数理解析研究所講究録
第 1764 巻 2011 年 126-138

有限確定多重芽上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群の生成元について

西村 尚史
(横浜国立大学)

1. 序

本稿では，有限確定な多重芽上の持ち上げ可能ベクトル場がなす加群の生成元に関する筆者の最近の研究 [22, 19] を概説する.

記号や概念の準備から始めよう. $\mathbb{K}$ を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とし, S を $\mathbb{K}^n$ の有限集合とする. 本稿において**可微分**とは，実数体 $\mathbb{R}$ の場合は C^{∞} 級のことであり，複素数体 $\mathbb{C}$ の場合は正則 (holomorphic) のこととする. 可微分な写像芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to\mathbb{K}^p$ が $f(S)=0$ を満たしていたら $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ と表記し，**可微分多重芽**と呼ばれる. 本稿の主要な対象は可微分多重芽である.

$$
\begin{aligned}
C_S &= \{\varphi:(\mathbb{K}^n,S)\to\mathbb{K}\ \text{可微分}\},\\
C_0 &= \{\psi:(\mathbb{K}^p,0)\to\mathbb{K}\ \text{可微分}\}
\end{aligned}
$$

とおく. これらは $\mathbb{K}$ の $\mathbb{K}$-代数構造から得られる自然な $\mathbb{K}$-代数構造を持っている.

$$
\begin{aligned}
m_S &= \{\varphi:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K},0)\ \text{可微分}\},\\
m_0 &= \{\psi:(\mathbb{K}^p,0)\to(\mathbb{K},0)\ \text{可微分}\}
\end{aligned}
$$

とおく. 可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ に対して, $f^*:C_0\to C_S$ を $f^*(u)=u\circ f$ で定義される $\mathbb{K}$-代数の準同型とし，$Q(f)=C_S/f^*m_0C_S$ とおく.

可微分写像芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to\mathbb{K}^p$ に対して,

$$
\theta_S(f)=\{\xi:(\mathbb{K}^n,S)\to T\mathbb{K}^p\ \text{可微分}\mid \pi\circ\xi=f\}
$$

と定義する，ただし $T\mathbb{K}^p$ は $\mathbb{K}^p$ の接束であり $\pi:T\mathbb{K}^p\to\mathbb{K}^p$ は底空間への射影である. $\theta_S(f)$ の元は f **に沿ったベクトル場**と呼ばれる. $\theta_S(f)$ には自然に C_S-加群の構造が入り，自由加群 $\underbrace{C_S\oplus\cdots\oplus C_S}_{p\ \text{個}}$ と同型となる. $\theta_S(n)=\theta_S(id._{(\mathbb{K}^n,S)})$, $\theta_0(p)=\theta_{\{0\}}(id._{(\mathbb{K}^p,0)})$ とおく，ここに $id._{(\mathbb{K}^n,S)}$ や $id._{(\mathbb{K}^p,0)}$ はそれぞれ $(\mathbb{K}^n,S)$ および $(\mathbb{K}^p,0)$ の恒等写像芽である.

可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ に対して, Mather[14] に従い, 二つの写像 tf と ωf を以下のように定義する，ここに df は f の導写像である.

$$
\begin{aligned}
tf&:\theta_S(n)\to\theta_S(f), &\quad tf(\eta)&=df\circ\eta,\\
\omega f&:\theta_0(p)\to\theta_S(f), &\quad \omega f(\xi)&=\xi\circ f.
\end{aligned}
$$

次に，同じ f に対して，Wall[29] に従い以下のようにおく．

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}(f) &= tf(m_S\theta_S(n)), & T\mathcal{R}_e(f) &= tf(\theta_S(n)), \\ T\mathcal{L}(f) &= \omega f(m_0\theta_0(p)), & T\mathcal{L}_e(f) &= \omega f(\theta_0(p)), \\ T\mathcal{A}(f) &= T\mathcal{R}(f) + T\mathcal{L}(f), & T\mathcal{A}_e(f) &= T\mathcal{R}_e(f) + T\mathcal{L}_e(f), \\ T\mathcal{K}(f) &= T\mathcal{R}(f) + f^*m_0\theta_S(f), & T\mathcal{K}_e(f) &= T\mathcal{R}_e(f) + f^*m_0\theta_S(f). \end{aligned}$$

可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して，

$$\xi \circ f \in T\mathcal{L}_e(f) \cap T\mathcal{R}_e(f)$$

を満たすベクトル場 $\xi \in \theta_0(p)$ を **f 上持ち上げ可能なベクトル場**という．f 上持ち上げ可能なベクトル場の集合は自然に C_0-加群の構造を持っている．与えられた可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して，f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群の構造を調べたい．具体的には，以下を問題とすることにする．

問題 1. $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ を可微分多重芽とする．

(1) f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群はいつ有限生成となるのであろうか？
(2) f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群が有限生成の時，生成元の最小数はどのように特徴づけられるのであろうか？
(3) f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群が有限生成の時，生成元の最小数はどのように計算できるのであろうか？
(4) f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群が有限生成の時，どのように生成元を構成できるのであろうか？

可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して，f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群は，$\hat{\omega} f(\xi) = [\omega f(\xi)]$ で定義される写像

$$\hat{\omega} f : \theta_0(p) \to \frac{\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f)}$$

のカーネルに他ならない．Looijenga[13] は，$\mathbb{K} = \mathbb{C}, n \geq p, S = \{\text{one point } x\}$ のときに限ってはいるものの，$\hat{\omega} f : \theta_0(p) \to \frac{\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f)}$ を f の**小平・スペンサー写像**と呼び，小平・スペンサー写像の簡約版である

$$\overline{\omega} f : \frac{\theta_0(p)}{m_0\theta_0(p)} \to \frac{\theta_S(f)}{T\mathcal{K}_e(f)}, \quad \overline{\omega} f([\xi]) = [\omega f(\xi)]$$

も導入している．Mather は，Looijenga の本の出版より 15 年近くも前に既に，$\mathbb{K} = \mathbb{C}, n \geq p, S = \{\text{one point}\}$ などという制限は一切なしの全く一般の状況において，(安定多重芽の特徴付けのために) 小平・スペンサー写像の簡約版を [15] において導入しているので，本稿では Mather に敬意を表して Mather が用いた記号 $\overline{\omega} f$ で小平・スペンサー写像の簡約版を表すことにし[1]，**簡約された小平・スペンサー・マザー写像**と呼ぶことにする．与えられた可微分多重芽 f が $\dim_{\mathbb{K}} \theta_S(f)/T\mathcal{K}_e(f) < \infty$ を満たしていたら，簡約された小平・スペンサー・マザー写像のターゲットに対して次の同型 (有限次元ベクトル空間としての同型) がある．

$$\frac{\theta_S(f)}{T\mathcal{K}_e(f)} \cong \frac{\frac{\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f)}}{f^*m_0\left(\frac{\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f)}\right)}.$$

[1] [13] の記号では，小平・スペンサー写像が $\rho_{f,x}$，その簡約版が $\rho_f(x)$ である．

従って, 予備定理[2]がすぐに使えるような舞台設定になっていると言えよう. 予備定理により, 簡約された小平・スペンサー・マザー写像 $\overline{\omega}f$ の全射性のみで $\theta_S(f) = T\mathcal{A}_e(f)$ となることがわかる (逆は自明).

簡約された小平・スペンサー・マザー写像 $\overline{\omega}f$ の高次版を考えて, $\overline{\omega}f$ と同様に予備定理がすぐに使える舞台設定になっているであろうから有用なはず, と期待するのは自然であろう. 任意の非負整数 i に対して, テイラー展開して $(i-1)$ 次までの項がゼロとなる関数芽の集合を m_S^i あるいは m_0^i という記号で表すことにする. すると, $m_S^0 = C_S$ や $m_0^0 = C_0$ となっていることがわかる. 任意の非負整数 i と任意の可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して写像

$$
{}_i\overline{\omega}f : \frac{m_0^i\theta_0(p)}{m_0^{i+1}\theta_0(p)} \to \frac{f^*m_0^i\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f) \cap f^*m_0^i\theta_S(f) + f^*m_0^{i+1}\theta_S(f)}
$$

を ${}_i\overline{\omega}f([\xi]) = [\omega f(\xi)]$ で定義する. ${}_i\overline{\omega}f$ は well-defined な (f を通した) C_0-加群の準同型である. ${}_0\overline{\omega}f = \overline{\omega}f$ となっているので, ${}_i\overline{\omega}f$ は簡約された小平・スペンサー・マザー写像の高次版とみなせる. 簡約された小平・スペンサー・マザー写像 $\overline{\omega}f$ のターゲットである加群と同様に, 任意の非負整数 i と $\dim_{\mathbb{K}} \theta_S(f)/T\mathcal{K}_e(f) < \infty$ を満たす任意の可微分写像芽 f に対して, ${}_i\overline{\omega}f$ のターゲットである加群は次と同型となる.

$$
\frac{\frac{f^*m_0^i\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f)\cap f^*m_0^i\theta_S(f)}}{f^*m_0\left(\frac{f^*m_0^i\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f)\cap f^*m_0^i\theta_S(f)}\right)}.
$$

従って, 予備定理により, 「$f^*m_0^i\theta_S(f) \subset T\mathcal{A}_e(f)$ であることの必要十分条件は ${}_i\overline{\omega}f$ が全射となること」がわかる. 次の補題は自明である.

補題 1.1. 可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ が $\dim_{\mathbb{K}} \theta_S(f)/T\mathcal{K}_e(f) < \infty$ を満たしているとする. そのとき, 以下が成立する.

(1) ある非負整数 i に対して ${}_i\overline{\omega}f$ が全射となっているとする. すると, $i < j$ を満たす任意の整数 j に対して ${}_j\overline{\omega}f$ は全射となる.
(2) ある非負整数 i に対して ${}_i\overline{\omega}f$ が単射となっているとする. すると, $j < i$ を満たす任意の非負整数 j に対して ${}_j\overline{\omega}f$ は単射となる.

定義 1.1. 可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ が $\dim_{\mathbb{K}} \theta_S(f)/T\mathcal{K}_e(f) < \infty$ という条件を満たしているものとする.

(1) $I_1(f) = \{i \in \{0\} \cup \mathbb{N} \mid {}_i\overline{\omega}f$ は全射 $\}$ とおき,$i_1(f)$ を

$$
i_1(f) = \begin{cases} \infty & (\text{if } I_1(f) = \emptyset) \\ \min I_1(f) & (\text{if } I_1(f) \neq \emptyset). \end{cases}
$$

として定義する.

(2) $I_2(f) = \{i \in \{0\} \cup \mathbb{N} \mid {}_i\overline{\omega}f$ は単射 $\}$ とおき, $i_2(f)$ を

$$
i_2(f) = \begin{cases} -\infty & (\text{if } I_2(f) = \emptyset) \\ \max I_2(f) & (\text{if } \emptyset \neq I_2(f) \neq \{0\} \cup \mathbb{N}) \\ \infty & (\text{if } I_2(f) = \{0\} \cup \mathbb{N}). \end{cases}
$$

として定義する.

[2]準備定理と訳されることもある. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は Weirestrass の予備定理として古くから知られていたが, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合のそれは 20 世紀後半になって Malgrange によって得られたものである. また, ここで使う予備定理というのは**代数型の予備定理**と呼ばれる, Thom によりその有用性が観察されて以降写像の特異点論ではよく使用されるようになった形のものである. 日本語の文献としては [6, 7, 10, 11, 23] などに詳しく紹介してある.

可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ は, $m_S^k\theta_S(f)\subset T\mathcal{A}_e(f)$ という包含関係が成り立つ自然数 k が存在するとき**有限確定**と言われる.

命題 1. 可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ が有限確定であって $\theta_S(f)\neq T\mathcal{A}_e(f)$ という条件を満たしているとする. そのとき,$i_2(f)\geq 0$ が成立する.

可微分多重芽 f は $\theta_S(f)=T\mathcal{A}_e(f)$ を満たすとき**安定多重芽**と呼ばれることを思い出すと, この命題の f に課す条件は少々奇妙に映るかもしれないが, ターゲットのベクトル場とソースのベクトル場の関係を調べる立場からは自然な条件なのである. 実際, $S=\{\text{one point}\}$ の場合ではあるが同一の条件が [29] 補題 4.5.2 においても登場しており, そこではこの条件を満たす有限確定写像芽に対してターゲットのベクトル場とソースのベクトル場の関係を調べて次の等式が成立することが証明されている. その証明は命題 1 の証明としても通用する.

$$\dim_{\mathbb{K}}\frac{m_S\theta_S(f)}{T\mathcal{A}(f)}=\dim_{\mathbb{K}}\frac{\theta_S(f)}{T_e\mathcal{A}(f)}+n$$

さて, 以下では $n\leq p$ の場合に限定して考察することにする. その理由は, $n>p$ の場合は既に十分豊かな理論が構築されている[3]のに対して, $n<p$ の場合は, 問題 1 に対する解答の手がかりさえなんら得られていないように思えるからである (後に見るように $n<p$ の場合は, 安定多重芽に対してすら, 生成元の最小数は自明な場合を除きターゲットの次元 p よりも大きくなり, 持ち上げ可能ベクトル場がなす加群は自由加群とはならない. だから, ターゲットの次元 p は問題 1(2) の解答にはなり得ないことにご注意いただきたい). 本稿で概説している筆者の研究を一言で述べようと試みれば, 「$n\leq p$ の場合に, 持ち上げ可能ベクトル場の観点から素性の良さを測る指標を $i_1(f),i_2(f)$ を使って導入し, その指標で測ったときにもっとも素性の良い有限確定多重芽に対して問題 1 の解答を与える」と言えるであろう. 指標の導入の準備として, (命題 1 のように) $i_1(f),i_2(f)$ の一般的性質を調べることをもう少し続ける.

命題 2. 可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ が $\dim_{\mathbb{K}}\theta_S(f)/T\mathcal{K}_e(f)<\infty$ という条件を満たしているとする. $n\leq p$ を仮定する. すると, $i_1(f)<\infty$ であることと f が有限確定であることは同値である.

命題 2 は以下のように証明される. $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ が有限確定であると仮定すると, ($f^*m_0C_S\subset m_S$ が成立することは自明なので) $f^*m_0^k\theta_S(f)\subset T\mathcal{A}_e(f)$ が成立する自然数 k が存在することになり, 従って ${}_k\overline{\omega}f$ は全射となる. 逆に, $\dim_{\mathbb{K}}\theta_S(f)/T\mathcal{K}_e(f)<\infty$ という条件を満たす可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ に対して ${}_k\overline{\omega}f$ が全射となるような自然数 k が存在するとする. すると, 予備定理より $f^*m_0^k\theta_S(f)\subset T\mathcal{A}_e(f)$ が得られるのだった. 仮定より $n\leq p$ であるので, この場合は $\dim_{\mathbb{K}}\theta_S(f)/T\mathcal{K}_e(f)<\infty$ という条件から $m_S^\ell\subset f^*m_0C_S$ が従うことを Wall が示している ([29] 定理 4.6.2). よって, f は有限確定となる.

次に $i_1(f)$ と $i_2(f)$ の大小関係を調べる. 調べやすくするための可微分多重芽 f の条件をまず定義する. 可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ $(n\leq p)$ が**余階数たかだか一**であるとは, $\max\{n-\operatorname{rank}Jf(s_j)\mid 1\leq j\leq|S|\}\leq 1$ となっていることである, ここに $Jf(s_j)$ は f の $s_j\in S$ におけるヤコビ行列であり $|S|$ は S の異なる要素の数を表している.

命題 3. 有限確定多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ $(n\leq p)$ が余階数たかだか一であるとする. そのとき, $i_1(f)\geq i_2(f)$ が成立する.

命題 3 の証明については [22] をご覧いただきたい. 命題 3 から次の系が容易に従う.

---
[3] Saito[26], Terao[27], Looijenga[13], van Straten[28] などによる.

系 1. 可微分多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ $(n\le p)$ が有限確定であり余階数たかだか一であるとする．さらに，${}_i\overline{\omega}f$ が全単射となるような非負整数 i の存在も仮定する．そのとき以下が成立する．

(1) $j<i$ を満たす任意の非負整数 j に対し，${}_j\overline{\omega}f$ は単射ではあるが全射ではない．
(2) $i<j$ を満たす任意の整数 j に対し，${}_j\overline{\omega}f$ は全射ではあるが単射ではない．

例 1.1. $e:\mathbb{K}\to\mathbb{K}^2$ は $e(x)=(x,0)$ で定義される埋め込みを表しているものとし，任意の実数 θ に対して $R_\theta:\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2$ を $\mathbb{K}^2$ の原点の周りの角度 θ の回転という線形写像を表すものとする．ようするに，R_θ は以下のように表せる．

$$R_\theta\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}.$$

任意の非負整数 ℓ に対して $S=\{s_0,\dots,s_{\ell+1}\}$ $(s_j\neq s_k \text{ if } j\neq k)$ とおく．その ℓ に対して $\theta_j=j\frac{\pi}{\ell+2}$ と定義し，さらに任意の j $(0\le j\le \ell+1)$ に対して，写像 $e_j:(\mathbb{K},s_j)\to(\mathbb{K}^2,0)$ を $e_j(x_j)=R_{\theta_j}\circ e(x_j)$ で定義する（ただし $x_j=x-s_j$ とおいている）．すると，$E_\ell=\{e_0,\dots,e_{\ell+1}\}:(\mathbb{K},S)\to(\mathbb{K}^2,0)$ は余階数たかだか一の有限確定多重芽となる．E_ℓ の像は line arrangement であり斉次多項式で定義されるので，E_ℓ の像の定義方程式のオイラーベクトル場は E_ℓ 上持ち上げ可能なベクトル場となる．従って，${}_1\overline{\omega}E_\ell$ は単射ではない．さらに，$\ell=0$ の場合ですら ${}_0\overline{\omega}E_\ell$ は単射となる ($\ell\ge 1$ の場合は命題 1 から従う容易な事実) ので，$i_2(E_\ell)=0$ であることがわかる．他方，$i_1(E_\ell)=\ell$ を示すことができる．従って，$i_1(E_\ell)-i_2(E_\ell)=\ell$ となっていることがわかる．

命題 3 の仮定を満たす f に対して $i_1(f)-i_2(f)$ が 0 以上であることは命題 3 から従うが，$i_1(f)-i_2(f)$ の一般的な上限は存在しないことがこの例からわかる．また，この例により，持ち上げ可能ベクトル場の観点から，与えられた余階数たかだか一の有限確定多重芽がどの程度素性が良い特異点になっているかを測る指標として，$i_1(f)-i_2(f)$ を採用できると言えよう．

我々の指標 $i_1(f)-i_2(f)$ が最小値 0 となるとき（すなわち，f が持ち上げ可能ベクトル場の観点から最も素性が良い多重芽であるとき）には，問題 1 の (1), (2) の解答を次のように与えることができる．

定理 1. 余階数たかだか一の有限確定多重芽 $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ $(n\le p)$ に対して，${}_i\overline{\omega}f$ が全単射となる非負整数 i が存在する（すなわち，$i_1(f)=i_2(f)=i$）とする．そのとき，f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群の生成元の最小数は $\dim_{\mathbb{K}}\ker({}_{i+1}\overline{\omega}f)$ である．

定理 1 の証明については [22] をご覧いただきたい．例 1.1 の埋め込み e は定理 1 の例ではないことにご注意いただきたい．実際，${}_0\overline{\omega}e$ が全射ではあるけれども単射ではないので，$i_1(e)=0$, $i_2(e)=-\infty$ であり，我々の指標 $i_1(e)-i_2(e)$ は ∞ となる．他方，例 1.1 の可微分多重芽 E_0 は，命題 1 の仮定を満たさないにもかかわらず，我々の指標 $i_1(E_0)-i_2(E_0)$ は 0 であり，定理 1 の例となっている．定理 1 の例は他にもたくさんあり，そのうちのいくつかを §2 で紹介する．

次に問題 1 の (3) を考えることにする．マザーの写像 ωf の簡約版である $\overline{\omega}f$（簡約された小平・スペンサー・マザー写像）の高次版を考えたので，もうひとつのマザーの写像 tf の簡約版の高次版を考えるのも自然であろう．マザーの写像 tf の簡

約版は Wall[29] で世に現れた[4]次の写像である.

$$\bar{t}f : Q(f)^n \to Q(f)^p, \quad \bar{t}f([\eta]) = [tf(\eta)].$$

条件 $\dim_{\mathbb{K}} Q(f) < \infty$ を満たす可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対し, $\delta(f) = \dim_{\mathbb{K}} Q(f)$ とおき, $\gamma(f)$ を $\bar{t}f$ のカーネルの次元とする. その f と非負整数 i に対して ${}_iQ(f) = f^*m_0^iC_S/f^*m_0^{i+1}C_S$ とおき, そのベクトル空間としての次元を ${}_i\delta(f)$ という記号で表すことにする. すると, ${}_0Q(f) = Q(f)$ や ${}_0\delta(f) = \delta(f) = \dim_{\mathbb{K}} Q(f)$ となっている. $Q(f)$-加群である ${}_iQ(f)^n$ や ${}_iQ(f)^p$ はそれぞれ以下と同一視できる.

$$\frac{f^*m_0^i\theta_S(n)}{f^*m_0^{i+1}\theta_S(n)} \quad \text{and} \quad \frac{f^*m_0^i\theta_S(f)}{f^*m_0^{i+1}\theta_S(f)}.$$

次で定義される $Q(f)$-加群の準同型 ${}_i\bar{t}f$ が tf の簡約版 $\bar{t}f$ の高次版である.

$${}_i\bar{t}f : {}_iQ(f)^n \to {}_iQ(f)^p, \quad {}_i\bar{t}f([\eta]) = [tf(\eta)].$$

${}_i\varpi f$ のカーネルの次元を ${}_i\gamma(f)$ という記号で表すことにする. ${}_i\delta(f)$ や ${}_i\gamma(f)$ は [21] で導入されたもので, $\delta(f) < \infty$ であれば ${}_i\delta(f) < \infty$ となり, $\gamma(f) < \infty$ であれば ${}_i\gamma(f) < \infty$ となることがわかっている ([21] を参照).

命題 4. 可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ が余階数たかだか一であり $\delta(f) < \infty$ という条件を満たすものとする. さらに, 非負整数 i に対して ${}_{i+1}\varpi f$ が全射となっていると仮定する. そのとき, 以下の等式が成立する.

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker({}_{i+1}\varpi f) = p \cdot \begin{pmatrix} p+i \\ i+1 \end{pmatrix} - \left((p-n) \cdot {}_{i+1}\delta(f) + {}_{i+1}\gamma(f) - {}_i\gamma(f)\right),$$

ここに中心のドット $(\cdot)$ は積を表すものとする.

命題 5. 可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ が余階数たかだか一であり $\delta(f) < \infty$ という条件を満たすものとする. そのとき, 以下が成立する.

(1) ${}_0\gamma(f) = \gamma(f) = \delta(f) - |S|$.
(2)

$${}_i\delta(f) = \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \delta(f), \ {}_i\gamma(f) = \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \gamma(f) \quad (i \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

命題 4, 命題 5 の証明については [22] をご覧いただきたい. 命題 4 と命題 5 を結び付ければ, 余階数たかだか一であり $\delta(f) < \infty$ という条件を満たす可微分多重芽 $f : (\mathbb{K}^n, S) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ と ${}_{i+1}\varpi f$ が全射となる非負整数 i に対しては, "$\dim_{\mathbb{K}} \ker({}_{i+1}\varpi f)$" という $\mathcal{A}$-不変量を "$\delta(f), \gamma(f)$" という $\mathcal{K}$-不変量を用いて容易に計算できることがわかる. 従って, $i_1(f) - i_2(f) = 0$ を満たしている余階数たかだか一の有限確定多重芽に対しては, 定理 1, 命題 4, 命題 5 が問題 1(3) の解答を与えていることになる.

以上で, $i_1(f) - i_2(f) = 0$ を満たしている余階数たかだか一の有限確定多重芽に対しては問題 1(1), (2),(3) の解答を得たわけである. 次節においていくつかの具体例で検証してみる.

[4]そもそも tf は ωf よりも扱いやすいのだから, tf の簡約版は ωf の簡約版よりも早く世に現れていても不思議ではないが, 歴史はそうはならなかった. tf の簡約版を使えば [17] にある $\gamma(f)$ の意味が明瞭になることを発見し, tf の簡約版の重要性を知らしめたのは Wall の功績の一つである.

2. 例

例 2.1. $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1},y)=(x_1,\ldots,x_{n-1},y^{n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}x_iy^i)$ で定義される可微分写像芽 $\varphi:(\mathbb{K}^n,0)\to(\mathbb{K}^n,0)$ を考える．この写像芽はモラン型の安定写像芽としてよく知られた写像芽であり，${}_0\varpi\varphi$ が全単射となることも知られている（[20, 16] などを参照）．従って，定理 1, 命題 4, 命題 5 により φ 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元の最小数は次のように計算できるはずである．

$$\begin{aligned}
& n\cdot\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}-((n-n)\cdot{}_1\delta(\varphi)+{}_1\gamma(\varphi)-{}_0\gamma(\varphi)) \\
= \ & n^2-((n-n)\cdot n\cdot(n+1)+n\cdot(n+1-1)-(n+1-1)) \\
= \ & n.
\end{aligned}$$

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合は φ 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元の最小数は確かに n となることが Arnold[1] によって示されているので，定理 1, 命題 4, 命題 5 により正しい数値が得られていることがわかる．

例 2.2. 可微分写像芽 $\varphi_k:(\mathbb{K}^{2k-2},0)\to(\mathbb{K}^{2k-1},0)$ は以下で定義されているとする．

$$\begin{aligned}
& \varphi_k(u_1,\ldots,u_{k-2},v_1,\ldots,v_{k-1},y) \\
= \ & \left(u_1,\ldots,u_{k-2},v_1,\ldots,v_{k-1},y^k+\sum_{i=1}^{k-2}u_iy^i,\sum_{i=1}^{k-1}v_iy^i\right).
\end{aligned}$$

この写像芽もモラン型の安定写像芽としてよく知られた写像芽であり，${}_0\varpi\varphi_k$ が全単射となることも知られている（[20, 16] などを参照）．従って，定理 1, 命題 4, 命題 5 により φ_k 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元の最小数は次のように計算できるはずである．

$$\begin{aligned}
& (2k-1)\cdot\begin{pmatrix} 2k-1 \\ 1 \end{pmatrix}-(((2k-1)-(2k-2))\cdot{}_1\delta(\varphi_k)+{}_1\gamma(\varphi_k)-{}_0\gamma(\varphi_k)) \\
= \ & (2k-1)^2-(((2k-1)-(2k-2))\cdot(2k-2)\cdot k \\
& \qquad +(2k-2)\cdot(k-1)-(k-1)) \\
= \ & 3k-2.
\end{aligned}$$

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合は φ_k 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元の最小数は確かに $3k-2$ となることが Holland-Mond[8] によって示されている[5]ので，定理 1, 命題 4, 命題 5 により正しい数値が得られていることがわかる．

例 2.3. 可微分写像芽 $\psi_n:(\mathbb{K}^n,0)\to(\mathbb{K}^{2n-1},0)$ は以下で定義されているとする．

$$\psi_n(v_1,\ldots,v_{n-1},y)=(v_1,\ldots,v_{n-1},y^2,v_1y,\ldots,v_{n-1}y).$$

この写像芽はホイットニーの傘という名でよく知られている安定写像芽であり，${}_0\varpi\psi_n$ が全単射となることも知られている（[30, 31, 16] などを参照）．従って，定理 1, 命題 4, 命題 5 により ψ_n 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元の最小数は次のように計算できるはずである．

$$\begin{aligned}
& (2n-1)\cdot\begin{pmatrix} 2n-1 \\ 1 \end{pmatrix}-(((2n-1)-n)\cdot{}_1\delta(\varphi)+{}_1\gamma(\varphi)-{}_0\gamma(\varphi)) \\
= \ & (2n-1)^2-((n-1)\cdot n\cdot 2+n\cdot(2-1)-(2-1)) \\
= \ & 2n^2-3n+2.
\end{aligned}$$

[5] さらに，Houston-Littlestone[9] によって具体的な生成元も求められている

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合でも, 一般の n に対して ψ_n 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元の最小数の計算に関する既存の結果を筆者は知らない. しかし,$n=2$ の場合は, ψ_2 は例 3.2 の φ_2 と一致するので, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ で $n=2$ の場合には Holland-Mond[8] によって示されているとも言える. さらに,Bruce-West[4] は $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ で $n=2$ の場合を詳細に調べている. 従って, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ で $n=2$ の場合の生成元の最小数は 4 であることが知られている状況であったが, 上記の $2n^2-3n+2$ に $n=2$ を代入すると 4 となるので, 定理 1, 命題 4, 命題 5 により正しい数値が得られていることがわかる.

例 2.4. 例 3.1, 例 3.2, 例 3.3 は以下のように一般化できる. 可微分写像芽 $f:(\mathbb{K},0)\to(\mathbb{K}^p,0)$ $(p\geq 2)$ は $2\leq\delta(f)<\infty$ という条件を満たしているとし, $F:(\mathbb{K}\times\mathbb{K}^c,0)\to(\mathbb{K}^p\times\mathbb{K}^c,0)$ を f の $\mathcal{K}$-最小普遍開折とする, ここで f の **$\mathcal{K}$-最小普遍開折**とは [15] の (5.8) で $c=r$ とおいて得られる写像芽のこと[6]である. そのとき, Mather[15, 16] により ${}_0\varpi F$ は全単射となることが知られている. [29] の定理 4.5.1 を使えば $c=p\delta(f)-1-p$ と表せることがわかり, 定理 1, 命題 4, 命題 5 により F 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元の最小数は次のように計算できるはずである.

$$\begin{aligned}
& (p+c)\cdot\begin{pmatrix} p+c \\ 1 \end{pmatrix}-(((p+c)-(1+c))\cdot{}_1\delta(F)+{}_1\gamma(F)-{}_0\gamma(F)) \\
= \quad & (p+c)^2-((p-1)\cdot(1+c)\cdot\delta(f)+c\cdot(\delta(f)-1)) \\
= \quad & p^2\cdot\delta(f)-p\cdot\delta(f)+\delta(f)-p.
\end{aligned}$$

マザーの分類定理 ([15] の定理 A) [7], [15] の命題 (1.6) [8], 安定写像芽に関するマザーの標準形定理 ([15] の定理 (5.10)) [9], $p^2\delta(f)-p\delta(f)+\delta(f)-p>p+c$ という等号なしの不等式が成立する事実[10], そして, はめ込み多重芽上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群が自由加群であるための必要十分条件は $p=n+1$ である事実[11]を用いれば, 次の命題を得ることができる.

命題 6. $f:(\mathbb{K}^n,S)\to(\mathbb{K}^p,0)$ $(n<p)$ を余階数たかだか一の安定多重芽とする. そのとき,f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群が自由加群であるための必要十分条件は $p=n+1$ および $\delta(f)=|S|$ が満たされていることである.

さて, ここまでの例はすべて $i=0$ に対して ${}_i\varpi f$ が全単射となるものであり, マザー理論に慣れている人にとっては新鮮さは今一つであったかもしれない. $i=0$ に対して ${}_i\varpi f$ が全単射となる例のみでなく, $i=1$ に対して ${}_i\varpi f$ が全単射となる例もいくつか用意して 2010 年夏にサンカルロス（ブラジル）で開催された "11th international workshop on real and complex singularities" にて定理 1 について話した[12]ところ, 案の定, $i\geq 2$ に対して ${}_i\varpi f$ が全単射となる例の存在について質問されてしまった. そのときは「例は持ち合わせていません. あるのかどうかもわかりません.」と答えるしか術がなかった.

---

[6][7] の第 I 部『特異点とマザー理論』においては, ベクトル空間 $\frac{\theta(F')}{tF'(\theta(n-k))+F'^{*}m_{p-k}\theta(F')}$ の次元が p である (4.3.8) の形の写像芽のことである.

[7][7] の第 I 部『特異点とマザー理論』においては, $S=\{\text{one point}\}$ の場合のみしか扱われていないが定理 4.2.1 のことである.

[8]多重写像芽の安定性をそれぞれの枝についての言葉で置き換える命題. [7] の第 I 部『特異点とマザー理論』ではこの命題そのものは登場していないが, 定理 6.5.2 の使用例の箇所で実質的に登場しているとも言える.

[9][7] の第 I 部『特異点とマザー理論』においては, (4.3.8) のこと.

[10]$p,\delta(f)\geq 2$ なので計算してみるとすぐわかる.

[11]はめ込み多重芽なのですぐわかることである.

[12][3, 12, 24, 25] などに載っている標準形のいくつかは ${}_1\varpi f$ が全単射になることを既に確認していた. でも, $i\geq 2$ に対して ${}_i\varpi f$ が全単射となる例はその時点では持ち合わせていなく, そういう例があるのかどうか気になっていたところではあった.

帰国したのち暫くして「もしかしたらマルチカスプが例になっているかもしれない」と思うようになった．マザー理論に明るい溝田裕介氏（九州大学大学院生）[13]の協力を得て，「任意の自然数 i に対してカスプの数が $i+1$ 個のマルチカスプ f を考えると，${}_i\overline{\omega}f$ が全単射となっている」ということを示すことができた．第2節の残りではマルチカスプに関する溝田氏との共同研究 [19] について概説する．

可微分写像芽 $c:\mathbb{K}\to\mathbb{K}^2$ は $c(x)=(x^2,x^3)$ で定義されているとし，任意の実数 θ に対して $\mathbb{K}^2$ の原点のまわりの角度 $\mathbb{K}^2$ の回転を $R_\theta:\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2$ という記号で表すことにする．

$$R_\theta\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

$\theta_0,\ldots,\theta_i$ を $0\le\theta_j<2\pi\ (0\le j\le i)$ と $0\ne|\theta_j-\theta_k|\ne\pi\ (j\ne k)$ を満たす実数列とする．$S=\{s_0,\ldots,s_i\}$ $(s_j\ne s_k \text{ if } j\ne k)$ とおき，可微分写像芽 $c_{\theta_j}:(\mathbb{K},s_j)\to(\mathbb{K}^2,0)$ を $c_{\theta_j}(x)=R_{\theta_j}\circ c(x_j)$ で定義する，ここに $x_j=x-s_j$ である．可微分多重芽 $\{c_{\theta_0},\ldots,c_{\theta_i}\}:(\mathbb{K},S)\to(\mathbb{K}^2,0)$ を**マルチカスプ**と呼ぶことにし，$c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ という記号で表すことにする．$i=0$ の場合は単に**カスプ**，$i=1$ の場合は**ダブルカスプ**と呼ぶのは自然であろう．

マルチカスプ $c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ $(i\in\mathbb{N})$ に対して，

$$c_{\hat{\theta_j}}=\{c_{\theta_0},\ldots,\hat{c_{\theta_j}},\ldots,c_{\theta_i}\}:(\mathbb{K},S-\{s_j\})\to(\mathbb{K}^2,0),$$

とおく，ここに $\hat{c_{\theta_j}}$ は c_{θ_j} というカスプを除くことを意味している．$c_{\hat{\theta_j}}$ を定義するためには i は正でなくてはならないことにご注意いただきたい．任意の自然数 $i\in\mathbb{N}$ に対してマルチカスプ $c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ を考えると，以下のように，${}_i\overline{\omega}c_{\hat{\theta_j}}$ $(0\le j\le i)$ のカーネルという $(i+1)$ 個の線形部分空間は常に綺麗に配置される．

定理 2. 任意の自然数 $i\in\mathbb{N}$ と任意のマルチカスプ $c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ に対して以下が成立する．

$$\frac{m_0^i\theta_0(2)}{m_0^{i+1}\theta_0(2)}=\bigoplus_{j=0}^{i}\ker({}_i\overline{\omega}c_{\hat{\theta_j}}).$$

定理2の証明については [19] をご覧いただきたい．

系 2. 任意の自然数 $i\in\mathbb{N}$ と任意のマルチカスプ $c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ に対して，${}_i\overline{\omega}c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ は全単射である．

系2の証明をしよう．i は自然数であるから，定理2より次を得る．

$$\ker({}_i\overline{\omega}c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)})\subset\bigcap_{j=0}^{i}\ker({}_i\overline{\omega}c_{\hat{\theta_j}})=\{0\}.$$

だから ${}_i\overline{\omega}c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ は単射である．

${}_i\overline{\omega}c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ のソースとターゲットの次元の計算をしてみると

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{m_0^i\theta_0(2)}{m_0^{i+1}\theta_0(2)}\right)=2(i+1),$$

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{f^*m_0^i\theta_S(f)}{T\mathcal{R}_e(f)\cap f^*m_0^i\theta_S(f)+f^*m_0^{i+1}\theta_S(f)}\right)=2(i+1),$$

となる，ここに $f=c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ とおいている．よって ${}_i\overline{\omega}c_{(\theta_0,\ldots,\theta_i)}$ はソースとターゲットの次元が等しい線形空間の間の単射線形写像であることがわかり，従って全単射であることがわかる． □

[13]学部生のときに [7] の第1部『特異点とマザー理論』を読破したそうな ….

3. 問題 1(4)

本稿では定理 1 の証明を記載していないので恐縮だが, 実は原理的には, 定理 1 の仮定を満たす与えられた余階数たかだか一の有限確定多重芽 f 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群の生成元の構成法を, 定理 1 の証明で与えていると言え, 従って, 問題 1(4) へは定理 1 の証明により答えていると, 原理的には言える状況になっている. 本節ではそのことをいくつかの例で検証してみることにする.

3.1. 例 2.3 の ψ_n 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群の生成元.

$$(V_1, \dots, V_{n-1}, W, X_1, \dots, X_{n-1})$$

を $\mathbb{K}^{2n-1}$ の標準座標とする. ${}_0\overline{\omega}\psi_n$ は全単射なので, まず $\ker({}_1\overline{\omega}\psi_n)$ の基底を求めることにする. たとえば以下が $\ker({}_1\overline{\omega}\psi_n)$ の基底となることが簡単にわかる.

$$V_i\frac{\partial}{\partial V_j} + X_i\frac{\partial}{\partial X_j} + m_0^2\theta_0(2n-1) \quad (1 \le i, j \le n-1),$$
$$X_i\frac{\partial}{\partial V_j} + m_0^2\theta_0(2n-1) \quad (1 \le i, j \le n-1),$$
$$2X_i\frac{\partial}{\partial W} + m_0^2\theta_0(2n-1) \quad (1 \le i \le n-1),$$
$$2W\frac{\partial}{\partial W} + \sum_{j=1}^{n-1} X_j\frac{\partial}{\partial X_j} + m_0^2\theta_0(2n-1).$$

ψ_n のどの成分関数も単項であることから, 持ち上げ可能ベクトル場の高次項を簡単に求めていくことができ, その結果として以下が ψ_n の持ち上げ可能ベクトル場がなす加群の生成元を構成していることがわかる.

$$V_i\frac{\partial}{\partial V_j} + X_i\frac{\partial}{\partial X_j}, \quad (1 \le i, j \le n-1)$$
$$X_i\frac{\partial}{\partial V_j} + V_iW\frac{\partial}{\partial X_j} \quad (1 \le i, j \le n-1),$$
$$2X_i\frac{\partial}{\partial W} + \sum_{j=1}^{n-1} V_iV_j\frac{\partial}{\partial X_j} \quad (1 \le i \le n-1),$$
$$2W\frac{\partial}{\partial W} + \sum_{j=1}^{n-1} X_j\frac{\partial}{\partial X_j}.$$

3.2. ダブルカスプ $c_{(0,\frac{\pi}{2})}$ 上持ち上げ可能なベクトル場がなす加群の生成元. $c_0(x) = (x^2, x^3), c_{\frac{\pi}{2}}(x) = (x^3, x^2)$ とおいたとき $c_{(0,\frac{\pi}{2})} = \{c_0, c_{\frac{\pi}{2}}\}$ となるのであった. (X, Y) を $\mathbb{K}^2$ の標準座標とし, 簡潔さのために $f = c_{(0,\frac{\pi}{2})}$, $f_1 = c_0, f_2 = c_{\frac{\pi}{2}}$ とおくことにする. ${}_1\overline{\omega}f$ が全単射であるので $\ker({}_2\overline{\omega}f)$ の基底をまず求めることにする. たとえば以下が $\ker({}_2\overline{\omega}f)$ の基底となることが容易にわかる.

$$6XY\frac{\partial}{\partial X} + 4Y^2\frac{\partial}{\partial Y} + m_0^3\theta_0(2),\ 4X^2\frac{\partial}{\partial X} + 6XY\frac{\partial}{\partial Y} + m_0^3\theta_0(2).$$

$\eta_{1,1,1} = 3x^4\frac{\partial}{\partial x}$, $\eta_{1,2,1} = 2x^3\frac{\partial}{\partial x}$, $\xi_{1,1} = 6XY\frac{\partial}{\partial X} + 4Y^2\frac{\partial}{\partial Y}$ とおくと以下を得る.

$$\xi_{1,1} \circ f_1 - df_1 \circ \eta_{1,1,1} = -5x^6\frac{\partial}{\partial Y},$$
$$\xi_{1,1} \circ f_2 - df_2 \circ \eta_{1,2,1} = 0.$$

$\xi_{1,2}=5X^3\frac{\partial}{\partial Y}$ とおくと以下を得る.

$$(\xi_{1,1}+\xi_{1,2})\circ f_1 - df_1\circ\eta_{1,1,1}=0, \tag{5.1}$$

$$(\xi_{1,1}+\xi_{1,2})\circ f_2 - df_2\circ\eta_{1,2,1}=5x^9\frac{\partial}{\partial Y}. \tag{5.2}$$

$\xi_{1,3}=-5XY^3\frac{\partial}{\partial Y}$, $\eta_{1,1,2}=-\frac{5}{3}x^9\frac{\partial}{\partial x}$ とおくと以下を得る.

$$\begin{aligned}(\xi_{1,1}+\xi_{1,2}+\xi_{1,3})\circ f_1 - df_1\circ(\eta_{1,1,1}+\eta_{1,1,2}) &= \frac{10}{3}x^{10}\frac{\partial}{\partial X},\\ (\xi_{1,1}+\xi_{1,2}+\xi_{1,3})\circ f_2 - df_2\circ\eta_{1,2,1} &= 0.\end{aligned}$$

$\xi_{1,4}=-\frac{10}{3}X^2Y^2\frac{\partial}{\partial X}$, $\eta_{1,2,2}=-\frac{10}{9}x^8\frac{\partial}{\partial x}$ とおくと以下を得る.

$$(\xi_{1,1}+\xi_{1,2}+\xi_{1,3}+\xi_{1,4})\circ f_1 - df_1\circ(\eta_{1,1,1}+\eta_{1,1,2})=0, \tag{5.3}$$

$$(\xi_{1,1}+\xi_{1,2}+\xi_{1,3}+\xi_{1,4})\circ f_2 - df_2\circ(\eta_{1,2,1}+\eta_{1,2,2})=\frac{20}{9}x^9\frac{\partial}{\partial Y}. \tag{5.4}$$

すると, (5.3) の右辺は (5.1) の右辺の $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 倍になっており, (5.4) の右辺は (5.2) の右辺の $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 倍になっていることがわかる. 従って, 以下のベクトル場 ξ_1 は f 上持ち上げ可能になっていなければならない.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_{1,1}+\xi_{1,2}+\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right)(\xi_{1,3}+\xi_{1,4})\\ &= (6XY-6X^2Y^2)\frac{\partial}{\partial X}+(4Y^2+5X^3-9XY^3)\frac{\partial}{\partial Y}.\end{aligned}$$

次に, $\eta_{2,1,1}=2x^3\frac{\partial}{\partial x}$, $\eta_{2,2,1}=3x^4\frac{\partial}{\partial x}$, $\xi_{2,1}=4X^2\frac{\partial}{\partial X}+6XY\frac{\partial}{\partial Y}$ とおく. すると以下を得る.

$$\begin{aligned}\xi_{2,1}\circ f_1 - df_1\circ\eta_{2,1,1} &= 0,\\ \xi_{2,1}\circ f_2 - df_2\circ\eta_{2,2,1} &= -5x^6\frac{\partial}{\partial X}.\end{aligned}$$

$\xi_{2,2}=5Y^3\frac{\partial}{\partial X}$ とおく. すると以下を得る.

$$(\xi_{2,1}+\xi_{2,2})\circ f_1 - df_1\circ\eta_{2,1,1}=5x^9\frac{\partial}{\partial X}, \tag{5.5}$$

$$(\xi_{2,1}+\xi_{2,2})\circ f_2 - df_2\circ\eta_{2,2,1}=0. \tag{5.6}$$

$\xi_{2,3}=-5X^3Y\frac{\partial}{\partial X}$, $\eta_{2,2,2}=-\frac{5}{3}x^9\frac{\partial}{\partial x}$ とおく. すると以下を得る.

$$\begin{aligned}(\xi_{2,1}+\xi_{2,2}+\xi_{2,3})\circ f_1 - df_1\circ(\eta_{2,1,1}) &= 0,\\ (\xi_{2,1}+\xi_{2,2}+\xi_{2,3})\circ f_2 - df_2\circ(\eta_{2,2,1}+\eta_{2,2,2}) &= \frac{10}{3}x^{10}\frac{\partial}{\partial Y}.\end{aligned}$$

$\xi_{2,4}=-\frac{10}{3}X^2Y^2\frac{\partial}{\partial Y}$, $\eta_{2,1,2}=-\frac{10}{9}x^8\frac{\partial}{\partial x}$ とおく. すると以下を得る.

$$(\xi_{2,1}+\xi_{2,2}+\xi_{2,3}+\xi_{2,4})\circ f_1 - df_1\circ(\eta_{2,1,1}+\eta_{2,1,2})=\frac{20}{9}x^9\frac{\partial}{\partial X}, \tag{5.7}$$

$$(\xi_{2,1}+\xi_{2,2}+\xi_{2,3}+\xi_{2,4})\circ f_2 - df_2\circ(\eta_{2,2,1}+\eta_{2,2,2})=0. \tag{5.8}$$

すると, (5.7) の右辺は (5.5) の右辺の $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 倍になっており, (5.8) の右辺は (5.6) の右辺の $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 倍になっていることがわかる. 従って, 以下のベクトル場 ξ_2 は f 上持ち上げ可能になっていなければならない.

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \xi_{2,1}+\xi_{2,2}+\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right)(\xi_{2,3}+\xi_{2,4}) \\ &= (4X^2+5Y^3-9X^3Y)\frac{\partial}{\partial X}+(6XY-6X^2Y^2)\frac{\partial}{\partial Y}.\end{aligned}$$

以上により, 次の二つのベクトル場は f 上持ち上げ可能なベクトル場のなす加群の生成元を構成していることがわかる.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (6XY-6X^2Y^2)\frac{\partial}{\partial X}+(4Y^2+5X^3-9XY^3)\frac{\partial}{\partial Y}, \\ \xi_2 &= (4X^2+5Y^3-9X^3Y)\frac{\partial}{\partial X}+(6XY-6X^2Y^2)\frac{\partial}{\partial Y}.\end{aligned}$$

ノート： [12] によりダブルカスプは $\mathcal{A}$-単純な多重芽 $(\mathbb{K}, S) \to (\mathbb{K}^2, 0)$ であり, (ダブルカスプを f で表すと) $T\mathcal{A}(f) = T\mathcal{K}(f)$ を満たしている "open" と呼ばれる多重芽になっている. 従って, ダブルカスプの連続した族のどのダブルカスプも同一の $\mathcal{A}$-同値類に属することになり, 持ち上げ可能ベクトル場のなす加群の生成元を具体的に求めることの意義が幾分不明瞭かもしれない. しかし, ダブルカスプの場合に生成元を具体的に求めてみることはカスプの数がもっと多いマルチカスプの場合の試金石になる可能性がある. 実際, [19] の共著者である溝田氏はさまざまな角度のダブルカスプに対して生成元を具体的に求めてみることを何度となく繰り返した後, カスプの数が $(i+1)$ 個でそれぞれの角度も一般のマルチカスプの生成元を具体的に求めることにどうやら成功した模様である ([18]).

References

[1] V. I. Arnol'd: Wave front evolution and equivariant Morse lemma, *Commun Pure Appl. Math.*, **29**(1976), 557–582.

[2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps I* (*Monographs in Mathematics* **82**), Birkhäuser, Boston, 1985.

[3] J. W. Bruce and T. J. Gaffney: Simple singularities of mappings $\mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$, *J. London Math. Soc.*, **26**(1982), 465–474.

[4] J. W. Bruce and J. M. West: Functions on a crosscap, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **123**(1998), 19–39.

[5] J. Damon: $\mathcal{A}$-equivalence and the equivalence of sections of images and discriminants, *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*, Lecture Notes in Math. **1462**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 93–121.

[6] 福田拓生: 微分可能写像の特異点論, 数学, **34**(1982), 116–139.

[7] 福田拓生・西村尚史: 特異点と分岐, 特異点の数理第 2 巻, 共立出版, 2002.

[8] M. P. Holland and D. Mond: Stable mappings and logarithmic relative symplectic forms, *Math. Z.*, **231**(1999), 605–623.

[9] K. Houston and D. Littlestone: Vector fields liftable over corank 1 stable maps, *arXiv.org math* (2009), no. 0905.0556.

[10] 泉　脩藏・吉永悦男・福井敏純: 解析関数と特異点, 特異点の数理第 3 巻, 共立出版, 2002.

[11] 泉屋周一・石川剛郎: 応用特異点論, 共立出版, 1998.

[12] P. A. Kolgushkin and R. R. Sadykov: Simple singularities of multigerms of curves, *Rev. Mat. Complut.*, **14**(2001), 311–344.

[13] E. J. N. Looijenga: *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **77**, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[14] J. Mather: Stability of C^∞ mappings, III. Finitely determined map-germs, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **35**(1969), 127–156.

[15] J. Mather: Stability of C^∞ mappings, IV, Classification of stable map-germs by $\mathbb{R}$-algebras, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **37**(1970), 223–248.

[16] J. Mather: Stability of C^∞-mappings V. Transversality, *Adv. in Math.*, **4**(1970) 301–336.

[17] J. Mather: Stability of C^∞-mappings VI. The nice dimensions, Lecture Notes in Math., **192**, Springer-Verlag, Berlin, (1971), 207–253.

[18] Y. Mizota: Private communications, 2011.

[19] Y. Mizota and T. Nishimura: Multicusps, preprint, 2011.

[20] B. Morin: Formes canoniques des singularites d'une application differentiable, *Comptes Rendus*, **260**(1965), 5662–5665 and 6503–6506.

[21] T. Nishimura: $\mathcal{A}$-simple multigerms and $\mathcal{L}$-simple multigerms, *Yokohama Math. J.*, **55**(2010), 93–104.

[22] T. Nishimura: Vector fields liftable over finitely determined multigerms of corank at most one, preprint, 2010(corrected 2011).

[23] 野口　広・福田拓生: 復刊 初等カタストロフィー, 共立出版, 2002.

[24] J. H. Rieger: Families of maps from the plane to the plane, *J. London Math. Soc.*, **36**(1987), 351–369.

[25] J. H. Rieger, M. A. S. Ruas and R. Wik Atique: M-deformations of $\mathcal{A}$-simple germs from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^{n+1}$, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **144**(2008), 181–195.

[26] K. Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **27**(1980), 265–291.

[27] H. Terao: The bifurcation set and logarithmic vector fields, *Math. Ann.*, **263**(1983), 313–321.

[28] D. van Straten: A note on the discriminant of a space curve, *manuscripta math.*, **87**(1995), 167–177.

[29] C. T. C. Wall: Finite determinacy of smooth map-germs, *Bull. London Math. Soc.*, **13**(1981), 481–539.

[30] H. Whitney: The general type of singularities of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables, *Duke Math. J.*, **10**(1943), 161–172.

[31] H. Whitney: The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space, *Ann. of Math.*, **45**(1944), 247–293.