

# 4 次元 Painlevé 型方程式の退化図式

川上拓志, 中村あかね, 坂井秀隆  
東京大学大学院数理科学研究科

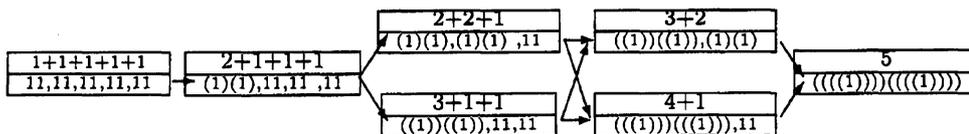
## 概要

アクセサリ・パラメーターを 4 つ持つ既約な Fuchs 型方程式の分類に基づき, 4 つの変形方程式が 4 次元 Painlevé 型方程式として得られている. 4 つとは, 2 変数 Garnier 系, 藤-鈴木系, 笹野系, 行列 Painlevé 系 (VI 型) である. ここでは, これら 4 つの方程式系の退化図式を求める.

## 1 退化図式

記号などの説明はあとまわしにして, 本稿の結論である退化図式を最初にあげておこう. 4 次元の Painlevé 型方程式においては, Fuchs 型方程式の変形理論からくる, いわば親玉の方程式が 4 つあるので ([5]), それぞれの退化を考えることになる.

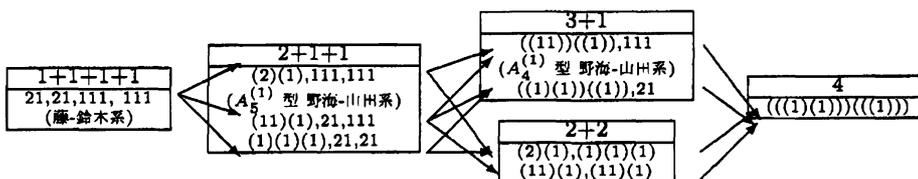
まず最初は, よく知られた 2 変数 Garnier 系の退化である.



図式に現れる記号は, 対応する線型方程式を表している. 上の欄は特異点の合流を表すもので, 各数字はそれぞれの特異点における Poincaré rank に 1 を足した数である. 確定特異点であれば 1 になる. 下の欄は, より細かい, われわれの記号による分類で, スペクトル型を表すものだが, 説明は次節以降で行う.

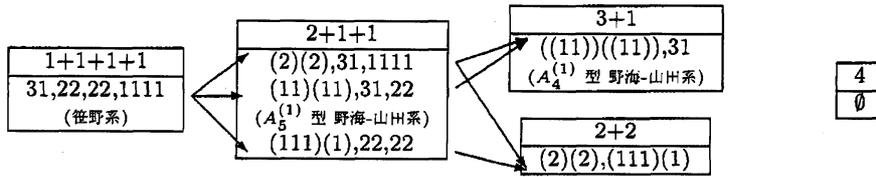
Garnier 系は古典的に知られた方程式系で, この退化図式に対応するものがすでに木村弘信氏によって得られている ([2]).

次は藤-鈴木系から得られる方程式系の退化図式である.



藤-鈴木系は Drinfeld-Sokolov 階層の相似簡約から得られていた ([1])<sup>1</sup>.

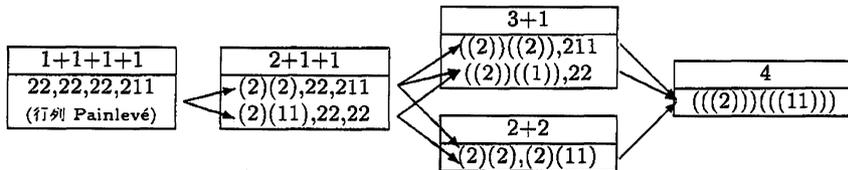
三つめは笹野系から得られる方程式系の退化図式である.



最後の欄が意味しているのは、この場合特異点が一点のみになるような合流がないことを言っている. 一般に、スペクトル型における分割で一方が他方の細分とならないような特異点同士は、アクセサリパラメーターの数を変えずに合流させることはできない.

笹野系は初期値空間の一般化から得られていた ([6]).

最後は、行列 Painlevé 方程式とわれわれが呼んでいるものの退化図式である. おそらく、これだけが今まで知られていなかった新しいものであろう.



異なる方程式から退化によって同じ方程式が得られることもある. たとえば、藤-鈴木系の  $2+1+1$  の退化で得られる  $(2)(1), 111, 111$  から、笹野系の  $2+1+1$  の退化で得られる  $(11)(11), 22, 31$  から、 $A_5^{(1)}$  型野海-山田系が得られる. 対応する線型方程式は Laplace 変換によりうつり合う.

また、これらの図式は、じつは完全なものではない. というのも、現れる線型方程式に関して不分岐という仮定をおいているからである. 線型方程式の形式解に Puiseux 級数を必要とするような方程式の変形理論に対応するものがさらに付け加わるはずで、たとえば 2次元の場合だと第 1 Painlevé 方程式などがそうであるが、これらを補うのは今後の課題である.

それでは、以下、詳しい説明を行っていこう.

<sup>1</sup>津田照久氏は藤-鈴木の結果以前に、UC 階層の簡約から、 $21, 21, 111, 111$  を含むより広いクラスのモノドロミー保存変形方程式を計算していた. 彼の方程式は Hamilton 系で書かれていなかったが、[5] での計算を通じて、藤-鈴木 coupled PVI と同等のものを含んでいることもわかった. 津田氏はその後、より広いクラスの方程式の Hamilton 表示を与えている. 本稿では、coupled PVI の表示を与えた最初の研究から藤-鈴木系と呼んでいる.

## 2 Riemann 図式とスペクトル型

Fuchs 型方程式について、各特異点の特性指数を並べた表を Riemann 図式と呼んだ。例えば、次のような Fuchs 型方程式系

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} \right) Y$$

を考える。ここで  $A_0, A_1$  は  $2 \times 2$  行列としよう。この方程式は  $x = 0, 1, \infty$  に特異点を持つ。各特異点での留数行列の固有値が特性指数である。今  $A_0$  の固有値を  $\theta_1^0, \theta_2^0$ ,  $A_1$  の固有値を  $\theta_1^1, \theta_2^1$  とする。また、無限遠での留数行列  $-A_0 - A_1$  の固有値を  $\theta_1^\infty, \theta_2^\infty$  とする。このとき、この方程式の Riemann 図式を

$$\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=\infty \\ \theta_1^0 & \theta_1^1 & \theta_1^\infty \\ \theta_2^0 & \theta_2^1 & \theta_2^\infty \end{pmatrix}$$

とかくのだった。また、特性指数の具体的な値に興味がないときには、これを各特異点での特性指数の重複度を整数の分割で表して 11,11,11 と書ける。このような表記をスペクトル型という。

より一般に不確定特異点を持つ線型常微分方程式系、すなわち有理関数係数の行列  $A(x)$  に対する

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

という方程式についても、Riemann 図式を各特異点のまわりでの形式的標準形を並べてできる表と定めることができ、その情報をスペクトル型として表すことができる。

まずスペクトル型を定義する。 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  を自然数  $n$  の分割とする。すなわち、 $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = \mu_1 + \dots + \mu_m = n$  である。ただし大きい順、あるいは小さい順に並んでいるとは限らないとする。 $\lambda$  の添字集合が、 $\{1, 2, \dots, l\} = I_1 \amalg \dots \amalg I_m$  のように直和分解されていて、 $\mu_k = \sum_{j \in I_k} \lambda_j$  が成り立つとき、 $\lambda$  が  $\mu$  の細分であるという。

例 1.  $(2, 1, 2, 1)$  は  $(3, 2, 1)$  の細分。 $(2, 1, 1, 1, 1, 1)$  は  $(3, 3, 1)$  の細分。

$[p_0, \dots, p_r]$  を自然数  $m$  の分割の  $r+1$  個の組とする。各  $i$  ( $i = 0, \dots, r-1$ ) に対し、 $p_{i+1}$  が  $p_i$  の細分であるとき、 $[p_0, \dots, p_r]$  を分割の細分列と呼ぶ。これを表す便利な方法を介绍する。例として次のような細分列  $[(6, 4, 2), (4, 2, 4, 1, 1), (2, 2, 2, 3, 1, 1, 1)]$  を見てみよう。まず一番右の分割を書く：

$$2223111$$

次に中央の分割においてまとめられる数字を括弧でくくる：

$$(22)(2)(31)(1)(1)$$

最後に一番左の分割にまとめられるもの同士をさらに括弧でくくる：

$$((22)(2))((31))((1)(1))$$

このようにして  $[(6,4,2), (4,2,4,1,1), (2,2,2,3,1,1,1)]$  は  $((22)(2))((31))((1)(1))$  と表される。

以下、各特異点における形式的標準形の計算法について簡単に述べ、それを分割の細分列で表す方法を説明する。今、方程式の係数行列  $A(x)$  が原点を特異点に持つとし、そのまわりで

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{A_0}{x^{r+1}} + \frac{A_1}{x^r} + \cdots \right) Y \quad (2.1)$$

のように展開されているものとする。  $A_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) は  $m \times m$  行列、ゲージを適当に選んで  $A_0$  は対角化されているとし、  $A_0$  の固有値を  $t_1^0, \dots, t_m^0$  とする。  $r = 0$  の時は確定特異点であるので  $r > 0$  としよう。今、

$$t_i^0 \neq t_j^0 \quad (1 \leq i \leq l, l+1 \leq j \leq m)$$

となっているとすると、形式的冪級数によるゲージ変換

$$Y = P(x)Z, \quad P(x) = I + P_1x + P_2x^2 + \cdots$$

によって、

$$\frac{dZ}{dx} = \left( \frac{B_0}{x^{r+1}} + \frac{B_1}{x^r} + \cdots \right) Z$$

ただし

$$B_i = \begin{pmatrix} B_{11}^i & O \\ O & B_{22}^i \end{pmatrix}, \quad B_{11}^i \in M_l(\mathbb{C}), \quad B_{22}^i \in M_{m-l}(\mathbb{C})$$

とできることが知られている。これを繰り返し用いることにより、方程式 (2.1) は形式的には leading term にただ一つの固有値をもつ方程式の直和に分解する（ブロック対角化）。もしあるブロックの leading term が対角化可能だった場合（すなわちスカラー行列）、その部分はスカラー関数によるゲージ変換により 0 にすることができるので、より低階の方程式に帰着する。対角化不可能な場合はシェアリング変換が必要であり、このとき、  $P(x)$  は  $x$  の Puiseux 級数になる。このような場合を分岐、シェアリングが必要ない場合、不分岐ということにする。本稿では、不分岐の場合のみ考える。

この仮定の下で、方程式 (2.1) は

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{T_0}{x^{r+1}} + \frac{T_1}{x^r} + \cdots + \frac{T_r}{x} + \cdots \right) Y$$

に変換される。ここで  $T_j$  たちは対角行列であり、  $T_0 = A_0$  である。この方程式は単独方程式の直和なので、さらに適当な対角行列でゲージ変換することにより、

主要部以外の項を消すことができる。従って、方程式(2.1)は、形式的冪級数によるゲージ変換により次のような標準形に帰着されることがわかった：

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{T_0}{x^{r+1}} + \frac{T_1}{x^r} + \cdots + \frac{T_r}{x} \right) Y.$$

$T_i$  たちの対角成分を  $t_j^i$  ( $j = 1, \dots, m$ ) と書けば、この原点のまわりの標準形を

$$\overbrace{\begin{array}{cccc} & x = 0 & & \\ t_1^0 & t_1^1 & \cdots & t_1^r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_m^0 & t_m^1 & \cdots & t_m^r \end{array}}$$

と表すことができる。各特異点でこのような形式的標準形を求め、それを全て並べた表を Riemann 関式と呼ぶのである。実際は、 $P(x)$  の構成法からわかる通り、左端の列が同じ値どうしで ( $t_i^0 = t_j^0$  となるものどうし) グループをつくり、次の列ではそれらに対応するグループがさらにいくつかのグループにわかれ、という風に入れ子構造になる。

例 2. 次のような方程式を考える：

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} \right) Y.$$

ここで、係数行列は

$$A_0 = \text{diag}(a, a, b) \quad (a \neq b), \quad A_2 \sim -\text{diag}(\theta_1^\infty, \theta_2^\infty, \theta_3^\infty)$$

を満たしているとする。 $A_1$  については、後で触れる。この方程式は原点を不確定特異点、無限遠点を確定特異点に持つ。

$Y = P(x)Z$  (但し  $P(x) = I + P_1x + P_2x^2 + \cdots$ ) とゲージ変換

$$P(x)^{-1} \left( \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} \right) P(x) - P(x)^{-1} P'(x)$$

したものを

$$\frac{B_0}{x^3} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x} + \cdots$$

とおく。 $x$  の各冪を比較すると

$$x^{-3} : B_0 = A_0,$$

$$x^{-2} : B_1 = A_1 + [A_0, P_1],$$

$$x^{-1} : B_2 = A_2 + [A_1, P_1] - P_1[A_0, P_1] + [A_0, P_2]$$

となる.  $A_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} P_{11}^1 & P_{12}^1 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 \end{pmatrix}$  と  $A_0$  に合わせて区分けすると,  
 $x^{-2}$  の係数行列は

$$B_1 = A_1 + [A_0, P_1] = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 + (a-b)P_{12}^1 \\ A_{21}^1 + (b-a)P_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}$$

となり,

$$P_{12}^1 = \frac{A_{12}^1}{b-a}, \quad P_{21}^1 = \frac{A_{21}^1}{a-b}$$

とおくと,  $B_1$  はブロック対角型になる.

同様にして  $x^{-1}$  の係数  $B_2$  もブロック対角型にできる:

$$\frac{\begin{pmatrix} aI_2 & O \\ O & b \end{pmatrix}}{x^3} + \frac{\begin{pmatrix} A_{11}^1 & O \\ O & A_{22}^1 \end{pmatrix}}{x^2} + \frac{\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^2 & O \\ O & \tilde{A}_{22}^2 \end{pmatrix}}{x} \dots$$

今, 仮に  $A_{11}^1 \sim \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  とすると, 以下同様にして

$$\frac{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}}{x^3} + \frac{\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}}{x^2} + \frac{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}}{x} \dots$$

のようになる. ... の部分をゲージで消してしまえば, 標準形が求まる.

この場合, 原点まわりの標準形を

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{x=0} & \\ a & c & f \\ a & d & g \\ b & e & h \end{array}$$

と表す. これに分割の列  $[(2,1), (1,1,1), (1,1,1)]$  を対応させるのは自然だろう. これを特異点  $x=0$  のスペクトル型と呼ぶ. 既に説明した表記法に従えば,  $((1)(1))(1)$  となる. Riemann 図式は ( $x=\infty$  は確定特異点なので特性指数を並べて)

$$\left( \begin{array}{cc} \overbrace{x=0} & x=\infty \\ a & c & f & \theta_1^\infty \\ a & d & g & \theta_2^\infty \\ b & e & h & \theta_3^\infty \end{array} \right)$$

となり、各特異点におけるスペクトル型を並べてこれを  $((1)(1))((1)), 111$  と表す。これを方程式のスペクトル型と呼ぶ。

また、 $A_{11}^1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$  (スカラー行列) とすると、 $\bar{A}_{11}^2$  の固有値を  $e, f$  として、Riemann 図式は

$$\left( \begin{array}{cc|cc} x=0 & x=\infty & & \\ \hline a & c & e & \theta_1^\infty \\ a & c & f & \theta_2^\infty \\ b & d & g & \theta_3^\infty \end{array} \right)$$

となる。従ってこの場合、方程式のスペクトル型は  $((11))((1)), 111$  である。

上で  $A_0$  や  $A_{11}^1$  が対角化不可能とすると、シェアリングが必要になるが (すなわち分岐するが)、上に述べた注意により、今回はそのような場合は考えない。

### 3 特異点の合流

線型常微分方程式に対して、特異点の合流という操作がある。合流とは、相異なる特異点を近づけていく極限でより特異性が高い特異点が生じる現象のことである。例えば、よく知られた例を挙げると、Gauss の超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

において、 $x = \varepsilon\xi$ ,  $\beta = \varepsilon^{-1}$  として両辺を  $\varepsilon$  倍すると

$$\xi(1-\varepsilon\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + \{\gamma - (\alpha\varepsilon + 1 + \varepsilon)\xi\}\frac{dy}{d\xi} - \alpha y = 0$$

となり、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると、Kummer の合流型超幾何微分方程式

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2} + (\gamma - \xi)\frac{dy}{d\xi} - \alpha y = 0$$

を得る。この例では、確定特異点  $x=1$  を  $\xi = \varepsilon^{-1}$  に移して、 $\xi = \infty$  に合流させ、結果として Poincaré rank 1 の不確定特異点が生まれた。Kummer の方程式は原点と無限遠点に特異点を持つが、この2つの点を合流させることで Hermite-Weber の方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 2\alpha y = 0$$

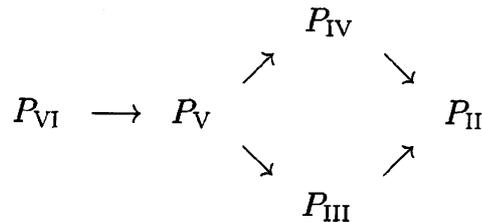
が得られることもわかる。Gauss の超幾何方程式から出発して、特異点を合流させていくことでこれらの古典的な特殊関数が得られる様子を次のような図で表す：

$$\text{Gauss} \longrightarrow \text{Kummer} \longrightarrow \text{Hermite-Weber}$$

ここで矢印は一方の方程式がもう一方に合流操作で移ることを表している。このような図式を退化図式という。退化とは、ある方程式がパラメータの極限操作で別の方程式に移る現象のことを言い、その1つの例として、特異点の合流がある。

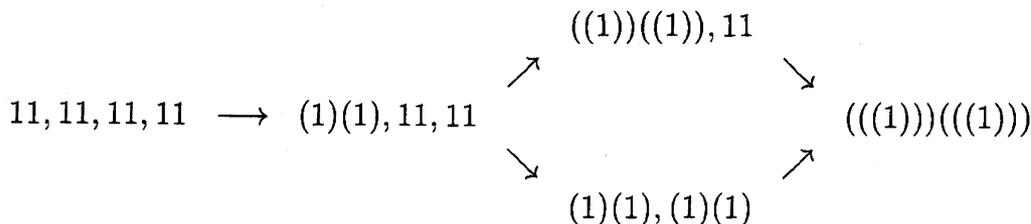
ここで、まず元祖 Painlevé 方程式とその退化について復習しておきたい。

Painlevé 性を持つ2階の代数的常微分方程式を分類することにより Painlevé 方程式を見出したのは Painlevé と Gambier であるが、Painlevé はまた、 $P_{VI}$  から出発してそれを次々と退化させることにより、 $P_I$  から  $P_V$  が得られることも指摘していた。Painlevé 方程式の退化図式は



となっている<sup>2</sup>。

ほぼ同時期に R.Fuchs はある2階 Fuchs 型方程式のモノドロミー保存変形が Painlevé VI 型方程式によって記述されることを発見した。さらに、Garnier はその Fuchs 型方程式の特異点の合流を考え、その他の Painlevé 方程式も (Fuchs 型ではない) 線型方程式の変形問題を記述する方程式であることを示している。線型方程式の特異点の合流の図式は以下の通りである。



ここで、先ほど説明したスペクトル型の記号を使った。 $P_I$  に付随する線型方程式が不分岐の仮定を満たさないので  $P_I$  に関する部分は省略した<sup>3</sup>。

**例 3.** 線型方程式の合流と Painlevé 方程式の退化の関係を以下の具体例で見ておこう。

$P_{VI}$  の Hamiltonian は

$$\begin{aligned}
 & t(t-1)H_{VI} \\
 & = q(q-1)(q-t)p^2 \\
 & \quad + \{\theta^0 q(q-1) + (\theta_1^\infty - \theta_2^\infty)q(q-t) + \theta^t(q-1)(q-t)\}p + \theta_2^\infty(\theta_2^\infty + \theta^1)q
 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>ここであらわれる  $P_{III}$  は正確にはパラメーターが特殊な場合を含んでおらず、 $P_{III}(D_6)$  と書かれるべきものである。 $P_{III}$  のうち残りの  $P_{III}(D_7)$ ,  $P_{III}(D_8)$ , さらには  $P_I$  についても、それを図式に含めるためには、分岐する場合を考える必要がある。

<sup>3</sup>分岐する場合を考えると、パラメーターが特別な3型方程式、 $P_{III}(D_7)$  や  $P_{III}(D_8)$  も現れるなどして、より大きな図式が必要となる。

で与えられる。次のような変数変換を考える：

$$\begin{aligned}\theta^0 &= \tilde{\theta}^0, \quad \theta^1 = \tilde{\theta}^1 + \eta\varepsilon^{-1}, \quad \theta^t = -\eta\varepsilon^{-1}, \quad \theta_1^\infty = \tilde{\theta}_1^\infty, \quad \theta_2^\infty = \tilde{\theta}_2^\infty, \\ t &= 1 + \varepsilon\tilde{t}, \quad q = 1 - \eta^{-1}\varepsilon\tilde{p}, \quad p = \eta\varepsilon^{-1}\tilde{q}, \quad H_{\text{VI}} = \varepsilon^{-1}\tilde{H}.\end{aligned}$$

この変換は正準変換である。すなわち次の関係式

$$dp \wedge dq - dH_{\text{VI}} \wedge dt = d\tilde{p} \wedge d\tilde{q} - d\tilde{H} \wedge d\tilde{t}$$

を満たす。ここで  $\tilde{H}$  は

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{1}{(1 + \varepsilon\tilde{t})\tilde{t}} \left[ (1 - \eta^{-1}\varepsilon\tilde{p})\tilde{p}(\tilde{p} + \eta\tilde{t})\tilde{q}^2 \right. \\ &\quad + \{ -\tilde{\theta}^0(1 - \eta^{-1}\varepsilon\tilde{p})\tilde{p} - (\tilde{\theta}_1^\infty - \tilde{\theta}_2^\infty)(1 - \eta^{-1}\varepsilon\tilde{p})(\tilde{p} + \eta\tilde{t}) - \tilde{p}(\tilde{p} + \eta\tilde{t}) \} \tilde{q} \\ &\quad \left. - \tilde{\theta}_2^\infty \{ \tilde{p} + (\tilde{\theta}_2^\infty + \tilde{\theta}^1)\eta^{-1}\varepsilon\tilde{p} \} + \tilde{\theta}_2^\infty(\tilde{\theta}_2^\infty + \tilde{\theta}^1 + \eta\varepsilon^{-1}) \right].\end{aligned}$$

$\tilde{H}$  の中で  $\varepsilon$  の負冪を含む項は最後の項のみであるが、この項は  $\tilde{p}, \tilde{q}$  によらないので方程式には影響を及ぼさない。従ってこの項は無視してよく、その上で  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を考えれば  $P_V$  の Hamiltonian

$$\begin{aligned}H_V &= \frac{1}{t} [p(p + \eta t)q(q - 1) \\ &\quad - (\theta_1^\infty - \theta_2^\infty + \theta^0)pq - \theta_2^\infty p - (\theta_1^\infty - \theta_2^\infty)\eta tq]\end{aligned}$$

を得る（ $\sim$ は省略した）。これが Painlevé 方程式の退化の例である。

次に、上のような正準変換を線型方程式を用いて見つける方法を説明する。 $P_{\text{VI}}$  に付随する線型方程式のスペクトル型は 11, 11, 11, 11 だったので、Riemann 図式を

$$\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & \theta_1^\infty \\ \theta^0 & \theta^1 & \theta^t & \theta_2^\infty \end{pmatrix}$$

とおく。方程式は

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-t} \right) Y \quad (3.1)$$

である。

$P_V$  に付随する線型方程式のスペクトル型は (1)(1), 11, 11 なので Riemann 図式は

$$\begin{pmatrix} x=0 & \overbrace{x=1} & x=\infty \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^\infty \\ \tilde{\theta}^0 & -\eta\tilde{t} & \tilde{\theta}^1 & \tilde{\theta}_2^\infty \end{pmatrix}$$

とおき，方程式は

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{\tilde{A}_0}{x} + \frac{\tilde{A}_1^0}{x-1} + \frac{\tilde{A}_1^1}{(x-1)^2} \right) Y \quad (3.2)$$

で与えられる．今，方程式(3.1)の特異点  $t$  が 1 に合流した結果(3.2)が得られたとして，それぞれの Riemann 関式のデータ同士の関係を見たい．まず  $t = 1 + \varepsilon \tilde{t}$  とおいて， $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を考える．

(3.1)の  $x = 1$  と  $x = t$  の部分に着目し，

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-t} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-1-\varepsilon\tilde{t}} \\ &= \frac{A_1 + A_t}{x-1} + \frac{\varepsilon\tilde{t}A_t}{(x-1)(x-1-\varepsilon\tilde{t})}. \end{aligned}$$

と変形する．(3.2)の  $\frac{\tilde{A}_1^0}{x-1} + \frac{\tilde{A}_1^1}{(x-1)^2}$  を上の項の極限と見做すと，トレースを比べて

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \tilde{t} \theta^t = -\eta \tilde{t}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\theta^1 + \theta^t) = \tilde{\theta}^1$$

を得る．そこで

$$\varepsilon \tilde{t} \theta^t = -\eta \tilde{t}, \quad \theta^1 + \theta^t = \tilde{\theta}^1$$

とおいてしまおう．これより

$$\theta^t = -\eta \varepsilon^{-1}, \quad \theta^1 = \tilde{\theta}^1 + \eta \varepsilon^{-1}$$

を得る． $x = 0$  と  $x = \infty$  の特性指数は， $t$  が 1 に近づいて行く間変化しないと考えるのが自然なので

$$\theta^0 = \tilde{\theta}^0, \quad \theta_1^\infty = \tilde{\theta}_1^\infty, \quad \theta_2^\infty = \tilde{\theta}_2^\infty$$

としてよい．

このように，付随する線型方程式を利用することによって，Riemann 関式に現れるパラメータにどのように  $\varepsilon$  を導入すればよいかわかる．しかし正準変数である  $p, q$  に関しては，Hamiltonian の式を見て極限がとれるように目の子で入れるしかない．

以上，線型方程式の特異点の合流が，Painlevé 方程式の退化を引き起こす様子を見た．このことは Painlevé 方程式に限らず，一般の線型方程式とその変形方程式の間に成り立つと考えられる．

## 4 変形理論と 4 次元 Painlevé 型方程式

実は，Painlevé 方程式以外の知られている Painlevé 型方程式も，多くがソリトン方程式の簡約としても得られており，それによって Lax pair を持つことがわか

る。つまり Painlevé 型方程式は一般に何らかの線型方程式の変形を記述する方程式であり、言い換えると背後に線型方程式がある。従って Painlevé 型方程式という非線型方程式を線型方程式でラベル付けして分類できるのではないかという期待が生まれる。

Painlevé 方程式は相空間が 2 次元の Hamilton 系である。Painlevé VI 型方程式は、先程述べたようにある Fuchs 型方程式のモノドロミー保存変形から得られるが、この Fuchs 型方程式はアクセサリーパラメータを 2 つ持つ。アクセサリーパラメータが変形方程式の従属変数となり、従って相空間が 2 次元なのである。アクセサリーパラメータを 2 つ持つ Fuchs 型方程式は分類されており、以下の通りである：

**定理 4** (Kostov[3]). アクセサリーパラメーターが 2 つある既約フックス型方程式は、アディクションとミドルコンヴォリューションを有限回繰り返して、次の 4 種類のスペクトルタイプの方程式のいずれかに帰着できる：

11,11,11,11  
111,111,111    22,1111,1111    33,222,111111.

ミドルコンヴォリューションとアディクションの説明は省略させていただくが、線型方程式のある変換である。

この分類によると、特異点を 3 点持つ方程式が 3 つ存在するが、これらは連続的な変形としては自明なものしか持たない。従って変形する意味のある方程式は 11,11,11,11 のみであるが、これは上で紹介した Painlevé VI 型方程式に付随する線型方程式である。そして、他の Painlevé 方程式は全て VI 型方程式の退化により得られるのだ<sup>4</sup>。

この様な描像がアクセサリーパラメータが増えても、つまり変形方程式の相空間の次元が高くなっても成り立っているとするならば、一般に、アクセサリーパラメータの数を与えたとき、それを実現する Fuchs 型方程式がどれくらいあるかというのが重要な問題として浮かび上がる。特に我々は今、相空間が 4 次元の Painlevé 型方程式の統一的な理解を目指しているので、アクセサリーパラメータを 4 つ持つ Fuchs 型方程式の分類に興味がある。

この分類は大島によりなされた。その結果は以下の通りである：

**定理 5** (大島 [4]). アクセサリーパラメーターが 4 つある既約フックス型方程式は、アディクションとミドルコンヴォリューションを有限回繰り返して、次の 13 種類のスペクトルタイプの方程式のいずれかに帰着できる：

11,11,11,11,11  
21,21,111,111    31,22,22,1111    22,22,22,211  
211,1111,1111    221,221,11111    32,11111,11111    222,222,2211

<sup>4</sup>Painlevé VI 型方程式はこの Fuchs 型方程式以外の線型方程式の変形理論からも導出することができる。しかし Fuchs 型方程式の変形理論から得られる 2 次元の Painlevé 型方程式は Painlevé VI 型方程式のみであるということは言えるだろう。

33,2211,111111 44,2222,22211 44,332,11111111 55,3331,22222  
66,444,2222211.

これにより4次元 Painlevé型方程式の退化図式のスターティングポイントが与えられたことになる. 11,11,11,11,11 方程式は変形を2次元持ち, このモノドロミー保存変形は2変数 Garnier系によって記述される. この方程式の退化図式は木村によって求められている. 1次元の変形を持つ方程式は3つあるが, これらの変形から藤-鈴木系, 笹野系, 行列 Painlevé系 (VI型) の3つが得られる.

これらの Fuchs 型方程式の特異点の合流を全て考えれば, 完全な4次元 Painlevé型方程式の地図が得られるだろう. そして, 今までに様々な研究者によって得られていた4次元の方程式が全てその地図上に現れることを我々は期待するのである.

このような動機から, とりあえず不分岐という仮定のもとに, 我々は最初の節にあげた退化図式を得たわけである. ここでは, 簡単な退化の計算の例のみ見てみよう.

**例 6.** 21,21,111,111 (藤-鈴木系) から (2)(1),111,111 ( $A_5^{(1)}$  型野海-山田系) への退化の計算.

まず藤-鈴木系に対応する線型方程式の Riemann 図式を次のように与える:

$$\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & \theta_1^\infty \\ \theta_1^0 & 0 & 0 & \theta_2^\infty \\ \theta_2^0 & \theta^1 & \theta^t & \theta_3^\infty \end{pmatrix}$$

このとき, 変形方程式の Hamiltonian は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} & t(t-1)H \begin{bmatrix} 21, 21 \\ 111, 111 \end{bmatrix} \left( \begin{matrix} \theta_1^0, \theta_2^0, \theta^1, \theta^t \\ \theta_1^\infty, \theta_2^\infty, \theta_3^\infty \end{matrix}; t; q_1, p_1 \right) \\ = & t(t-1)H_{\text{VI}} \left( \begin{matrix} \theta_1^0 - \theta_2^0, \theta^1 + \theta_3^\infty, \theta^t + \theta_3^\infty \\ \theta_1^\infty - \theta_3^\infty + \theta_2^0, \theta_2^\infty + \theta_2^0 \end{matrix}; t; q_1, p_1 \right) \\ & + t(t-1)H_{\text{VI}} \left( \begin{matrix} \theta_1^0 - \theta_2^0 - \theta_2^\infty, \theta^1 + \theta_2^0 + \theta_2^\infty, \theta^t + \theta_2^0 + \theta_2^\infty \\ \theta_1^\infty, \theta_3^\infty \end{matrix}; t; q_2, p_2 \right) \\ & + (q_1 - t)(q_2 - 1) \{ (p_1 q_1 - \theta_2^\infty - \theta_2^0) p_2 + (p_2 q_2 - \theta_3^\infty) p_1 \} \end{aligned}$$

この Fuchs 型方程式においてパラメーターや変数を

$$\begin{aligned} t & \rightarrow 1 + \varepsilon t, H \rightarrow \varepsilon^{-1}(H + t^{-1}(p_1 q_1 + p_2 q_2)), \theta^t \rightarrow \theta^1 + \eta \varepsilon^{-1}, \theta^1 \rightarrow -\eta \varepsilon^{-1}, \\ q_1 & \rightarrow 1 + \varepsilon t q_1, p_1 \rightarrow \varepsilon^{-1} t^{-1} p_1, q_2 \rightarrow 1 + \varepsilon t q_2, p_2 \rightarrow \varepsilon^{-1} t^{-1} p_2 \end{aligned}$$

のようにとって,  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を考える.

こうすると不確定特異点をひとつ, 確定特異点を2つ持つ Fuchs 型でない方程式が得られ (2+1+1 のように書ける), スペクトル型は (2)(1),111,111 となる.

また Riemann 図式は

$$\begin{pmatrix} x=0 & \overbrace{x=1} & x=\infty \\ 0 & 0 & \theta_1^\infty \\ \theta_1^0 & 0 & \theta_2^\infty \\ \theta_2^0 & \eta t & \theta_3^\infty \end{pmatrix}$$

のように表わされ、さらに変形方程式は以下の Hamiltonian で記述される：

$$\begin{aligned} & tH \left[ \begin{matrix} (2)(1) \\ 111, 111 \end{matrix} \right] \left( \begin{matrix} \theta_1^0, \theta_2^0, \theta^1 \\ \theta_1^\infty, \theta_2^\infty, \theta_3^\infty \end{matrix}; t; \begin{matrix} q_1, p_1 \\ q_2, p_2 \end{matrix} \right) \\ = & tH_V \left( \begin{matrix} \theta_1^\infty - \theta_2^\infty - \theta_3^\infty - 1, \theta_2^0 + \theta_2^\infty \\ \theta_1^0 - \theta_2^0 + 2 \end{matrix}; t; q_1, p_1 \right) \\ & + tH_V \left( \begin{matrix} \theta_1^\infty - \theta_3^\infty - 1, \theta_3^\infty \\ \theta_1^0 - \theta_2^0 - \theta_2^\infty + 2 \end{matrix}; t; q_2, p_2 \right) \\ & + 2(q_1 - 1)q_2p_1p_2 \end{aligned}$$

この Hamiltonian は野海-山田系と同等なものである。

## 5 いくつかの注意

さて、得られた退化図式に関して、いくつか指摘しておきたいことがある。まずひとつめは、別々の線型方程式の変形理論から同じ非線型方程式が得られることがあることである。つまり、その意味で、この図式に現れる線型方程式と 4 次元 Painlevé 方程式の間に一対一の対応はない。しかし、今のところ、同じ非線型方程式が現れるのがわかっているのは、それらの方程式に対応する線型方程式の間に Laplace 変換でうつりあう関係がある場合のみである。一般に、同じ変形方程式を持つ線型方程式は Laplace 変換などを通じてうつりあうものであるという事柄が成り立つかどうかは興味深い話題である。

ふたつめの注意は、退化によって Hamilton 系の相空間（アクセサリー・パラメーターの空間）の次元はもちろん不変なのであるが、変形の次元は増える可能性があるということである。我々の図式の中では、このような現象は、藤-鈴木系の退化においてのみ現れる。具体的には、

$$(1)(1)(1), 21, 21 \quad ((1)(1))((1)), 21 \quad (2)(1), (1)(1)(1) \quad (((1)(1))((1)))$$

に現れる 4 つの方程式系は、変形の次元を 2 つ持ち、時間変数 2 つの偏微分方程式系であらわされる。以下、例をもって説明しよう。

例 7. 藤-鈴木系に対応した線型方程式に対して, 変数やパラメーターを

$$\begin{aligned} x &\rightarrow (1 - \varepsilon tx)/(1 - \varepsilon t), \quad t \rightarrow 1/(1 - \varepsilon t), \\ \theta_i^0 &\rightarrow \eta_i \varepsilon^{-1}, \quad \theta^t \rightarrow \theta^0, \quad \theta^1 \rightarrow \theta^1, \\ \theta_1^\infty &\rightarrow -\eta_1 t + \theta_1^\infty, \quad \theta_2^\infty \rightarrow -\eta_2 t + \theta_2^\infty, \quad \theta_3^\infty \rightarrow \theta_3^\infty, \\ q_1 &\rightarrow \frac{(1-\varepsilon)tq_1}{(1-\varepsilon)tq_1-1}, \quad p_1 \rightarrow (1 - (1 - \varepsilon t)q_1)(p_1((1 - \varepsilon t)q_1 - 1) - \theta_2^\infty(1 - \varepsilon t)), \\ q_2 &\rightarrow \frac{(1-\varepsilon)tq_2}{(1-\varepsilon)tq_2-1}, \quad p_2 \rightarrow (1 - (1 - \varepsilon t)q_2)(p_2((1 - \varepsilon t)q_2 - 1) - \theta_3^\infty(1 - \varepsilon t)). \end{aligned}$$

のようにとって,  $\varepsilon \rightarrow 0$  という極限をとる.

このときスペクトル型が (1)(1)(1), 21, 21 となる線型方程式が得られて, Riemann 図式は

$$\left( \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & \overbrace{0 \quad \theta_1^\infty} \\ 0 & 0 & \eta_1 t \quad \theta_2^\infty \\ \theta^0 & \theta^1 & \eta_2 t \quad \theta_3^\infty \end{array} \right)$$

のようになり, 変形方程式は

$$\begin{aligned} &tH \left[ \begin{array}{c} (1)(1)(1) \\ 21, 21 \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} \theta_1^\infty, \theta_2^\infty, \theta_3^\infty \\ \theta^0, \theta^1 \end{array} ; \eta_1, \eta_2; t; \begin{array}{c} q_1, p_1 \\ q_2, p_2 \end{array} \right) \\ &= tH_V(\theta^0, \theta_2^\infty, \theta^1; (\eta_2 - \eta_1)t; q_1, p_1) \\ &\quad + tH_V(\theta^0, \theta_3^\infty, \theta^1; -\eta_1 t; q_2, p_2) \\ &\quad + p_1 p_2 (2q_1 q_2 - q_1 - q_2) \end{aligned}$$

を Hamiltonian とする方程式系で表される. しかし, ここで得られた系は, 実は変形の次元を 2 つもっている. 実際,  $\eta_1 t$  と  $\eta_2 t$  を独立に動かすことができるのである.

変形方程式を直接に求めてみよう. 線型方程式

$$\frac{d}{dx} Y = A(x)Y, \quad A(x) = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + A_\infty, \quad A_\infty = \text{diag}(0, t_1, t_2)$$

の径数づけを考える. ただし, Fuchs-福原の関係式は

$$\theta^0 + \theta^1 + \theta_1^\infty + \theta_2^\infty + \theta_3^\infty = 0$$

とかける.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2^0 \\ b_3^0 \end{pmatrix} (c_1^0, c_2^0, c_3^0), \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \end{pmatrix} (c_1^1, c_2^1, c_3^1)$$

とおく．関係式は，

$$\begin{aligned}\theta^0 &= c_1^0 + b_2^0 c_2^0 + b_3^0 c_3^0, & \theta^1 &= c_1^1 + b_2^1 c_2^1 + b_3^1 c_3^1, \\ b_2^0 c_2^0 + b_2^1 c_2^1 + \theta_2^\infty &= 0, & b_3^0 c_3^0 + b_3^1 c_3^1 + \theta_3^\infty &= 0\end{aligned}$$

である．正準変数を

$$p_1 = b_2^0 c_2^1, \quad q_1 = -\frac{c_2^0}{c_2^1}, \quad p_2 = b_3^0 c_3^1, \quad q_2 = -t \frac{c_3^0}{c_3^1}$$

とおくと，ハミルトン関数は

$$\begin{aligned}H_{t_1} &= \hat{H}_V \left( \begin{array}{c} \theta^0, \theta^1 \\ \theta_1^\infty + \theta_3^\infty, \theta_2^\infty \end{array}; t_1; q_1, p_1 \right) + \frac{1}{t_1} (1 - q_1) (p_2 q_2 p_1 - (p_1 q_1 - \theta_2^\infty) (p_2 q_2 - \theta_3^\infty)) \\ &\quad + \frac{1}{t_1 - t_2} (p_1 (q_1 - q_2) - \theta_2^\infty) (p_2 (q_2 - q_1) - \theta_3^\infty), \\ H_{t_2} &= \hat{H}_V \left( \begin{array}{c} \theta^0, \theta^1 \\ \theta_1^\infty + \theta_2^\infty, \theta_3^\infty \end{array}; t_2; q_2, p_2 \right) + \frac{1}{t_2} (1 - q_2) (p_1 q_1 p_2 - (p_2 q_2 - \theta_3^\infty) (p_1 q_1 - \theta_2^\infty)) \\ &\quad + \frac{1}{t_2 - t_1} (p_2 (q_2 - q_1) - \theta_3^\infty) (p_1 (q_1 - q_2) - \theta_2^\infty)\end{aligned}$$

とかける．これは実は  $2+1+1+1$  の退化 Garnier 系と同等である．Laplace 変換による対応がある．見た目が対称で，よく知られているものよりきれいかもしれない．

さて，そのような現象があると，Fuchs 型の分類のほうで 3 点しか特異点がない場合を，変形が存在しないという理由で除外したのが気になってくる．実際，これらの Fuchs 型の方程式にも退化によって変形をもつものが得られることがある．しかし，実際に確認してみると，残った 9 つの方程式の特異点の合流から得られる方程式は Laplace 変換によってこの図式のいずれかに移ることがわかった．よって，分岐する場合は別に付け加えなくてはならないが，それ以外はこのリストに含まれているというわけである．

## 参考文献

- [1] K. Fuji and T. Suzuki, Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems, *Funkcial. Ekvac.* **53** (2010), 143-167.
- [2] H. Kimura, The degeneration of the two-dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, *J. Math. Pures Appl.*(4) **155** (1989), 25-74.

- [3] V. P. Kostov, The Deligne-Simpson problem for zero index of rigidity, *Perspective in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics*, *World Scientific* (2001), 1–35.
- [4] T. Oshima, Classification of Fuchsian systems and their connection problem, *preprint, University of Tokyo, Mathematical Sciences* (2008).
- [5] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, *preprint, University of Tokyo, Mathematical Sciences* (2010).
- [6] Y. Sasano, Coupled Painlevé VI systems in dimension four with affine Weyl group symmetry of type  $D_6^{(1)}$ . II, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B5* (2008), 137–152.