)  $f(0) = 0$  として、0 の小さな近傍で不等式が成り立つのを見ればいい。(Lojasiewicz の不等式を局所的に証明しても、大域的に証明したことにならないのは、 $\theta$  が場所によって変わってくるからである。 $\mathbf{R}^n$  のどこでも通用する  $\theta$  が必要である。 $\theta = 1$  ならこの問題はない。準代数的な  $V$  が取れるというのは、 $V = \{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|\}$  とおけば、準代数的集合の定義より明らかである。) 背理法で証明する。なりたたない  $\mathbf{R}^n$  の点全体を  $X$  と置く。すなわち

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| > \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|\}$$

とすると、 $X$  は準代数的集合の条件 (前の論文の定義 3) を満たすので、 $X$  は準代数的集合である。仮定より  $X$  の閉包は 0 を含む。そのとき準代数的連続写像  $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$  があって、 $\phi(0) = 0$  かつ  $\phi((0, \infty)) \subset X$  となる (curve selection lemma)。  $s$  を  $[0, \infty)$  の変数とする。さらに  $m$  を十分大きな自然数として、 $\phi(s)$  を  $\phi(s^m)$  で置き換える。すると  $\phi$  は 0 の近くで  $C^1$  級で  $\frac{d\phi}{ds}(0) = 0$  と仮定できる。(これも次の節で分かることである。)  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  と置き、注意 3 の  $f$  に  $f \circ \phi$  を当てはめる。すると  $s$  が 0 に近ければ、

$$|f \circ \phi(s)| \leq |f \circ \phi(s)|^\theta \leq \left| \frac{df \circ \phi}{ds}(s) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \phi(s) \frac{d\phi}{ds}(s) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \phi(s) \right|$$

がいえる。よって  $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$  が  $\phi$  の像で 0 に近いところ、すなわち  $X$  の何か 0 に近いところでいえる。矛盾。

## 3. 代数的実 PUISEUX ベキ級数

代数的実 Puiseux ベキ級数を Lojasiewicz の不等式の証明で使えるように、それを幾何学的に解釈する。複素数ではこうは解釈できない。実数では幾何学と結びつき、複素数では結びつかないことがある。

まず代数的実 Puiseux ベキ級数体の順序を前の論文よりもっと自然に幾何学的に定義する。ベキ級数の変数を  $t$  とし、 $(t, x)$ -平面で代数的実 Puiseux ベキ級数  $x = f(t) = \sum_{n=p, p+1, \dots} a_n t^{n/q}$  のグラフを考えたい。まずベキ級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  は収束ベキ級数であることは次のようにして分かる。

$f$  は代数的なので、0 でない 2 変数多項式関数  $P(t, x)$  があり、 $P(t, f(t))$  が関数としてではなく、代数的に 0 となる。 $P$  は  $t$  で割り切れないとして良い。 $P$  は  $x$  に関して  $m'$  次とする。 $P_C$  で  $\mathbb{C}^2$  に  $P$  を拡張したものとする。すると 0 に近い各複素数  $t$  に対して  $P_C(t, x) = 0$  は  $m'$  個の複素数根を持つ。また  $P_C^{-1}(0)$  は 0 以外で 0 の近くで滑らかである。さらに  $P_C^{-1}(0)$  から  $t$ -複素数平面への射影は 0 を除いて 0 の近くで被覆写像になっている。よって写像  $\{(t, x) \in \mathbb{C}^2 : P_C(t^{m'}, x) = 0\} \ni (t, x) \rightarrow t \in \mathbb{C}$  は 0 を除いて 0 の近くでトリビアルな被覆写像になる。複素数で考えているので、集合  $\{(t, x) \in \mathbb{C}^2 : P_C(t^{m'}, x) = 0\}$  の 0 での芽は解析的多様体の芽の有限和になっている。(なぜなら、一般に、0 を除いて複素解析的な関数が 0 に  $C^0$  拡張可能なら 0 でも複素解析的だから。) 収束ベキ級数  $g_i(t)$  と  $h(t, x)$  があって  $h(0, 0) \neq 0$  で  $P_C(t^{m'}, x) = h(t, x) \prod_i (x - g_i(t))$  となる。 $x$  に  $f(t^{m'})$  を代入すると、 $P_C(t^{m'}, f(t^{m'})) = 0$  なので、ある  $i$  について  $f(t^{m'}) = g_i(t)$  となる。よって  $f(t^{m'})$  が解析的となる。これは  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  が収束ベキ級数であることを意味する。

よって  $\epsilon$  を十分小さい正の実数とすれば、 $f(t)$  は开区間  $(0, \epsilon)$  で収束値をとる。よって开区間  $(0, \epsilon)$  でグラフが書ける。そのグラフの  $x$ -軸での芽を考える。それを  $\text{graph } f$  と書くことにする。例えば、 $f(t) \equiv 0$  なら、 $\text{graph } f$  は  $t$ -軸の正の部分の 0 における芽。 $f(t) = t$  なら、半直線  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = x, t > 0\}$  の 0 での芽。相異なる 2 つの  $\text{graph } f_1$  と  $\text{graph } f_2$  があれば、必ず、どちらかがその他より上にある。 $\text{graph } f_1$  が  $\text{graph } f_2$  より上にあるとき、 $f_1 > f_2$  と書くことにする。するとこれは順序になり、この順序は前の論文の代数的実 Puiseux ベキ級数体の順序と同じものになる。こう順序を定義すると、ベキ級数  $t$  はどの正の実数より小さいこと、 $1/t$  はどの実数より大きいこと、 $0 < \dots < t^2 < t < 1 < 1/t < 1/t^2 < \dots$  であることは自然である。

このことから 0 でない  $R$  の元  $\sum_{n=q, q+1, \dots} a_n t^{n/p}$  が正であるとは、先頭の係数  $a_q$  が 0 でないように取れば、それが正であること、が分かる。

逆に準代数的連続関数  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  があれば、代数的実 Puiseux ベキ級数  $f(t) = \sum_{n=p, p+1, \dots} a_n t^{n/q}$  があり、十分小さい正の実数  $\epsilon$  があって  $g(t) = f(t)$  が区間  $(0, \epsilon]$  で成り立つのが次の理由でいえる。準代数的集合の定義より有限個の  $(t, x)$ -変数多項式  $f_{ij}(t, x)$  と  $*_{ij} \in \{=, >\}$  があって

$$\text{graph } g = \cup_i \cap_j \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : f_{ij}(t, x) *_{ij} 0\}$$

となる。ここで  $\text{graph } g$  は関数  $g$  のグラフで、それは一次元なので、 $f_{ij}$  と  $*_{ij}$  で要らないのをできるだけ除くと、 $\text{graph } g$  の  $x$ -軸での芽と、ひとつの零点  $f_{ij}^{-1}(0)$  の  $x$ -軸での芽

とが同じものになる。すなわちひとつ  $(ij)$  と正の実数  $\epsilon$  があり

$$\text{graph } g \cap [0, \epsilon] \times \mathbf{R} = \{(t, x) \in [0, \epsilon] \times \mathbf{R} : f_{ij}(t, x) = 0\}$$

となる。よって前の議論と同じようにして  $g$  の芽が代数的実 Puiseux ベキ級数で書き表せることが分かる。

次に  $\mathbf{R}$  を  $R$  に拡張することの幾何学的な意味を見る。各  $R$  の元、すなわち各代数的実 Puiseux ベキ級数  $f(t)$  に対して、十分小さい正の実数  $\epsilon$  をとり、开区間  $(0, \epsilon)$  で定義された関数  $f$  の  $0$  における芽と  $f$  を解釈している。だから、 $R^n$  の元  $(f_1, \dots, f_n)$  は开区間  $(0, \epsilon)$  から  $\mathbf{R}^n$  への写像の  $0$  での芽になる。 $\mathbf{R}^n$  の一点を任意にとり、それを  $(0, \infty)$  からその点への恒等写像の  $0$  での芽と解釈する。このようにして  $\mathbf{R}^n$  の元を  $R^n$  の元だと思えば、 $\mathbf{R}^n$  は  $R^n$  に含まれる。だから  $\mathbf{R}^n$  の準代数的部分集合  $X$  を、ちょうど  $\mathbf{R}^n$  を  $R^n$  に広げたように広げると、 $R^n$  の部分集合

$$\{f = (f_1, \dots, f_n) \in R^n : \text{Im } f \subset X\}$$

ができる。ただし  $\text{Im } f$  は写像  $f$  の像ではなく、 $f$  を写像だと思えば、その像の芽である。これが前の論文の Artin-Lang の定理で述べた  $X_R$  すなわち、

$$X = \cup_i \cap_j \{x \in \mathbf{R}^n : f_{ij} *_{ij} 0\} \quad \text{のとき} \quad X_R = \cup_i \cap_j \{x \in R^n : f_{ijR} *_{ij} 0\}$$

と定義した  $X_R$  と同じものになる。ただし  $f_{ij}$  は  $\mathbf{R}^n$  上の多項式関数で  $f_{ijR}$  はそれを  $R^n$  上に拡張したもの、 $*_{ij}$  は「 $=$ 」または「 $>$ 」である。これで  $X_R$  は  $f_{ijR}$  と  $*_{ij}$  よらず、 $X$  のみによるものであることが納得できる。

最後に  $R$  の位相であるが、それは  $\mathbf{R}$  と同じように定義する。すなわち  $R$  の開集合とは  $R$  の开区間の和集合である。 $R^n$  には積位相を入れる。今は代数的実 Puiseux ベキ級数体だけを考えているが、一般の位相体でもこうして位相を入れる。重要なことは、 $R$  が  $\mathbf{R}$  を含めば、 $\mathbf{R}^n$  の準代数的部分集合  $X_1 \subset X_2$  に対して、 $X_1$  が  $X_2$  の中で開 (閉) 集合ならば、 $X_{1R}$  は  $X_{2R}$  の中で開 (閉) 集合になることである。それは容易に分かる。 $R$  の元  $\gamma_1$  が他の元  $\gamma_2$  に近いということは  $\gamma_1 - \gamma_2$  が  $0$  に近いということ。  $0$  でない  $R$  の元  $\sum_{n=q, q+1, \dots} a_n t^{n/p}$  が  $0$  に近いということは、先頭の係数  $a_q$  が  $0$  でないように取れば、有理数  $q/p$  が大きいことである。

#### 4. CONSTRUCTIVE な局所的な証明

Lojasiewicz の第二不等式を constructive に局所的に証明する。 $C$  を  $\mathbf{R}^n$  の準代数的有界閉部分集合とする。各  $u \in [0, \infty)$  に対して  $\phi(u)$  を

$$\phi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| : |f(x)| = u, x \in C \right\}$$

で定義する。すると  $\phi$  は準代数的かつ下に半連続になる。(準代数的なことは次の事実から分かる。 $\mathbf{R}^2$  の準代数的部分集合  $Z$  に対して  $\psi(u) = \inf \{x \in \mathbf{R} : (u, x) \in Z\}$  と置けば、

$$\text{graph } \psi = \{(u, x) \in \mathbf{R}^2 : \forall (u, x') \in Z \ x \leq x', \forall \epsilon > 0 \in \mathbf{R} \ \exists (u, x') \in Z \ x' < x + \epsilon\}$$

となり、この集合は constructive に記述されているので準代数的。) よって  $\phi(0)$  を  $\lim_{u \rightarrow +0} \phi(u)$  で置き代えて、 $\phi$  は閉区間  $[0, \epsilon]$  で連続とする。ただし  $\epsilon$  は十分小さな正の実数。こう置き換えても準代数的集合の定義より  $\phi$  は準代数的である。このとき  $0 < \theta < 1$  なる有理数を見つけ、 $|u|^\theta \leq \phi(u)$  が小さな  $u$  に対してなるたつようにすれば良い。 $\phi(0) > 0$  なら明らかなので、 $\phi(0) = 0$  とする。 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  の部分閉集合  $X$  を

$$X = \{(x, u) \in C \times (0, \epsilon] : |f(x)| = u, \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| = \phi(u)\}$$

で定義する。すると  $X$  は準代数的で、 $\bar{X} - X$  は  $C \times \{0\}$  の元を含む。curve selection lemma(至る所に書いてある、例えば [3]) より準代数的連続写像  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \alpha_2) : (0, 1] \rightarrow X \subset C \times (0, \epsilon]$  が存在して  $\lim_{u \rightarrow 0} \alpha_2(u) = 0$  となる。そのとき  $\alpha_2$  は単調増加関数とし、注意 4 の中と同じようにして  $\alpha$  は  $C^1$  級だとして良く、さらに  $|\frac{d\alpha_1}{du}| \leq 1$  として良い。すると注意 3 より  $0 < \theta < 1$  なる有理数  $\theta$  と正の実数  $\delta$  が存在して、もし  $u \in (0, \alpha_2^{-1}(\delta)]$  なら次の不等式が成り立つ。

$$|f \circ \alpha_1(u)|^\theta \leq \left| \frac{df \circ \alpha_1}{du}(u) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \alpha_1(u) \right| \left| \frac{d\alpha_{1i}}{du}(u) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \alpha_1(u) \right|$$

ゆえに

$$|f(x)|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|, \quad x \in C \cap f^{-1}([-\alpha_2^{-1}(\delta), \alpha_2^{-1}(\delta)])$$

となる。ここで  $C \cap f^{-1}([-\alpha_2^{-1}(\delta), \alpha_2^{-1}(\delta)])$  は  $C \cap f^{-1}(0)$  の  $C$  における準代数的近傍であるので、証明ができた。□

注意 5. 上の証明は constructive。ゆえに、どのような実閉体でも成り立つ。

## 5. 大域的な証明

$f_R$  を  $\mathbf{R}^n$  の準代数的有界閉部分集合  $[-1/t, 1/t]_R^n$  上で考える。注意 5 より集合  $f_R^{-1}(0) \cap [-1/t, 1/t]_R^n$  の  $[-1/t, 1/t]_R^n$  での準代数的近傍  $V$  と  $0 < \theta < 1$  となる有理数  $\theta$  が存在して、 $|f_R|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f_R}{\partial x_i} \right|$  が  $V$  で成り立つ。特に  $V \cap \mathbf{R}^n$  で成り立つ。ゆえに  $V \cap \mathbf{R}^n$  が  $f^{-1}(0)$  の  $\mathbf{R}^n$  での準代数的近傍であるように  $V$  を取れることを示せば良い。どんな準代数的近傍  $V$  でも  $V \cap \mathbf{R}^n$  が  $f^{-1}(0)$  の  $\mathbf{R}^n$  での準代数的近傍である、ということはない。例えば  $V = \{x \in \mathbf{R}^n : \text{dis}(x, f_R^{-1}(0)) \leq t\}$  では、そうはならない。あまりに小さすぎ  $V \cap \mathbf{R}^n = f^{-1}(0)$  となる。そなわちある程度大きな  $V$  を取らなければいけない。

大域的な証明は 4 節の証明をもっと丁寧に見るだけである。4 節の証明のように  $C$  を固定できないから変数をもう一つ増やす。集合  $[0, \infty)^2$  上の関数  $\phi$  を

$$\phi(s, u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| : |f(x)| = u, |x| \leq s \right\}$$

で定義し、 $\Phi(u) = \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s, u)$  と置き、 $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)^2$  の部分集合  $X$  を

$$X = \{(x, s, u) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty)^2 : |f(x)| = u, \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| = \phi(s, u), |x| \leq s\}$$

で定義する。すると  $\phi$  も  $\Phi$  も  $X$  も準代数的で、 $X$  は  $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)^2$  の閉集合で、 $u$  を固定すると  $\phi(s, u)$  は  $s$  に関して単調減少関数。二つの場合に証明を分けて考える。

正の実数  $s_0$  と  $u_0$  があって、集合  $[s_0, \infty) \times (0, u_0]$  上で  $\Phi(u) = \phi(s, u)$  となる場合。この場合は本質的に局所的な場合と同じである。 $C = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq s_0\}$  と置く。 $C$  は有界準代数的閉集合である。 $C$  上でのみ  $f$  を考える。すると局所的な場合の証明は終わっているので、ある  $f^{-1}(0) \cap C$  の  $C$  での準代数的近傍  $V_C$  と  $0 < \theta < 1$  となる有理数  $\theta$  が存在して、不等式  $|f|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|$  が  $V_C$  上でいえる。 $u_0$  を小さく取りかえて、 $\{x \in C : |f(x)| \leq u_0\} \subset V_C$  となるようにしておき、 $V_C$  を集合  $\{x \in C : |f(x)| \leq u_0\}$  で置き換える。そのとき  $V = \{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| \leq u_0\}$  と置けば、問題の不等式は  $V$  上でいえる。なぜなら  $V - V_C$  の任意の元  $x$  に対して、 $|x| > s_0$  かつ  $|f(x)| \leq u_0$  なので、 $V_C$  の元  $x'$  があって  $|f(x')| = |f(x)|$  かつ  $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') \right| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$  となり、 $|f(x)|^\theta = |f(x')|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') \right| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$  となるからである。ゆえに大域の場合も成り立つ。

どのように正の実数  $s_0$  と  $u_0$  を取っても、 $[s_0, \infty) \times (0, u_0]$  上で  $\Phi(u) = \phi(s, u)$  とはならない場合。正の実数  $s_0$  を大きくとって、 $|x| < s_0$  なる  $\mathbf{R}^n$  のある元  $x$  で  $f$  は値 0 をとるとする。すると curve selection lemma の証明 ([3] の 108 ページ) と同じようにして次のことがいえる。(詳しく説明するには、もう少し定義しなければいけないことがあり、大雑把に説明しても何かを仮定しなければいけない。それで、証明は省略する。)  $[s_0, \infty) \times \{0\}$  の  $[s_0, \infty) \times [0, \infty)$  における準代数的近傍  $U$  と準代数的連続埋め込み  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  があって、 $(\psi(s, u), s, u) \in X$  がどんな  $U$  の元  $(s, u)$  に対して成り立つ。ここで  $s_0$  は大きいので  $s_0 \geq 2$  と仮定できる。そうすれば正の自然数  $m$  があって

$$U \supset \{(s, u) \in [s_0, \infty) \times [0, \infty) : u \leq s^{-m}\}$$

成り立つ。(このことは次のようにしていえる。準代数的連続写像  $\alpha : (0, 1/s_0] \rightarrow U$  を  $\alpha(v) = (1/v, 0)$  で定義し、その 0 での芽を  $\alpha_0$  と置く。すると  $\alpha_0$  は  $[s_0, \infty)_R \times \{0\}$  の元である。よって 0 に近い  $\mathbf{R}^2$  の元  $\beta$  に対して  $\alpha_0 + \beta$  は  $U_R$  の元である。特に  $m$  を十分大きくとり、 $\beta_a(t) = (0, at^m)$ ,  $a \in [0, 1]$  と置けば、各  $\beta_a$  は 0 に近い  $\mathbf{R}^2$  の元で、 $\cup\{\alpha_0 + \beta_a : a \in [0, 1]\} \subset U_R$  となる。これは  $s_0$  を大きく取り替えると、上の包含関係を意味している。しかし  $s_0 \geq 2$  なので、 $s_0$  を大きくしなくても  $m$  を大きくすれば、包含関係は成り立つ。)

記号を簡単にするため、 $U$  を上の包含関係の後者の集合とする。すると  $\text{Im } \psi$  は  $\mathbf{R}^n$  の準代数的部分集合だが、有界ではない。また  $\text{Im } \psi$  の各元  $x$  に対して、 $\mathbf{R}^n$  の元  $x'$  を  $|x'| \leq |x|$  かつ  $|f(x')| = |f(x)|$  となるように任意にとれば、常に  $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') \right| \geq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$  となる。よって  $\text{Im } \psi$  上でのみ不等式を証明すれば良い。これで本質的に  $n = 2$  の場合に問題は帰着された。

次に  $(\text{Im } \psi)_R$  は  $\mathbf{R}^2$  で有界ではないが、ある意味で有界にしたい。準代数的連続写像  $(0, 1/s_0] \ni v \rightarrow \psi(1/v, 0) \in \mathbf{R}^n$  の 0 での芽を  $\gamma_0$  と置く。すると  $\gamma_0$  は  $\mathbf{R}^n$  の元で、さらに

$(\text{Im } \psi)_R$  の元である。(3節の  $( )_R$  の定義より。) 正の  $R$  の元  $c$  を  $(-c, c)_R^n$  が  $\gamma_0$  を含むようにとる。すると局所的に不等式は  $R$  で成り立つので、 $[-c, c]_R^n$  での  $f_R^{-1}(0) \cap [-c, c]_R^n$  の準代数的近傍  $W$  と  $0 < \theta < 1$  なる有理数  $\theta$  が存在して、 $W$  で  $|f_R|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f_R}{\partial x_i} \right|$  が成り立つ。これが  $\mathbf{R}^n$  で、どういうことか調べる。

$\gamma_0$  は  $f_R^{-1}(0) \cap (-c, c)_R^n$  の元なので  $\gamma_0$  に近い  $R^n$  の元は  $W$  に属する。よって、3節で述べた  $R$  の位相のことから、 $m$  をさらに大きく取り替えると、写像  $(0, 1/s_0] \ni v \rightarrow \psi(1/v, v^m) \in \mathbf{R}^n$  の  $0$  での芽  $\gamma_m$  は  $W$  に属する。よって  $|f_R(\gamma_m)|^\theta \leq \left| \frac{\partial f_R}{\partial x_i}(\gamma_m) \right|$  となる。これは  $f_R$  の定義より、ある正の実数  $v_1$  があって

$$|f \circ \psi(1/v, v^m)|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \psi(1/v, v^m) \right|, \quad v \in (0, v_1]$$

となることを意味する。 $\psi$  の定義より  $|f \circ \psi(s, u)| = u$  かつ  $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \psi(s, u) \right| = \phi(s, u)$  なので、 $|f \circ \psi(1/v, v^m)| = v^m$  かつ  $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \psi(1/v, v^m) \right| = \phi(1/v, v^m)$  となり、不等式

$$v^{m\theta} \leq \phi(1/v, v^m), \quad v \in (0, v_1]$$

が成り立つ。よって  $v^m = w$  と置けば

$$w^\theta \leq \phi(1/w^{1/m}, w), \quad w \in (0, v_1^m]$$

となる。さらに  $w = |f(x)|$  となる  $x \in \mathbf{R}^n$  を取り、もし  $|x| \leq 1/w^{1/m}$  なら

$$|f(x)|^\theta \leq \phi(1/w^{1/m}, w) \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|$$

となる。 $w \in (0, v_1^m]$  かつ  $w = |f(x)|$  かつ  $|x| \leq 1/w^{1/m}$  という条件は  $|x||f(x)|^{1/m} \leq 1$  と  $|f(x)| \leq v_1^m$  という条件を意味する。よって

$$V = \{x \in \mathbf{R}^n : |x||f(x)|^{1/m} \leq 1, |f(x)| \leq v_1^m\}$$

と置けば、 $V$  で  $|f|^\theta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|$  が成り立つ。 $V$  は  $f^{-1}(0)$  の  $\mathbf{R}^n$  での準代数的近傍であることは明らかである。こうして大域的に不等式は証明される。□

## 6. 付け足し

Lojasiewicz の第一不等式は上の証明と同じように証明できる。というか、上の証明が少し分かれば明らかである。第一不等式を書いておく。

$f_1$  と  $f_2$  を  $\mathbf{R}^n$  で定義された準代数的連続写像とし、 $f_1^{-1}(0) \subset f_2^{-1}(0)$  と仮定する。すると正の実数  $m$  と  $f_2^{-1}(0)$  の  $\mathbf{R}^n$  での準代数的近傍  $V$  があって、 $V$  で  $|f_1| \geq |f_2|^m$  が成り立つ。

$\mathbf{R}^n$  を  $\{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1\}$  と置き換えて考えれば、第一不等式に関しては局所的と大域的の違いはない。だから第二不等式より証明は、はるかに簡単である。しかし第二不等式は微分があるので、このようには置き換えられない。どうしても  $\mathbf{R}^n$  の無限遠点で第二不等式がどうなるか考えないといけない。無限遠点で問題を考えるのは代数的実 Puiseux ベキ級数を使うと大変分かりやすい。

第二不等式が大域的に成り立つのは、[1]に書かれている。それは私が $\mathbf{R}$ を $R$ で置き換えれば成り立つことに気がつき、他の著者に説明して、彼らが $R$ を表面的に使わずに書き上げたのである。元の証明を書く機会がなかったので、今この論文を書いた。体を置き換えるという方法が役に立つことを知ってもらいたいので書いた。実代数幾何学と基礎論の人以外は体を置き換えるのをいやがる。しかし、やってみれば、誰でもすぐ $\mathbf{R}$ を $R$ の立場から見るということに、慣れる。また、これは、きっと役に立つ。既に他の応用例がある。

また今までの議論はすべて、どんな実閉体上のどんな順序極小構造でも、少し形をかえて、成り立つ。

#### REFERENCES

- [1] J. Bolte, A. Daniilidis, A. Lewis and M. Shiota, *Clarke subgradients of stratifiable functions*, SIAM J. Optimization, 18(2007), 556-572.
- [2] S. Lojasiewicz, *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels*, in Les équations aux dérivées partielles, CNRS, Paris, 1963, 87-89.
- [3] M. Shiota, *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math., 150, Birkhäuser, 1997.

*E-mail address:* shiota@math.nagoya-u.ac.jp