数理解析研究所講究録
第 1767 巻 2011 年 25-28

ある相対跡公式の基本補題のヘッケ環への拡張について (KIMBALL MARTIN, JOSEPH A. SHALIKA との共同研究)

古澤 昌秋
(大阪市立大学大学院理学研究科)

ABSTRACT. 古澤-Martin [2] において，Böcherer の予想 [1] の一般化を証明するべき新しい相対跡公式を提唱し，それについてヘッケ環の単位元に関する基本補題を証明した．本講演においては，その基本補題のヘッケ環全体への拡張について話した．相対跡公式及びその背景については [2]，証明の詳細は本編の論文 [3] に委ねる．

1. SET UP

いま，F は標数 0 の non-archimedean local field で，F の剰余標数は 2 でないとする．$\mathcal{O}_F$ を F の整数環とする．ψ は F の加法指標で，その導手が $\mathcal{O}_F$ であるとする．E は F の不分岐な二次拡大であるか $E=F\oplus F$ とし，κ を E/F に局所類体論の意味で対応する指標とする．このとき W を $\mathrm{GL}_2(F)$ の主系列表現 $\pi(1,\kappa)$ に対応する normalized Whittaker 函数とする．すなわち，$a,b\in F^\times$, $x\in F$, $k\in\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ に対して，

$$W\left[\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ab & \\ & b\end{pmatrix}k\right]=\psi(-x)\kappa(b)W\begin{pmatrix}a & \\ & 1\end{pmatrix},$$

$$W\begin{pmatrix}a & \\ & 1\end{pmatrix}=\begin{cases}|a|^{\frac{1}{2}}, & E\text{ は不分岐 2 次拡大で }\mathrm{ord}(a)\in 2\mathbb{Z}_{\geq 0},\\ |a|^{\frac{1}{2}}\left(1+\mathrm{ord}(a)\right), & E=F\oplus F\text{ で }\mathrm{ord}(a)\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\\ 0, & \text{上記以外のとき},\end{cases}$$

である．Ω を $E^\times$ の不分岐指標とし，$\omega=\Omega|_{F^\times}$ とする．また，δ を $F^\times$ の不分岐指標とし，$\Omega=\delta\circ\mathrm{N}_{E/F}$ とする．

1.1. GSp(4) **とその部分群.** いま，$G=\mathrm{GSp}_4(F)$，すなわち，

$$G=\left\{g\in\mathrm{GL}_4(F)\mid {}^tg\begin{pmatrix}0 & 1_2\\ -1_2 & 0\end{pmatrix}g=\lambda(g)\begin{pmatrix}0 & 1_2\\ -1_2 & 0\end{pmatrix},\ \lambda(g)\in\mathbb{G}_m(F)\right\}$$

とする．次に，$\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}$ $(i=1,2)$ に対して，

$$\iota\left(\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & b_1 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & b_2\\ c_1 & 0 & d_1 & 0\\ 0 & c_2 & 0 & d_2\end{pmatrix}$$

とし，

$$H=\{\iota(h_1,h_2)\mid h_1,h_2\in\mathrm{GL}_2(F),\ \det h_1=\det h_2\}$$

Date: 2011 年 1 月 17 日 RIMS 研究集会「保型形式と関連する跡公式，ゼータ関数の研究」．本研究集会における講演の機会を与えてくださった研究代表者の権寧魯さんに感謝します．
この研究は科学研究費補助金基盤研究 (C)22540029 によって援助されています．

とする．N を G の標準的 Borel 部分群の unipotent radical，すなわち，

$$N = \left\{ u(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1 & x & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & y & z \\ & 1 & z & w \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mid x,y,z,w \in F \right\}$$

とする．

1.2. **Bessel 部分群.**

1.2.1. *Split Bessel* 部分群. $T^{(s)}$ を G の split torus,

$$T^{(s)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & a \end{pmatrix} \mid a,b \in F^\times \right\}$$

とし，

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & X \\ & 1_2 \end{pmatrix} \mid X \in \mathrm{Sym}^2(F) \right\}, \quad \bar{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & \\ Y & 1_2 \end{pmatrix} \mid Y \in \mathrm{Sym}^2(F) \right\}$$

とする．このとき，G の upper split Bessel 部分群 $R^{(s)}$ と lower split Bessel 部分群 $\bar{R}^{(s)}$ は，それぞれ

$$R^{(s)} = T^{(s)}\,U, \qquad \bar{R}^{(s)} = T^{(s)}\,\bar{U}$$

によって定義される．

1.2.2. *Anisotropic Bessel* 部分群. E を F の不分岐 2 次拡大とする．$E = F(\eta)$ かつ $\eta^2 = d \in \mathcal{O}_F^\times$ となる $\eta \in E$ をとり固定する．このとき，$\alpha = a + b\eta \in E^\times$, $a,b \in F$, に対して $t_\alpha \in G$ を

$$t_\alpha = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} a & -bd \\ -b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

によって定め，$T^{(a)} = \{t_\alpha \mid \alpha \in E^\times\}$ とする．このとき，G の upper anisotropic Bessel 部分群 $R^{(a)}$ と lower anisotropic Bessel 部分群 $\bar{R}^{(a)}$ は，それぞれ

$$R^{(a)} = T^{(a)}\,U, \qquad \bar{R}^{(a)} = T^{(a)}\,\bar{U}$$

によって定義される．

1.3. **軌道積分.** $\mathcal{H}$ を G のヘッケ環，すなわち，$G(F)$ 上の bi-$G(\mathcal{O}_F)$-invariant で compact support を持つ $\mathbb{C}$-valued 函数全体のなす空間とする．

1.3.1. *Rankin-Selberg type* 軌道積分. $s \in F^\times$, $a \in F \setminus \{0,1\}$ と $f \in \mathcal{H}$ に対して，$I(s,a;f)$ を

$$I(s,a;f) = \int_{H_0 \backslash H} \int_N \int_Z f\left(h^{-1} \bar{n}^{(s)} z n\right) W_{s,a}(h)\, \omega(z)\, \psi(n)\, dz\, dn\, dh \tag{1.1}$$

によって定める．ただしここで，

$$H_0 = \left\{ z \cdot \iota\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \right) \mid z \in Z, y \in F \right\}, \quad \bar{n}^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s^{-1} \end{pmatrix},$$

$$W_{s,a}(\iota(h_1,h_2)) = \delta^{-1}(s(1-a)\det h_2)\, W\left(\begin{pmatrix} sa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_1 \right) W\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s(1-a) & 0 \end{pmatrix} h_2 \right),$$

$$\psi\left[u(x,y,z,w)\right] = \psi(x+w),$$

である．

1.3.2. *Split Bessel*軌道積分．$E = F \oplus F$ とする．このとき，$x \in F \setminus \{0,1\}$，$\mu \in F^{\times}$，$f \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{B}^{(s)}(x,\mu;f)$ を

$$\mathcal{B}^{(s)}(x,\mu;f) = \int_{Z\setminus\bar{R}^{(s)}} \int_{R^{(s)}} f\left(\bar{r}\,A^{(s)}(x,\mu)\,r\right)\,\xi^{(s)}\left(\bar{r}\right)\,\tau^{(s)}\left(r\right)\,dr\,d\bar{r} \tag{1.2}$$

によって定める．ただし，

$$A^{(s)}(x,\mu) = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ 0 & \mu\,{}^t\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tau^{(s)}\left[\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & X \\ & 1_2 \end{pmatrix}\right] = \delta(ab)\cdot\psi\left[\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}X\right)\right],$$

$$\xi^{(s)}\left[\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & \\ Y & 1_2 \end{pmatrix}\right] = \delta(ab)\cdot\psi\left[\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}Y\right)\right]$$

である．

1.3.3. *Anisotropic Bessel* 軌道積分．E は F の不分岐 2 次拡大とする．このとき，$u \in E^{\times}$，$\mathrm{N}_{E/F}(u) \neq 1$，$\mu \in F^{\times}$，$f \in \mathcal{H}$ に対して，anisotropic Bessel 軌道積分 $\mathcal{B}^{(a)}(u,\mu;f)$ を

$$\mathcal{B}^{(a)}(x,\mu;f) = \int_{Z\setminus\bar{R}^{(a)}} \int_{R^{(a)}} f\left(\bar{r}\,A^{(a)}(u,\mu)\,r\right)\,\xi^{(a)}\left(\bar{r}\right)\,\tau^{(a)}\left(r\right)\,dr\,d\bar{r}$$

によって定める．ただし，$u = a + b\eta$, $a, b \in F$ としたとき，

$$A^{(a)}(u,\mu) = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1+a & -b \\ b\eta^2 & 1-a \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ 0 & \mu\,{}^t\left(\begin{smallmatrix} 1+a & -b \\ b\eta^2 & 1-a \end{smallmatrix}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

であり，

$$\tau^{(a)}\left[t_\alpha\begin{pmatrix} 1_2 & X \\ & 1_2 \end{pmatrix}\right] = \Omega(\alpha)\cdot\psi\left[\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -d & \\ & 1 \end{pmatrix}Y\right)\right],$$

$$\xi^{(a)}\left[t_\alpha\begin{pmatrix} 1_2 & \\ Y & 1_2 \end{pmatrix}\right] = \Omega(\alpha)\cdot\psi\left[\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -d^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}Y\right)\right]$$

である．

2. 主結果

$x \in F \setminus \{0,1\}$，$\mu \in F^{\times}$, $f \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{I}(x,\mu;f)$ を

$$\mathcal{I}(x,\mu;f) = I(s,a;f) \quad \text{ただし} \quad s = -\frac{1-x}{4\mu},\ a = \frac{1}{1-x}$$

によって定める．このとき，論文 [3] の主結果は次の定理である．

<u>**定理**</u>

(1) $E = F \oplus F$ のとき,

$$\mathcal{I}\left(x, \mu; f\right) = \delta^{-1}\left(\frac{x}{\mu^2}\right)\left|\frac{x}{\mu^2}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{B}^{(s)}\left(x, \mu; f\right)$$

が成り立つ.

(2) E が F の不分岐 2 次拡大のとき,

$$\mathcal{I}\left(x, \mu; f\right) = \begin{cases} \delta^{-1}\left(\frac{x}{\mu^2}\right)\left|\frac{x}{\mu^2}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{B}^{(a)}\left(u, \mu; f\right), & \mathrm{ord}(x)\text{ が偶数}, \\ 0, & \mathrm{ord}(x)\text{ が奇数}, \end{cases}$$

が成り立つ.

References

[1] S. Böcherer, Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß, Math. Gottingensis Schrift. SFB. Geom. Anal. Heft 68, 1986.

[2] M. Furusawa and K. Martin, On central critical values of the degree four L-functions for GSp(4): the fundamental lemma II, Amer. J. of Math. **133** (2011), 197–233.

[3] M. Furusawa, K. Martin and J. A. Shalika, On central critical values of the degree four L-functions for GSp(4): the fundamental lemma III, preprint.