数理解析研究所講究録
第 1765 巻 2011 年 72-90

一般超幾何関数，一般 Schlesinger 方程式とその合流

木村弘信（熊大・自然科学研究科）

1 はじめに

特殊関数のなかで重要な位置を占めるガウスの超幾何関数やその合流型関数の一族（Kummer,Bessel,Hermite,Airy）は，すべて２階常微分方程式の解として特徴づけられる．これらの関数は [1],[3],[5] において，その積分表示に着目して Grassmann 多様体を定義域とする一般超幾何関数に一般化された．積分表示を統御しているのは，自然数の分割 λ でパラメトライズされる一般線形群の正則元の中心化群として得られる極大可換部分群 H_λ であり，積分表示はこれらの群の普遍被覆群の指標の Radon 変換である．

さて，上記の関数たちが Painlevé 方程式の特殊解として現れることは２０世紀の初頭には既に知られていたが，なぜこのような特殊解が現れるかということはよく理解されていなかったように思われる．Mason と Woodhouse による Twistor 理論からの Painlev'e 方程式へのアプローチは，このような問いに光を投げかけていると思われる．彼らは，複素４次元時空 $\mathbb{C}^4$ を Grassmann 多様体 $G_{2,4}$ にアファイン座標近傍として埋め込み，その上の自明な $SL_2(\mathbb{C})$ 束上の反自己双対 Yang-Mills 方程式を，群４の分割 λ に対応する群 H_λ の $G_{2,4}$ への作用によって変数分離することによって，Painlevé 方程式が導けることを示した．

この論説では，一般超幾何関数がどのように定義されるかを述べ，それと類似の枠組みで，特別な場合には Painlevé 方程式に帰着する一般 Schlesinger 系が得られる事，そして一般 Schlesinger 系に関する合流と呼ばれる極限プロセスが一般超幾何関数の場合と同様に得られることを述べる．

2 一般超幾何関数

2.1 $G_{2,4}$ 上の超幾何関数

一般超幾何関数がどのようなものであるかを，Gauss の超幾何関数と Airy 関数を例として説明する．Gauss の超幾何関数は

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b,c;t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!} t^m \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-tu)^{-b} du \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と定義される．これは方程式 $t(1-t)y'' + \{c-(a+b+1)t\}y' - aby = 0$ の $t=0$ における正則解で，$y(0)=1$ を満たすものである．Kummer 以下の特殊関数の積分表示は

$$
\begin{aligned}
{}_1F_1(a,c;t) &= C\int_0^1 e^{tu}u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du, && \text{(Kummer)}\\
J_a(x) &= C\int_\gamma e^{t(u-1/u)}u^{-a-1}du, && \text{(Bessel)}\\
H_a(x) &= C\int_\gamma e^{xtu-\frac{1}{2}u^2}u^{-a-1}du, && \text{(Hermite)}\\
\mathrm{Ai}(x) &= C\int_\gamma e^{tu-\frac{1}{3}u^3}du. && \text{(Airy)}
\end{aligned}
$$

これらの関数にそれぞれ 4 の分割 $1+1+1+1$，$2+1+1$，$2+2$，$3+1$，4 を対応させる．一般超幾何関数の文脈で，4 の分割とは何を表わしているのであろうか．実は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の正則元の集合に入る stratum を指定してる．

Definition 1. $a \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ が正則元とは，随伴作用による軌道 $O(a) = \{gag^{-1} \mid g \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})\}$ の次元が最大となるときをいう．

$a \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ が正則元であるための条件は，a のジョルダン標準形において勝手な 2 つのジョルダン細胞の固有値が異なっていることであることはすぐに分かる．上記の積分表示を得るとき重要な役割を果たすのは，正則元の中心化群である．分割に対応した正則元

のジョルダン標準形とその中心化群は以下の通り.

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & a_1 & & \\ & & a_2 & \\ & & & a_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow H_{(1,1,1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & h_1 & & \\ & & h_2 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 & & \\ & a_0 & & \\ & & a_2 & \\ & & & a_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow H_{(2,1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & & \\ & h_0 & & \\ & & h_2 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 & & \\ & a_0 & & \\ & & a_2 & 1 \\ & & & a_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow H_{(2,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & & \\ & h_0 & & \\ & & h_2 & h_3 \\ & & & h_2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 & & \\ & a_0 & 1 & \\ & & a_0 & \\ & & & a_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow H_{(3,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \\ & h_0 & h_1 & \\ & & h_0 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 & & \\ & a_0 & 1 & \\ & & a_0 & 1 \\ & & & a_0 \end{pmatrix} \leftrightarrow H_{(4)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & h_0 & h_1 & h_2 \\ & & h_0 & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ここで $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$.

2.2 Gauss の超幾何をどのように一般超幾何とみるか

超幾何積分 (1) を以下のように理解する. 群 $H = H_{(1,1,1,1)}$ の普遍被覆群 $\tilde{H}$ を考えて, その指標 $\chi : \tilde{H} \to \mathbb{C}^\times$ をとる. それは

$$\chi(h;\alpha) = h_0^{\alpha_0} \cdots h_3^{\alpha_3}$$

で与えられる. ここで $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_0, a-1, c-a-1, -b) \in \mathbb{C}^4$. 指標 χ に積分変数 u の一次式

$$h_0(u) = 1, \quad h_1(u) = u, \quad h_2(u) = 1-u, \quad h_3(u) = 1-tu$$

を代入して得られる u の関数 $\chi(h(u);\alpha)$ は, 積分 (1) の被積分関数を与える. そして $h_1(u)$ の零点 0 と $h_2(u)$ の零点 1 を結ぶ道に沿って微分形式 $\chi(h(u);\alpha)\,du$ を積分することによって超幾何積分 (1) を得る.

さて，上のプロセスでは，指標 χ における項 $h_0^{\alpha_0}$ は必要ないように見える．なぜこのような項まで考えるのであろうか？　このことを理解するために，変数 $u \in \mathbb{C}$ の代わりに $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ の斉次座標 $s = (s_0, s_1)$ を用いて積分を書き直す：$u = s_1/s_0$ により $\mathbb{C}$ が $\mathbb{P}^1$ に埋め込まれているとすると

$$\begin{aligned}\chi(h(u);\alpha)du &= \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^{\alpha_1}\left(1-\frac{s_1}{s_0}\right)^{\alpha_2}\left(1-t\frac{s_1}{s_0}\right)^{\alpha_3} d\left(\frac{s_1}{s_0}\right) \\ &= s_0^{-2-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} s_1^{\alpha_1}(s_0-s_1)^{\alpha_2}(s_0-ts_1)^{\alpha_3}(s_0ds_1 - s_1ds_0).\end{aligned}$$

したがって，指標 χ における α_0は$\alpha_0 = -2-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 = b-c$ と決められるべきものである．新しく現れた項 $s_0^{\alpha_0}$ は，指標 χ の $h_0^{\alpha_0}$の部分に s の一次式 s_0 を代入して得られ，被積分関数の $u=\infty$ における挙動を表している．超幾何微分方程式のさまざまな解を積分で与えるとき，∞ と $0, 1, 1/t$ を結ぶ積分路をとる必要があるわけであるから，$h_0^{\alpha_0}$ の部分は重要な役割を担っていることが分かる．まとめると，超幾何積分は

$$ {}_2F_1(a,b,c;t) = C\int \chi(h(s);\alpha)\,(s_0ds_1 - s_1ds_0)$$

と書け，一次式 $h_i(s)$ は，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -t \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coeff. of } s_0 \\ \leftarrow \text{coeff. of } s_1 \end{array} . \tag{2}$$

の i 番目の列ベクトルによって与えられる s の斉次一次式である．

では，Gauss の超幾何積分において，なぜ (2) で与えられる特別な一次式が選ばれるのであろうか．この自然な問に答えたのが I.M.Gelfand である．彼は，(2) の代わりに，より一般の 2×4 行列 z を用いて t の斉次一次式を定め，上と同様の構成を行うのである．具体的には $Z = \{z \in \mathrm{Mat}_{2,4}(\mathbb{C}) \mid$ すべての 2×2 小行列式 $\neq 0\}$ とし，$z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in Z$ に対して $sz = (sz_0, sz_1, sz_2, ts_3)$ と s の 4 個の一次式を定める．そして一般化された超幾何関数（HGF）を

$$F(z;\gamma) = \int_\gamma \chi(sz;\alpha)\cdot(s_0ds_1 - s_1ds_0)$$

と定義する．ただし γ は t の一次式の 4 個の零点のうちの 2 つを結ぶ道である．

さて，Gelfand の HGF を考えることによって，Gauss の超幾何関数がどのくらい一般化されたのであろうか．実は本質的には同じであることが以下のようにわかる．空間 Z への群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times H$ の作用を

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times Z \times H \ni (g, z, h) \mapsto gzh \in Z \tag{3}$$

で定義する．このとき次が成り立つ．

Proposition 2. $(g,h) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times H$ に対して

$$F(gzh;\gamma') = (\det g)^{-1}\chi(h;\alpha)F(z;\gamma).$$

ここで $\gamma' = (g^{-1})_*\gamma$ は γ の $t \mapsto tg^{-1}$ による像.

この命題によって，F の z における値と gzh における値は群の指標倍を除いて一致することが分かる．一方，簡単な計算により，任意に $z \in Z$ をとったとき，$g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ と $h \in H$ をうまく選んで

$$gzh = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

とできることが示せる．そして x は z によって唯一つに定まる．これが Gauss の場合に選ばれた特別な形の行列 (2) である．

2.3 Airy 積分をどのようにみるか

今度は群 $H = H_{(4)}$ に対して上と同様の構成をしてみよう．$H \ni h$ を $h = h_0 I + h_1\Lambda + h_2\Lambda^2 + h_3\Lambda^3$ と表す．ここで $\Lambda = (\delta_{i+1,j})_{0\le i,j\le 3}$ はシフト行列である．普遍被覆群 $\tilde{H}$ の指標 $\chi : \tilde{H} \to \mathbb{C}^\times$ を記述するために h の関数 $\theta_j(h)$ $(j = 0,\ldots,3)$ を以下のように導入する．

$$\log(h_0 I + h_1\Lambda + h_2\Lambda^2 + h_3\Lambda^3) = (\log h_0)I + \theta_1(h)\Lambda + \theta_2(h)\Lambda^2 + \theta_3(h)\Lambda^3. \quad (4)$$

log のテイラー展開を用いて計算すると

$$\theta_0(h) = \log h_0, \quad \theta_1(h) = \frac{h_1}{h_0},$$
$$\theta_2(h) = \frac{h_2}{h_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2, \quad \theta_3(h) = \frac{h_3}{h_0} - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)\left(\frac{h_2}{h_0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3$$

であることが分かる．対応 $h \mapsto (h_0, \theta_1(h), \ldots, \theta_3(h))$ は群同型 $H_{(4)} \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^3$ を与えることが示されるので，指標 χ は，定数 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^4$ を用いて

$$\chi(h;\alpha) = \exp(\alpha_0\theta_0 + \alpha_1\theta_1(h) + \alpha_2\theta_2(h) + \alpha_3\theta_3(h))$$

で与えられることが分かる．Airy 積分を得るには $\alpha = (-2,0,0,-1)$ ととり，指標 χ に積分変数 u の一次式

$$h(u) = (1,u)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = (1,u,0,-tu)$$

を代入する．すると被積分関数 $e^{tu-u^3/3}$ が得られる．なぜこのような特別な形の行列が現れるかは，Gauss の場合と同様に一般化された Airy 積分を定義して，命題 2 に相当する事実を示すことにより理解することができる．すなわち

$$Z_{(4)} = \{z = (z_0, \ldots, z_3) \in \mathrm{Mat}_{2,4}(\mathbb{C}); \det(z_0, z_1) \neq 0\}$$

とおき，$Z_{(4)}$ 上の関数を $F(z,\gamma) = \int_\gamma \chi(sz;\alpha)(s_0 ds_1 - s_1 ds_0)$ で定義すると，命題 2 がそのままの形で成り立つ．さらに

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\backslash Z_{(4)}/H_{(4)} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \right\}$$

が成立する．F をこの商空間の実現に制限したものが Airy 積分である．

Remark. 指標 χ におけるパラメータ α を $\alpha = (-2, 0, 0, -1)$ と特別に選んだ理由は，ワイル群の類似物 $N_{\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})}(H_{(4)})/H_{(4)}$ を一般化された Airy 方程式が対称性の群として持つことから説明できる．

2.4 一般超幾何関数

Gauss,Airy の場合を一般化して，$\mathrm{Mat}_{r+1,N+1}(\mathbb{C})$ の Zariski 開集合で定義される一般超幾何関数を定義しよう．

極大可換部分群： $N+1$ の分割 $\lambda = (n_1, \ldots, n_\ell)$ で指定される $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ の部分群

$$H_\lambda = J(n_1) \times \cdots \times J(n_\ell), \quad J(n) = \left\{ h = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \ldots & h_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix}; h_0 \neq 0 \right\}$$

をとる．$h \in H_\lambda$ は $h = (h^{(1)}, \ldots, h^{(\ell)})$, $h \in J(n_k)$ と表される．$J(n)$ は Jordan 群と呼ばれる．$\tilde{H}_\lambda$ の指標を与えるには，群同型 $J(n) \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^{n-1}$ を用いる．この同型は $h \mapsto (h_0, \theta_1(h), \ldots, \theta_{n-1}(h))$ で与えられる，ここで $\theta_m(h)$ は

$$\log h = \log(h_0 I + h_1 \Lambda + \cdots + h_{n-1}\Lambda^{n-1}) = (\log h_0)I + \sum_{m=1}^{n-1} \theta_m(h)\Lambda^m$$

で定義されるものである．ただし $\Lambda = (\delta_{i+1,j}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ はシフト行列である．log の

テイラー展開を用いれば，$\theta_m(h)$ の具体形は

$$\theta_m(h) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=m} (-1)^{|k|-1}\frac{(|k|-1)!}{k!}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{h_m}{h_0}\right)^{k_m}$$

で与えられることが分かる．

H_λ **の指標：** 指標 $\chi : \tilde{H} \to \mathbb{C}^\times$ は Jordan 群の指標 $\chi_n : \tilde{J}(n) \to \mathbb{C}^\times$ を用いて

$$\chi(h;\alpha) = \prod_{k=1}^{\ell} \chi_{n_k}(h^{(k)};\alpha^{(k)}) = \prod_{k=1}^{\ell} \exp\left(\sum_{m=0}^{n_k-1} \alpha_m^{(k)}\theta_m(h^{(k)})\right)$$

で与えられる． ここで $\alpha^{(k)} = (\alpha_0^{(k)},\ldots,\alpha_{n_k-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^{n_k}$.

ラドン変換：積分変数の空間 $\mathbb{P}^r$ の斉次座標を $s=(s_0,\ldots,s_r)$ とし，t の斉次一次式の係数の空間を

$$Z = \{z = (z^{(1)},\ldots,z^{(\ell)}) \in \mathrm{Mat}_{r+1,N+1}(\mathbb{C}) \mid 条件\ (*)\ \}$$

とする．ここで $z^{(k)} = (z_0^{(k)},\ldots,z_{n_k-1}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{r+1,n_k}(\mathbb{C})$ とすると，条件 (*) は，$0 \le m_k \le n_k \quad (k=1,\ldots,\ell)$ かつ $m_1+\cdots+m_\ell = r+1$ をみたす勝手な $(m_1,\ldots,m_\ell)$ に対して

$$\det(z_0^{(1)},\ldots,z_{m_1-1}^{(1)},\ldots,z_0^{(\ell)},\ldots,z_{m_\ell-1}^{(\ell)}) \neq 0$$

が成り立つことである．

Definition. 指標 $\chi(\cdot\,;\alpha)$ が条件で $\sum_{k=1}^{\ell}\alpha_0^{(k)} = -r-1, \quad \alpha_{n_k-1}^{(k)} \neq 0\ (\forall k)$ を満たすとする．このとき一般超幾何関数を

$$I(z,\alpha,c) = \int_c \chi(sz;\alpha)\cdot\sigma,$$

で定義する．ここで $\sigma = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i ds_0\wedge\cdots\widehat{ds_i}\cdots\wedge ds_r$ で，c は，$\chi(tz;\alpha)$ から決まるホモロジー群のサイクル．

Remark. 一般超幾何関数の被積分関数は，超平面配置 $\mathcal{A}=\{H_1,\ldots,H_\ell\}$，$H_k = \{s \in \mathbb{P}^r \mid s\cdot z_0^{(k)} = 0\}$ を分岐集合とする多価関数である．このことは θ_m の具体形から分かる．

3　Twistor 理論と Schlesinger 系

3.1　考える問題

行列 $A_1, \ldots, A_N \in \mathrm{Mat}_p(\mathbb{C})$ に対する非線形微分方程式

$$dA_j = \sum_{i(\neq j)} [A_i, A_j] d\log(t_i - t_j), \quad (j = 1, \ldots N) \tag{5}$$

は Schlesinger 系と呼ばれる．この方程式は $N+1$ 個の一位の極を持つ $\mathbb{P}^1$ 上の Fuchs 型線形方程式

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j(t)}{x - t_j} y \tag{6}$$

の monodromy 保存変形から得られる．ここで $A_0 := -A_1 - \cdots - A_N$ は方程式を $x = \infty$ で書きなおしたときにあらわれる係数行列の一位の極の留数行列である．t に関する依存性は

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = -\frac{A_j(t)}{x - t_j} y \quad (j = 1, \ldots, N) \tag{7}$$

で記述される．そして (5) は (6) と (7) の両立条件となっている．Painlevé 方程式 P_6 は，(5) において $N = 3, p = 2$ で $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = t$ とし，さらに第一積分を用いた reduction を行うことによって得られる．P_6 の仲間の退化した方程式は，それらがどのような順序で退化していくかということも含めて表すと

$$\begin{array}{ccccc} & & P_3 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ P_6 \longrightarrow P_5 & & & & P_2(\longrightarrow P_1) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & P_4 & & \end{array} \tag{8}$$

となる．これらは P_6 に対応する Fuchs 型方程式から出発して，特異点の合流によって得られる不確定特異点を持つ線形方程式の（広い意味の）monodromy 保存変形を記述している．その線形方程式の特異点が r 位の極の場合にはその特異点に r を対応させることに

すると，上記の Painlevé 方程式には 4 の分割が対応する：

$$\begin{array}{ccccc} & & (2,2) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ (1,1,1,1) \longrightarrow (2,1,1) & & & & (4). \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & (3,1) & & \end{array} \tag{9}$$

線形方程式の具体形については [10] を参照．ここでは，Mason と Woodhouse による Twistor 理論からのアプローチを用いることによって，一般超幾何関数の構成との類似性を追いながら次の問題を考える．

1. Schlesinger 系 (5) の退化を monodromy 保存変形で与えるとき，対応する線形方程式がどのような形になるか．
2. 変形を記述するパラメータ t が，線形方程式にどのように入るか？
3. 変形を記述する (7) に相当する方程式がどのように記述されるか．

3.2 Klein 対応

Twistor 理論において重要な役割をする Klein 対応について述べる．旗多様体

$$F_{1,2} = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \subset v_2 \subset \mathbb{C}^{N+1} : \text{部分空間}, \dim v_k = k\}$$
$$F_i = \{v \subset \mathbb{C}^{N+1} \mid \text{部分空間}, \dim v = i\} \quad (i = 1, 2)$$

を考える．このとき Double fibration

$$\begin{array}{ccc} & F_{1,2} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ F_1 & & F_2 \end{array} \tag{10}$$

が

$$\pi_1((v_1, v_2)) = v_1, \quad \pi_2((v_1, v_2)) = v_2. \tag{11}$$

で定義される．F_1 は射影空間 $\mathbb{P}^N$ で twistor 空間とよばれ，また F_2 は Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_{2,N+1}$ で時空と呼ばれる．このとき，twistor 空間と時空の間の対応が

$$F_2 \ni q \mapsto \hat{q} = \pi_1(\pi_2^{-1}(q)) (\simeq \mathbb{P}^1) \subset F_1 \quad \text{twistor line}$$
$$F_1 \ni p \mapsto \tilde{p} = \pi_2(\pi_1^{-1}(p)).$$

により定義される．$\tilde{p}$ は $F_2 = \mathrm{Gr}_{2,N+1}$ の $N-1$ 次元の平面となる．この対応を Klein 対応という．一般化された Yang-Mills 方程式 (GASDYM) はこの時空で定義されている．Twistor 理論においては，GASDYM の解に対して，twistor 空間上のベクトル束で，twistor line 上で自明となるものが対応し，逆に，このようなベクトル束から GASDYM の解が構成できるということが重要である．このような対応は Ward 対応と呼ばれている．

3.3 群 H_λ と monodromy 保存変形

Schlesinger 系はを導く 1 位の極のみを持つ $\mathbb{P}^1$ 上の線形微分方程式の monodromy 保存変形で得られるが，不確定特異点をも合わせ持つ $\mathbb{P}^1$ 上の線形微分方程式の monodromy 保存変形を twistor 理論の立場から扱うには 2 通りのアプローチがある．一つは時空 $\mathrm{Gr}_{2,N+1}$ 上の一般化された Yang Mills 方程式を $\mathrm{Gr}_{2,N+1}$ への群 H_λ の作用によって変数分離するという方法であり， もう一つは，twistor 空間 $\mathbb{P}^N$ 上の twistor line において自明となるベクトル束への群 H_λ の作用を考える方法である．ここでは後に Schlesinger 系の退化のプロセスを扱う都合上，後者のアプローチを用いる．前者は得られる退化型 Schlesinger 系がその特殊解として一般超幾何関数を用いて表されるものを持つことを示す場合に有効なアプローチである [4].

Twistor 空間 $\mathbb{P}^N$ の斉次座標を $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ とし，$[\zeta]$ で斉次座標 ζ を持つ点を表わす．群 H_λ の $\mathbb{P}^N$ への右から作用 $\mathbb{P}^N \times H_\lambda \to \mathbb{P}^N$ を

$$([\zeta], h) \mapsto [\zeta h] \tag{12}$$

で定義する．分割 $\lambda = (n_1, \ldots, n_\ell)$ に応じて，斉次座標 x をブロックに分けて

$$\zeta = (\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(\ell)}), \quad \zeta^{(k)} = (\zeta_0^{(k)}, \ldots, \zeta_{n_k-1}^{(k)}) \tag{13}$$

と表わせば、$h = (h^{(1)}, \ldots, h^{(\ell)}), h^{(k)} \in J(n_k)$ の 作用は

$$[\zeta h] = [\zeta^{(1)} h^{(1)}, \ldots, \zeta^{(\ell)} h^{(\ell)}]$$

と書かれる.

Theorem 3. 開集合 $U \subset \mathbb{P}^N$ と *rank* が r の正則ベクトル束 $\pi : E \to U$ で次の性質をみたすものがあるとする。

(i) U は H_λ の作用で不変 $(\zeta \in U, h \in H \to \zeta h \in U)$ である.

(ii) H_λ の作用は E に持ち上げることができる.

このとき H_λ の E への無限小作用は E における平坦な接続 ∇ を定める．局所的に ∇ は次のように表わせる．

$$\nabla = d - \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_k-1} A_j^{(k)}(\zeta) d\theta_j(\zeta^{(k)}) \right) \wedge \tag{14}$$

次に，この平坦接続と monodromy 保存変形と結び付けることを考える．分割 λ に応じて $z \in \mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C})$ を

$$z = (z^{(1)}, \ldots, z^{(\ell)}), \quad z^{(k)} = (z_0^{(k)}, \ldots, z_{n_k-1}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{2,n_k}(\mathbb{C})$$

と表す． $\mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の開集合 Z を

$$Z = \left\{ z \in \mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C}) \mid \det(z_0^{(k)}, z_1^{(k)}) \neq 0, \ \det(z_0^{(k)}, z_0^{(l)}) \neq 0 \quad (1 \leq k, l \leq \ell) \right\}$$

と定める． さらに、正則写像 $\Phi : \mathbb{P}^1 \times Z \to \mathbb{P}^N$ を

$$([\xi], z) \mapsto [\xi z] = [\xi z^{(1)}, \ldots, \xi z^{(\ell)}] \tag{15}$$

によって定義する。ここで $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ は $\mathbb{P}^1$ の斉次座標である．$x = \xi_1/\xi_0$ を $\mathbb{P}^1$ の非斉次座標として $\vec{x} = (1, x)$ という記号も用いる。

Theorem 4. *$U \subset \mathbb{P}^N$ をある line を含む H_λ 不変な開集合とし，$\pi : E \to U$ を U 上の rank r の正則ベクトル束で次の性質を満たすものとする： (i) U は群 H_λ の $\mathbb{P}^N$ への作用で不変である．(ii) E は U に含まれる line 上自明である．(iii)H_λ の U への作用はベクトル束 E への無限小作用に持ち上がる． このとき，H_λ の無限小作用から得られる E の平坦接続 ∇ は，写像 $\Phi : \mathbb{P}^1 \times Z \to \mathbb{P}^N$ によって得られる Φ^*E 上の平坦接続 $\Phi^*\nabla$ によって次の形の微分方程式の monodromy 保存変形を与える．*

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_k-1} A_j^{(k)}(z) \frac{\partial \theta_j(\vec{x} z^{(k)})}{\partial x} \right) y \tag{16}$$

Proposition 5. *方程式 (16) の monodromy 保存変形は $\mathbb{P}^1 \times Z$ 上の平坦接続*

$$\Phi^*\nabla = d - \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_k-1} \tilde{A}_j^{(k)}(z) d\theta_j(\vec{x} z) \right) \wedge \tag{17}$$

によって与えられる．

Definition. 接続 $\Phi^*\nabla$ の平坦性として得られる $\tilde{A}_j^{(k)}$ たちに対する非線形微分方程式を一般 Schlesinger 系 (GSS) と呼ぶことにする

3.4 いくつかの例の導出

ここでは定理 4 を用いて Painlevé 方程式や Schlesinger 方程式を導いてみよう．

3.4.1 Schlesinger 系

$N+1$ の分割 $\lambda=(1,\ldots,1)$ をとる．さらに $Z\subset \mathrm{Mat}_{2,N+1}(\mathbb{C})$ の部分集合

$$Z'=\left\{z=\begin{pmatrix}-t_0 & -t_1 & \ldots & -t_N\\ 1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix} \mid t_i\neq t_j \quad (i\neq j)\right\}$$

を考える．$N+1$ の分割 $\lambda=(1,\ldots,1)$ に対応する群 $H=H_\lambda$ は $\mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ の Cartan subgroup で，Z_λ に作用する．この作用による商空間 Z_λ/H を考えると，Z' はこの一つの実現になっている．写像 $\Phi:\mathbb{P}^1\times Z'\to\mathbb{P}^N$ を

$$([\xi],z)\mapsto[\xi z]=(\xi z_0:\cdots:\xi z_N) \tag{18}$$

で定義する． 定理 3 の平坦接続を ∇ とし，その接続行列を ω とかく．写像 Φ によって ∇ を $\mathbb{P}^1\times Z'$ に引き戻した $\Phi^*\nabla=d-\Phi^*\omega\wedge$ の接続行列 $\Phi^*\omega$ は local に

$$\Phi^*\omega=\sum_{j=0}^{N}\tilde{A}_j(t)d\log(\zeta-t_j),\quad \sum_i\tilde{A}_i=0$$

と書かれる．以下面倒なので $\tilde{A}_j$ も単に A_j と書く． 従って，この接続が平坦である条件 $\Phi^*(d\omega-w\wedge\omega)=0$ で与えられ，それは Schlesinger 系

$$dA_i+\sum_{j\neq i}[A_i,A_j]\frac{dt_i-dt_j}{t_i-t_j}=0,\quad (i=0,\ldots,N) \tag{19}$$

である．$t_0=\infty$ のときが (5) の場合になっている．

3.4.2 Painlevé P_6

ここでは P_6 と同等な Schlesinger タイプの方程式のみを導こう．方針は一般の Schlesinger 系と同様である．分割が $\lambda=(1,1,1,1)$ とし，対応する極大可換部分群 H_λ が 4 次の Cartan 部分群である場合を考える．$Z_\lambda\subset\mathrm{Mat}_{2,4}(\mathbb{C})$ の部分集合

$$Z'=\left\{z=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -t\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \mid t\neq 0,1,\infty\right\}$$

を考える．Z' は $\mathbb{P}^1$ の一般の位置にある 4 点の配置空間 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\backslash Z_\lambda/H_\lambda$ の一つの実現である． 写像 $\Phi:\mathbb{P}^1\times Z'\to\mathbb{P}^3$ を (18) のように定義すると，$\Phi^*\nabla$ の接続行列は local に

$$\Phi^*\omega = A_1\frac{dx}{x} + A_2\frac{dx}{x-1} + A_3\frac{dx-dt}{x-t}$$

で与えられる．この接続の平坦性条件 $\Phi^*\nabla^2=0$ は連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \left(\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x-1} + \dfrac{A_3}{x-t}\right) y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\dfrac{A_3}{\zeta - t} y \end{cases}$$

の両立条件と同じものである． 具体的には

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{[A_3,A_1]}{t}, \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{[A_3,A_2]}{t-1},$$
$$\frac{dA_3}{dt} = \frac{[A_1,A_3]}{t} + \frac{[A_2,A_3]}{t-1}.$$

これらから $A_0 = -A_1 - A_2 - A_3$ が定数行列であることが従う．すなわち $x=\infty$ の係数行列 A_0 が t に依らないという条件である．この方程式において第一積分を用いて reduction を行うことにより P_6 が得られることが知られている．

3.4.3 Painlevé P_2

4 の分割が (4) の場合，すなわち $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の極大可換部分群が $H = H_{(4)}$ のときを考える．$Z_{(4)} \subset \mathrm{Mat}_{2,4}(\mathbb{C})$ の部分集合

$$Z' = \left\{ z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid t \neq 0, \infty \right\}$$

をとる．Z' は $\mathbb{P}^1$ の点の配置空間の類似である $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\backslash Z_{(4)}/H_{(4)}$ の一つの実現である．写像 $\Phi:\mathbb{P}^1\times Z'\to\mathbb{P}^3$ を (18) のように定義すると，具体的には $(x,z)\mapsto(1:x:t:0)$ となる．この写像によって $\mathbb{P}^3$ 上の平坦接続

$$\nabla = d - (A_0 d\log\zeta_0 + A_1 d\theta_1 + A_2 d\theta_2 + A_3 d\theta_3)\wedge$$

を $\mathbb{P}^1 \times Z'$ に引き戻して得られる $\Phi^*\nabla$ の接続行列は

$$\theta_1 = \frac{\zeta_1}{\zeta_0},$$
$$\theta_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right)^2,$$
$$\theta_3 = \frac{\zeta_3}{\zeta_0} - \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right)\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right)^3$$

に注意すれば，local に

$$\Phi^*\omega = A_1 dx + A_2(dt - xdx) + A_3(-d(xt) + x^2 dx)$$

で与えられる．この接続の平坦性条件 $\Phi^*\nabla^2 = 0$ は，連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \left(A_1 - xA_2 + (-t + x^2)A_3\right) y, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = (A_2 - xA_3)y \end{cases}$$

の両立条件と同じものである． 具体的には

$$\frac{dA_1}{dt} = [A_2, A_1 - tA_3],$$
$$\frac{dA_2}{dt} = [A_3, A_1],$$
$$\frac{dA_3}{dt} = 0.$$

を得る。これは P_2 と同値な方程式であることが知られている．

4 一般 Schlesinger 系の合流

合流の操作を前節までに述べた一般化された Schlesinger 系の立場から述べる．Schlesinger 系は，群 H_λ あるいはその Lie 環 $\mathfrak{h}_\lambda$ によって記述されているわけであるから，その Lie 環の “合流” を考える． そのために， H_λ あるいは $\mathfrak{h}_\lambda$ がどのように特徴づけられていたかを思い出す．

$G = \mathrm{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ とおき $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}_{N+1}(\mathbb{C})$ をその Lie 環とする． G は $\mathfrak{g}$ に随伴作用によって作用する．この作用による $X \in \mathfrak{g}$ の軌道を $O(X)$ とする．

Definition. $X \in \mathfrak{g}$ が正則元とは $\dim O(X)$ が最大になること． $\mathfrak{g}_{reg}$ で正則元全体の集合を表わす．

次のことが知られている.

- $A \in \mathfrak{g}_{reg} \Leftrightarrow A$ の Jordan 標準形の Jordan 細胞は すべて異なる固有値を持つ.
- $A \sim A' = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_\ell$,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_k \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n_k}(\mathbb{C})$$

とすると, A' と可換な元全体は $\mathfrak{h}_\lambda$ となる. 従って $\dim O(A) = \dim \mathfrak{g} - (N+1)$.
- Jordan 標準形が分割 $\lambda = (n_1, \ldots, n_\ell)$ で指定される正則元全体を $\mathfrak{g}_\lambda$ とすると

$$\mathfrak{g}_{reg} = \bigcup_{\lambda:\ N+1\ \text{の分割}} \mathfrak{g}_\lambda, \quad \dim \mathfrak{g}_\lambda = \dim \mathfrak{g} - (N+1) + \ell(\lambda).$$

- 上の分解は正則元全体の集合に入る stratification である.

上記の stratification は次のように記述される

- λ, μ を $N+1$ の分割 (Yang diagram) とする. μ が λ に隣接するとは, μ が λ に含まれる 2 つの parts を合わせて 1 つの parts にすることによって得られるときをいう. $\lambda \to \mu$ と表わ す.
- μ が λ から出発して隣接する Yang diagram たちの鎖でつながれているとき, すなわち Yang diagram の列 $\lambda = \lambda_1 \to \lambda_2 \to \cdots \to \lambda_{p-1} \to \lambda_p = \mu$ あるとき, λ と μ の関係を $\mu < \lambda$ と表わ す.

Remark. 各 stratum の隣接の様子は以下のようになっている.

$$\overline{\mathfrak{g}_\lambda} = \bigcup_{\mu \le \lambda} \mathfrak{g}_\mu.$$

さて, Yang diagram λ が与えられたときに命題 5 に述べ た接続

$$\nabla_\lambda = d - \omega_\lambda \wedge, \quad \omega_\lambda = \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_k - 1} \tilde{A}_j^{(k)}(z) d\theta_j(\vec{\zeta} z) \right)$$

を考える. 我々の目標は μ が λ に隣接しているときに 合流 $\nabla_\lambda \to \nabla_\mu$ を構成することである.

4.1 正則元の合流

一般超幾何関数の場合にやったように，$\lambda \to \mu$ のとき stratum $\mathfrak{g}_\lambda$ の閉包に $\mathfrak{g}_\mu$ が含まれることを具体的に実現する．つまり，$A \in \mathfrak{g}_\mu$ に対して $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に正則に依存する $A(\varepsilon) \in \mathfrak{g}_\lambda$ で $\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = A$ であるものを構成する．このプロセスを簡単な場合に説明しよう．

Example. $\lambda = (1,1)$，$\mu = (2)$ の場合を考える．

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\mu$ をとる．このとき $A(\varepsilon) \in \mathfrak{g}_\lambda$ を次のようにつくる．$g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \varepsilon \end{pmatrix}$ とおく．$\varepsilon \neq 0$ であれば，$g(\varepsilon) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ である．このとき A の主対角列の成分 a とその上の対角列の成分 1 を並べてベクトル $(a,1)$ を作り，

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix} \to (a,1) \to (a,1)g(\varepsilon) = (a, a+\varepsilon) \to$$
$$\begin{pmatrix} a & \\ & a+\varepsilon \end{pmatrix} \to A(\varepsilon) = g(\varepsilon)\begin{pmatrix} a & \\ & a+\varepsilon \end{pmatrix} g(\varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ & a+\varepsilon \end{pmatrix}$$

のように $A(\varepsilon)$ をつくる．明らかに $A(\varepsilon) \in \mathfrak{g}_\lambda$ $(\varepsilon \neq 0)$ であり，$\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = A$ が成り立つ．

$\lambda = (p,q)$，$\mu = (p+q)$ **の場合の構成：**　$N+1$ の分割が $\lambda = (p,q)$，$\mu = (p+q)$ の場合を考えれば，一般の場合の構成も本質的にできたことになる．

1. $g(\varepsilon)$ を次で定義．

$$g(\varepsilon) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \binom{0}{0} & \cdots & \binom{0}{q-1}\varepsilon^{-q+1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \binom{p-1}{0}\varepsilon^{p-1} & \cdots & \binom{p-1}{q-1}\varepsilon^{p-q} \\ \hline & & & \binom{p}{0}\varepsilon^{p} & \cdots & \binom{p-1}{q-1}\varepsilon^{p-q+1} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \binom{p+q-1}{0}\varepsilon^{p+q-1} & \cdots & \binom{p+q-1}{q-1}\varepsilon^{p} \end{array}\right)$$

このとき $\det g(\varepsilon) = \varepsilon^{pq}$ が確かめられる．したがって $\varepsilon \neq 0$ であれば $g(\varepsilon)$ は正則行列である．

2. 正則元

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\mu$$

に対して

$$(a,1,0,\dots,0)g(\varepsilon) = (\overbrace{a,1,0,\dots,0}^{p},\overbrace{a+\varepsilon,1,0,\dots,0}^{q})$$

であることに注意して

$$A(\varepsilon) = g(\varepsilon)\begin{pmatrix} a & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & a & & & & \\ & & & & a+\varepsilon & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & a+\varepsilon \end{pmatrix} g(\varepsilon)^{-1}$$

とおく．明らかに $\varepsilon \neq 0$ のとき $A(\varepsilon) \in \mathfrak{g}_\lambda$ である．

3. $\lim_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon) = A \quad (\varepsilon \to 0)$ を示すことができる．

Remark. 上に述べた操作は同時に極大可換部分群に対する "合流" を引き起こすことが分かっている．

4.2 接続 ∇_λ の合流

前節と同様に $N+1$ の分割が $\lambda = (p,q)$，$\mu = (p+q)$ の場合を考える．以下，構成的に考えるので，少し違和感があるが，あとでその部分はコメントする．

1. 行き先の接続 $\nabla_\mu = d - \omega_\mu$ の接続形式 ω_μ は

$$\omega_\mu = \sum_{j=0}^{N} B_j(w)d\theta(\vec{x}w), \quad w \in Z_\mu$$

の形をしているはずである．

2. \item $w \in Z_\mu$ に対して $z = z(\varepsilon)$ および $A = A(\varepsilon)$ と B との関係 を

$$\begin{aligned} z(\varepsilon) &= wg(\varepsilon) = (z^{(1)}(\varepsilon), z^{(2)}(\varepsilon)) \in Z_\lambda \\ A(\varepsilon) &= (A_0^{(1)}(\varepsilon), \ldots, A_{p-1}^{(1)}(\varepsilon), A_0^{(2)}(\varepsilon), \ldots, A_{q-1}^{(2)}(\varepsilon)) \\ &= (B_0, \ldots, B_N)^t g(\varepsilon)^{-1} \otimes I_r \end{aligned}$$

で定める.

3. 接続形式 $\omega_\lambda(\varepsilon)$ は

$$\omega_\lambda(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{p-1} A_j^{(1)}(\varepsilon) d\theta(\zeta z^{(1)}(\varepsilon)) + \sum_{j=0}^{q-1} A_j^{(2)}(\varepsilon) d\theta(\zeta z^{(2)}(\varepsilon))$$

で定義される.

逆にいえば, 接続 ∇_λ が与えられたとき, 上で定義されるような置き換 え

$$A_j^{(1)} = A_j^{(1)}(\varepsilon), \quad z = z(\varepsilon)$$

を行うのである.

Theorem 6. 次が成り立つ.

$$\omega_\lambda(\varepsilon) = \omega_\mu + O(\varepsilon).$$

従って

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega_\lambda(\varepsilon) = \omega_\mu.$$

References

[1] K. Aomoto: Les équation aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **22**, (1975), 271–297

[2] .I.M.Gelfand, General theory of hypergeometric functions. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **288** (1986) 14–18, English translation: Soviet Math. Dokl. **33** (1986) 9–13.

[3] I. M. Gelfand, V. S. Retahk, and V. V. Serganova: Generalized Airy funcitons, Schublrt cells, and Jordan groups. Dokl. Akad. Nauk. SSSR , **298** (1988) 17–21. English transl.: Soviet Math. Dokl. **37** (1988) 8–12.

[4] H. Kimura, General Schlesinger systems and their hypergeometric type solutions, Surikasekikenkyujo Kokyuroku,**1662** (2009)218–230.

[5] H. Kimura, Y. Haraoka and K. Takano: The generalized confluent hypergeometric functions. Proc. Japan Acad. **68** (1992) 290–295.

[6] H. Kimura, T. Koitabashi, Normalizer of maximal abelian subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ and general hypergeometric functions. Kumamoto J. Math. **9**, (2006),13–43.

[7] L.J.Mason, N.M.J. Woodhouse, Twistor theory and the Schlesinger equations, Applications of analytic and geometric methods to nonlinear differential equations (Exeter, 1992), 17–25, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 413, Kluwer Acad. Publ., Doldrecht, 1993.

[8] L.J.Mason, N.M.J. Woodhouse; Selfduality and Painlevé transcendents, Nonlinearity **6**, 1993.

[9] Y. Ohyama, Isomonodromy deformations and twistor theory, Contemporary Math. **309**, (2002), 185–193.

[10] 岡本和夫，パンルベ方程式，東大出版会，(2008).

[11] N. Tseveene, The general Schlesinger systems from the twistor theoretic point of view, Master thesis of Graduate school of Scinence and Technology, Kumamoto University (2005).

[12] R.S.Ward and R.O.Wells, Twistor geometry and field theory, Cambridge University Press (1990).