

## 差分 Riccati 方程式の可解性

東京大学大学院数理科学研究科 西岡 斉治 (Seiji Nishioka)\*<sup>1</sup>

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo

まず可解性という言葉について説明します。代数方程式の可解性という問題があります。これは、多項式  $= 0$  という方程式が四則演算と巾根をとるという操作を有限回行うことで解けるか、という問題です。

(0) 四則演算

(1) 巾根をとる

この問題を考えるのに体を使います。つまり、係数体  $K$  から出発して、

$$K \subset K(a_1) \subset K(a_1, a_2) \subset \dots$$

というように巾根を使って体を拡大していきます。ある  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して  $a_i^m \in K(a_1, \dots, a_{i-1})$  なので、操作 (1) を

$$y^m = \gamma, \quad \gamma \in K(a_1, \dots, a_{i-1})$$

の解を係数体に加えるという操作と捉えます。代数方程式の可解性とは、このような体の拡大に属す解が存在するか、という問題です。

微分方程式の可解性という問題もあります。これは Liouville により定式化されたもので、操作は次のものです。

---

\*<sup>1</sup> 日本学術振興会特別研究員 PD

## (0) 四則演算

(1) 巾根をとる ( $y^m = \gamma, m \in \mathbb{Z}_{>0}$  の解)(2) 積分をとる ( $y' = \beta$  の解)(3) 積分の指数関数をとる ( $y'/y = \alpha$  の解)

代数方程式と同様に体の拡大を使って考えますが、微分方程式なので微分を付加した体である微分体を使います。

一方、この講演の話題である差分方程式の可解性には差分を付加した体、差分体を使います。差分体を定義する前に操作をみておきましょう。差分方程式の可解性は Franke [2] により定式化されました。操作は次のものです。

## (0) 四則演算

(1) 巾根をとる ( $y^m = \gamma, m \in \mathbb{Z}_{>0}$  の解)(4)  $y_1 = y + \beta$  の解(5)  $y_1 = \alpha y, \alpha \neq 0$  の解(6)  $y_1 = \beta$  の解

$y_1$  とは  $y$  に差分の変換作用素を一回ほどこしたものです。例として次のものがあります。  $y(x+1), y(qx), y(x^d)$ 。ここで  $d$  は 2 以上の整数です。ちなみに、操作 (4) と (5) はそれぞれ無限和と無限積のようなもので、(6) は差分の逆変換です。

さて、差分体の定義をしましょう。組  $(K, \tau)$  が差分体であるとは、 $K$  が体で、 $\tau$  が  $K$  から  $K$  の中への同型 (injective endomorphism) であることとします。  $\tau$  を変換作用素と呼びます。また、 $\tau$  が全射のとき  $(K, \tau)$  を可逆差分体と呼びます。  $(K, \tau)$  は単に  $K$  とだけ書かれることがあります。

例. 次の3つの組は全て差分体です.

$$\begin{array}{ccc} (\text{Mer}(\mathbb{C}^\times), f(x) \mapsto f(qx)) & & (\mathbb{C}((x)), x \mapsto qx) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (\mathbb{C}(x), x \mapsto qx) & \end{array}$$

$\text{Mer}(\mathbb{C}^\times)$  は  $\mathbb{C}^\times$  上の有理型関数全体の集合,  $\mathbb{C}((x))$  は形式巾級数体です. 差分体間の2つの線はそれぞれ差分拡大を意味します. 差分拡大とは, 体拡大であって変換作用素が拡張になっているものです. 差分部分体と差分拡大体という言葉はしかるべく定義します.

これから差分拡大の一種である付値環型拡大を定義します. 付値環型拡大は Franke の拡大を包含する拡大で, 非可解性の証明に有効です. まず付値環の復習をしましょう.  $L/K$  を一変数代数関数体とします. 一変数代数関数体とは,  $L/K(y)$  が有限次拡大で  $y \in L$  が変数であるものです. 環  $\mathcal{O}$  が  $L/K$  の付値環であるとは,  $K \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq L$  で, かつ任意の  $z \in L$  に対して  $z \in \mathcal{O}$  または  $z^{-1} \in \mathcal{O}$  がなりたつことです. 付値環は次の性質をもちます.

$$\exists t \in \mathcal{O} \text{ s.t. } \forall z \in L^\times; z = ut^n, u \in \mathcal{O}^\times, n \in \mathbb{Z}.$$

この  $z$  の表示は一意的なので,  $v(z) = n$ ,  $v(0) = \infty$  と定めます. 特に  $v(t) = 1$  です. 実は  $n$  は  $t$  のとり方によりません.

この  $v$  に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \{z \in L \mid v(z) \geq 0\}, \\ \mathcal{O}^\times &= \{z \in L \mid v(z) = 0\} \end{aligned}$$

がなりたちます. また,  $v$  は離散付値です. つまり  $v: L \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  は次をみたします.

- (1)  $v(a) = \infty \iff a = 0$
- (2)  $v(ab) = v(a) + v(b)$

$$(3) v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$$

さらに離散付値は次の性質をもちます.

**補題 1.**  $v(a) \neq v(b) \implies v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$ .

付値環の例です.

**例.** 有理関数体  $K(y)$  について.

(1)  $v_\alpha$  を

$$v_\alpha((y-\alpha)^n f(y)/g(y)) = n, \quad f(y), g(y) \in K[y], f(\alpha)g(\alpha) \neq 0$$

で定めると,  $\mathcal{O} = \{z \mid v_\alpha(z) \geq 0\}$  は  $K(y)/K$  の付値環で, その付値は  $v_\alpha$  です.

(2)  $v_\infty$  を

$$v_\infty(f(y)/g(y)) = \deg g(y) - \deg f(y), \quad f(y), g(y) \in K[y]$$

で定めると,  $\mathcal{O} = \{z \mid v_\infty(z) \geq 0\}$  は  $K(y)/K$  の付値環で, その付値は  $v_\infty$  です.

さて, Franke の可解性における操作 (4), (5) は次のものでした.

(4)  $y_1 = y + \beta$  の解を係数体に加える

(5)  $y_1 = \alpha y, \alpha \neq 0$  の解を係数体に加える

$\alpha, \beta \in K = \mathbb{C}(x)$  として, (4) または (5) の超越関数解  $y$  をとります. 差分の変換作用素は  $\tau: x \mapsto x+1$  または  $\tau: x \mapsto qx$  とします. 例でみたように  $\mathcal{O} = \{z \mid v_\infty(z) \geq 0\}$  は  $K(y)/K$  の付値環になります. 任意の  $a \in K[y]$  に対して  $\deg \tau a = \deg a$  ですから, 任意の  $z \in K(y)$  に対して  $v_\infty(\tau z) = v_\infty(z)$  となります. 従って  $\tau \mathcal{O} = \mathcal{O}$  です.

そこで次のように付値環型拡大を定義します.

**定義 2.** 差分拡大  $N/K$  が次の差分拡大の鎖をもつとき,  $N/K$  を付値環型拡大とよぶ.

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = N.$$

ここで, それぞれの拡大  $K_i/K_{i-1}$  に対し (1)  $K_i/K_{i-1}$  は代数的, または (2)  $K_i$  と  $K_{i-1}$  は可逆で,  $K_i/K_{i-1}$  は一変数代数関数体であり, ある  $j \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対し  $\tau^j \mathcal{O} = \mathcal{O}$  なる付値環  $\mathcal{O}$  をもつ.

Franke の拡大は付値環型拡大に含まれます. この拡大を使って差分 Riccati 方程式の可解性を調べました.

差分 Riccati 方程式とは次の形の方程式です.

$$y_1 = \frac{ay + b}{cy + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}(x).$$

**例.** 次の方程式は  $q$ -Airy 方程式 (Airy 方程式の  $q$ -差分版) と呼ばれるものです.

$$y(qx) = \frac{1}{y(x)} - qx.$$

結果を述べる前に少し記号を導入します. 差分 Riccati 方程式と行列を次のように対応させます.

$$y_1 = \frac{ay + b}{cy + d} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

さらに

$$A_1 = A,$$

$$A_i = (\tau A_{i-1})A = \begin{pmatrix} a^{(i)} & b^{(i)} \\ c^{(i)} & d^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i \geq 2$$

とおき,

$$\text{eq. } A_i: \quad y_i = \frac{a^{(i)}y + b^{(i)}}{c^{(i)}y + d^{(i)}}$$

とします.  $\text{eq. } A_i$  は  $\text{eq. } A$  を  $i$  回イテレートしたものです. 以下, 全ての  $i \geq 1$  に対して  $b^{(i)}c^{(i)} \neq 0$  であると仮定します. ちなみに,  $b^{(i)}$  か  $c^{(i)}$  が 0 になる場合, 方程式は  $\tau^i$  に関して必ず可解です. 次の定理をええました.

**定理 3.**  $\text{eq. } A$  がある付値環型拡大  $N/\mathbb{C}(x)$  に属す解をもつなら, ある  $i \geq 1$  に対して  $\text{eq. } A_i$  は代数関数解をもつ. よって, 各  $\text{eq. } A_i$  が代数関数解をもたなければ  $\text{eq. } A$  は非可解である.

後半の主張について, 各  $\text{eq. } A_i$  が代数関数解をもたなければ  $\text{eq. } A$  は付値環型拡大に属す解をもたないということなので, Franke の拡大に属す解をもたないことになり,  $\text{eq. } A$  は非可解であることがわかります.

この定理を使って次のことが証明できます.

**例.**  $q$ -Airy 方程式は非可解.  $q$ -Bessel 方程式 (タイプ 3) はパラメータ  $\in \mathbb{Q}$  のとき非可解. ただし  $q$  は超越数.

ちなみに微分方程式の Airy 方程式と Bessel 方程式 (パラメータ  $\notin \mathbb{Z} + 1/2$ ) も非可解です.

定理は次の補題より帰納法でえられます.

**補題 4.**  $L/K$  は定義 2 の (2) をみたすとする.  $\text{eq. } A$  が  $L$  上代数的な解  $f$  をもてば, ある  $i \geq 1$  に対して  $\text{eq. } A_i$  は  $K$  上代数的な解をもつ.

*Proof.*  $\bar{K} \subset \bar{L}$  をそれぞれ  $K$  と  $L$  の代数閉包とし,  $M = L(f)$  とおきます.  $f \notin \bar{K}$  の場合を考えればよい.  $M\bar{K}/\bar{K}$  は一変数代数関数体です.  $L/K$  の付値環  $\mathcal{O}$  で  $\tau^j \mathcal{O} = \mathcal{O}$  をみたすものを取り,  $\mathcal{O}'$  をその  $M\bar{K}$  への拡張とします.  $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap L$  だから, 任意の  $i \geq 0$  に対し  $\mathcal{O} = \tau^{ij} \mathcal{O}' \cap L$  がなりたちます. よって  $\tau^{ij} \mathcal{O}'$  も  $\mathcal{O}$  の拡張です.  $\mathcal{O}$  の拡張は有限個しかないから, ある  $k \geq 1$  に対し  $\tau^k \mathcal{O}' = \mathcal{O}'$  となります. 従って, 任意の  $z \in M\bar{K}$  に対して  $v(\tau^k z) = v(z)$  であることがわかります. ここで  $v$  は  $\mathcal{O}'$  の付値です.  $f$

は eq.  $A_k$  の解だから

$$(1) \quad \tau^k(f)(c^{(k)}f + d^{(k)}) = a^{(k)}f + b^{(k)}$$

がなりたちます. 両辺の付値を比較すると  $v(f) = 0$  をえます.

$\phi: M\bar{K} \hookrightarrow \bar{K}((t))$  をうめこみ写像とし,

$$\phi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^i, \quad h_i \in \bar{K}, h_0 \neq 0,$$

$$\phi(\tau^k t) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i t^i, \quad e_i \in \bar{K}, e_1 \neq 0$$

と表します.

$$\phi(\tau^k f) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^k(h_i) \left( \sum_{l=1}^{\infty} e_l t^l \right)^i$$

より, 等式 (1) の 0 次の係数を比較すると

$$\tau^k(h_0)(c^{(k)}h_0 + d^{(k)}) = a^{(k)}h_0 + b^{(k)}$$

をえます. これは  $h_0 \in \bar{K}$  が eq.  $A_k$  の解であることを意味します.  $\square$

本研究は日本学術振興会の特別研究員制度と科研費 (20・4941) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] Cohn, R. M., *Difference Algebra*, Interscience Publishers, New York  
 ・ London ・ Sydney, 1965.

- [2] Franke, C. H., *Solvability of Linear Homogeneous Difference Equations by Elementary Operations*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 17, No. 1 (1966), 240–246.
- [3] Levin, A., *Difference Algebra*, Springer Science+Business Media B.V., 2008.
- [4] Nishioka, S., *Solvability of difference Riccati equations by elementary operations*. To appear in Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo.
- [5] Stichtenoth, H., *Algebraic function fields and codes*, Springer-Verlag, 1993.