

アトラクタ・マーキング・クライシス転移点前後のカオスアトラクタと不安定周期軌道の多様体構造

小林幹, 斉木吉隆¹

京都大学数理解析研究所, ¹ 北海道大学大学院理学研究院数学部門

Miki U. Kobayashi*, Yoshitaka Saiki¹⁾

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

¹⁾ Department of Mathematics, Hokkaido University

*miki@kurims.kyoto-u.ac.jp

アブストラクト

蔵本-シバシンスキー方程式で生じるアトラクタ・マーキング・クライシスの転移点前後のパラメタにおいてカオスアトラクタと不安定周期軌道の性質についての解析を行った。特に、アトラクタ・マーキング・クライシス転移点前後において、それらの多様体構造の解析を行った。その結果、カオスアトラクタと不安定周期軌道の多様体構造は、転移点前後で特徴的な変化は起らないことが明らかとなった。しかしながら、適切に分類された不安定周期軌道の集団を考えると、それらの集団間において多様体構造に特徴的な違いが観測された。

1 はじめに

カオス力学系のパラメタを動かして、カオスアトラクタの性質の変化を調べた研究は盛んに研究されてきた [1]。その中でも特に、あるパラメタを境に突然カオスアトラクタの性質が変化する現象が比較的良く調べられている。そのような現象はカオス転移と呼ばれており、現在では 3 種類の転移が知られている [1]。一つ目は、バウンダリ・クライシスである。二つ目は、インテリア・クライシスである。三つ目は、複数のカオスアトラクタが、あるパラメタを境に合体して一つのカオスアトラクタになるアトラクタ・マーキング・クライシス (AMC) である。これらの転移に関する臨界現象などの統計物理学的な研究は多くの研究者が行っている。例えばアトラクタ・マーキング・クライシスに起因する決定論的拡散現象に関して、その拡散係数が転移点で発散することが知られている [2]。

一方、カオスアトラクタの性質を、不安定周期軌道を用いて解析する手法が 80 年代から現在にかけて多くの研究者によって盛んに研究されている。たとえば、カオスアトラクタの不変測度やアトラクタ次元をカオスアトラクタに埋め込まれている加算無限個の不安定周期軌道の重ね合わせとして近似する方法などがある [3, 4, 5, 6]。さらに最近の研究で、不安定周期軌道の多様体構造が、カオス力学系の性質を特徴づける際に有用であることが報告された。具体的には、カオス力学系における周期窓のパラメタ空間における発生順序

が, 不安定周期軌道上における安定多様体と不安定多様体の最小角度で特徴づけられることが示された [7].

本論文では, AMC 転移点前後のパラメタにおいて, カオスアトラクタやそれに埋め込まれた不安定周期軌道の多様体構造がどのような変化を起こすかを明らかにする.

2 不安定周期軌道の多様体を用いたアトラクタ・マーキング・クライシスの特徴づけ

本章では, 蔵本-シバシンスキー (KS) 方程式におけるアトラクタ・マーキング・クライシス (AMC) 転移点前後に対するカオスアトラクタの多様体構造と, カオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道の多様体構造の解析を行う.

2.1 蔵本-シバシンスキー方程式におけるアトラクタ・マーキング・クライシス

KS 方程式は, 時空カオスを生じさせる最も簡単な偏微分方程式の一つとして幅広く研究されている [8]. 方程式は以下で与えられる:

$$u_t + 2uu_x + u_{xx} + \nu u_{xxxx} = 0.$$

ただし, $u = u(x, t)$ ($x \in [0, 2\pi]$) は実変数で, u_t, u_x は u の t, x に関する微分を表す. ここでは 2π 周期境界条件 $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$ を課す. この方程式を数値的に解くために, フーリエ分解 $u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(t)e^{ikx}$ を使ったスペクトル法を採用する. 簡単のため, 扱う系を奇関数のみで張られる部分空間に限定して, $b_k(t) = -ia_k(t)/2$ を仮定すると [9, 10], 扱う方程式は,

$$\dot{a}_k(t) = (k^2 - \nu k^4)a_k(t) + k \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(t)a_{k-m}(t),$$

で与えられる. ただし $a_0 = 0, 1 \leq (k, m) \leq N$, そして N は打ち切り波数を表す. 本論文では $N = 16$ とする.

KS 方程式は, ν をコントロールパラメタとして動かしていくと $\nu = \nu_{AMC} \sim 0.02990$ で AMC を起こすことが知られている. AMC とは, パラメタ変化に伴い, 複数のカオスアトラクタが相空間上でぶつかり一つのカオスアトラクタになるカオス-カオス転移のことである. Fig. 1 は AMC 移転点 ($\nu = \nu_{AMC}$) 付近のポアンカレ断面上 ($a_1 = 0, \dot{a}_1 > 0$) の分岐図を表している. ただし, Fig. 1 では, $\nu > \nu_{AMC}$ において対称的に存在する一つのカオスアトラクターのみ描写している. Fig. 1 より $\nu < \nu_{AMC}$ においてアトラクタのサイズが急に大きくなっているのは, $\nu = \nu_{AMC}$ において AMC が起きたことが原因である.

2.2 カオスアトラクタの多様体構造を用いた解析

本節では, AMC 前後のパラメタにおけるカオスアトラクタの多様体を数値的に構成し, その前後で多様体構造の定性的な違いが見られるかどうかを調べる. 特にここでは, 多様体の構造を特徴づける量として, 安定多様体と不安定多様体がなす角度を導入する. 以下, 本論文で行う安定多様体と不安定多様体がなす角度の計算方法を簡単に述べる. 多様体の角度は以下の定義に従って計算を行う [11]:

$$\angle(E^s, E^u) = \cos^{-1} \left(\max_{\substack{|u^s|=|u^u|=1 \\ u^s \in E^s, u^u \in E^u}} (|u^s, u^u|) \right) \times \frac{180}{\pi}.$$

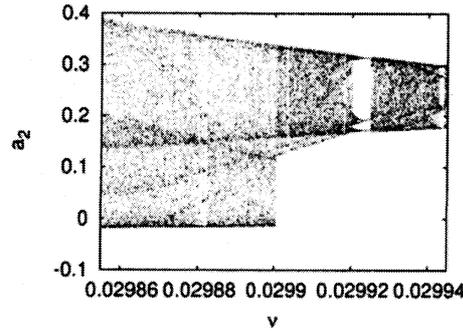


FIG. 1: AMC 移転点 ($\nu = \nu_{AMC}$) 付近のポアンカレ断面上の分岐図. ポアンカレ断面は $a_1 = 0, \dot{a}_1 > 0$ を用いた.

ただし, E^s, E^u はそれぞれ伸びる方向, 縮む方向に対応したリアプノフベクトル v_j で張られる部分空間である. ここで, リアプノフベクトル v_j は以下で定義される:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x)v_j| = \lambda_j,$$

ただし, $Df^n(x)$ は考えている系のヤコビアン, λ_j は j 番目のリアプノフ指数を表している. リアプノフベクトルの計算は, Ginelli らによって開発された数値アルゴリズムを用いる [14]. Ginelli らのアルゴリズムを用いて計算された $\angle(E^s, E^u)$ が, 安定多様体と不安定多様体の角度の良い近似を与えていることは, 様々な研究で知られている [14, 12]. 我々は軌道上の各点でこの角度を計算することで, その軌道の多様体を特徴づけることにする. 以下, この安定多様体と不安定多様体の角度を多様体角度と呼ぶことにする.

初めに, AMC 転移点の前後でカオスアトラクタの多様体の構造がどのように変化しているかを調べる. Fig. 2 は AMC 転移点前後におけるカオスアトラクタの多様体角度の確率密度分布を示している. Fig. 2 から, カオスアトラクタの多様体角度分布は AMC の前後でほとんど同じ関数になっていることが分かる. 分岐図 (Fig.1) をみると, AMC 転移点ではカオスアトラクタの形に大きな変化が起きているように見えることと対照的である.

2.3 不安定周期軌道の多様体構造を用いた解析

前節においてカオスアトラクタの多様体構造は AMC 移転点前後でほとんど変化が見られないことが分かった. そこで, 本節では AMC の前後でカオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道の多様体の構造がどのように変化しているのかを調べる.

最近, KS 方程式の AMC の前後でカオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道がどう変化するのかを調べた研究が行われた [15]. その結果, AMC 転移点付近において不安定周期軌道が以下の 3 種類に分類されることが明らかになった: (1) mUPO: $\nu > \nu_{AMC}$ においてカオスアトラクタに埋め込まれておらず, その安定多様体が 2 つの対称なカオスアトラクタを分けるベイスンバウンダリの役割をする UPO, (2) aUPO: カオスアトラクタに埋め込まれていて AMC 転移点前後で存在する UPO, (3) gUPO: AMC 転移点後 ($\nu < \nu_{AMC}$) にのみ存在する UPO,

ここでは, それら 3 種類の不安定周期軌道の多様体構造がどのような性質の違いを持っているのかを明らかにする. 前節における解析と同様に, 多様体角度に着目することで多様体の構造を特徴づける. 特にここでは, 以下のように不安定周期軌道上の多様体角度の

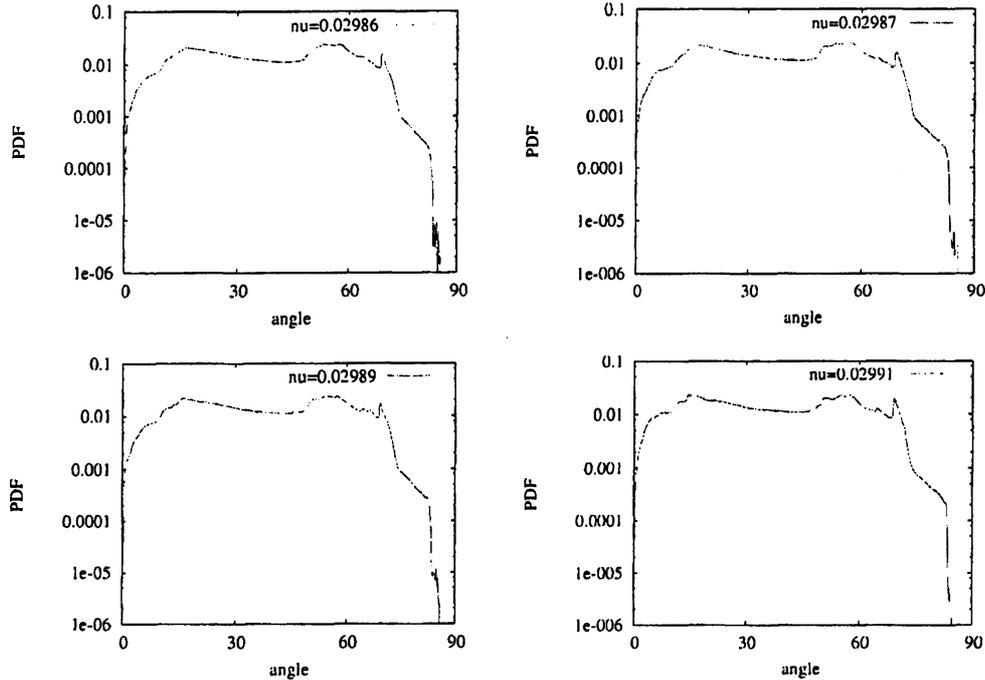


FIG. 2: カオスアトラクタにおける多様体角度の確率密度分布. (左上) $\nu = 0.02986$ (AMC 後) (右上) $\nu = 0.02987$ (AMC 後)(左下) $\nu = 0.02989$ (AMC 直後)(右下) $\nu = 0.02991$ (AMC 前)

最小値に着目する：

$$\min_{0 \leq t < T} \angle(E^s, E^u)_t.$$

ただし, T は考える不安定周期軌道の周期を表す. 以下この量を最小多様体角度と呼び, 不安定周期軌道の多様体角度を特徴づける量として扱う.

まず, aUPO, mUPO と gUPO に対する最小多様体角度の ν 依存性を計算する. Fig. 3 がその結果である. Fig. 3 から, カオスの多様体構造と同様に, UPO の多様体構造は AMC によって大きな変化を受けないことが明らかとなった. さらに, Fig. 3 から, AMC に着目した不安定周期軌道の分類によらず, 不安定周期軌道の多様体角度はパラメタを増やしていくにつれて単調に減少していき, サドル-ノード分岐でその不安定周期軌道が消滅する点で最小値をとることが明らかになった. この結果は, AMC から離れたパラメタ空間において得られた結果と一致する [7]. 以上の結果は, AMC という大規模な構造変化を伴う転移の有無に関わらず, 非常に幅広いパラメタ空間で観測される重要な性質である.

次に, 様々なパラメタ値に対して, 3 種類の不安定周期軌道をそれぞれ数値的にたくさん求め, それらの最小多様体角度が, 軌道の周期に対してどのように分布しているかを調べる. Fig. 4 は, 3 つの異なるパラメタにおけるカオスアトラクタに埋め込まれた多数の不安定周期軌道に対して, 横軸に周期軌道の周期を縦軸に最小多様体角度をプロットしたものである. 左の列の 3 つの図は aUPO (AMC の前後で存在する UPO), 右の列の 2 つの図は gUPO (AMC 後 $\nu < \nu_{AMC}$ でのみ存在する UPO) を表している. Fig. 4 から, aUPO より gUPO の方が相対的に小さい最小多様体角度を持つ傾向にあることが分かる. gUPO は AMC 後にサドルノード分岐を経て出現する UPO である. つまり, AMC 移転後において, gUPO は対応するサドル-ノード分岐点の比較的そばに存在していることになる. Fig. 3 から分かるように, 不安定周期軌道の最小多様体角度はサドル-ノード分岐点で最小値

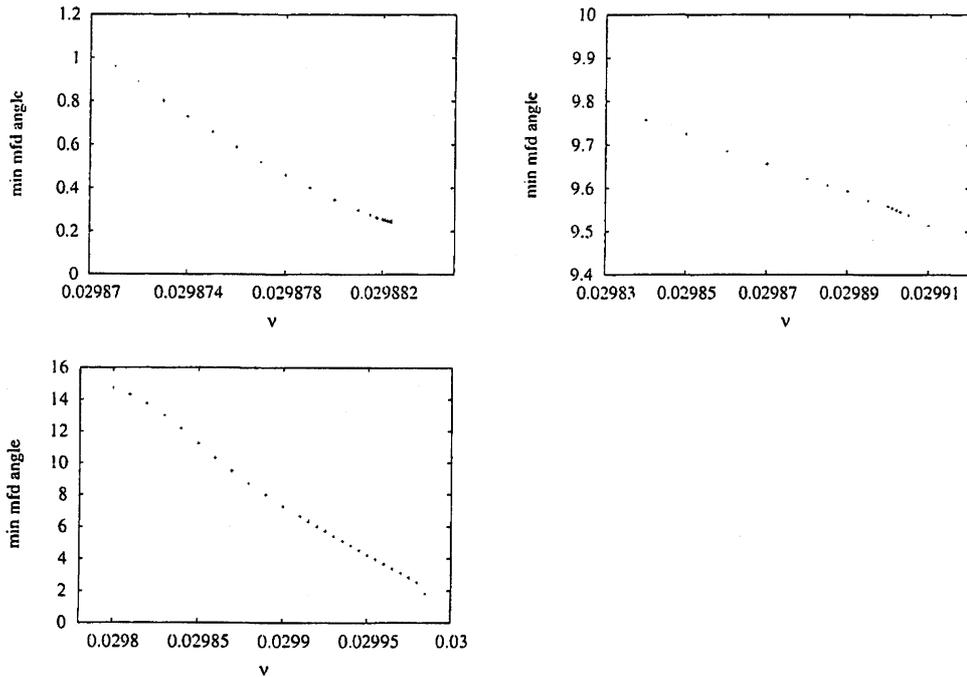


FIG. 3: (左上)gUPO の最小多様体角度の ν 依存性 (右上)mUPO の最小多様体角度の ν 依存性 (左下)aUPO の最小多様体角度の ν 依存性

をとる。従って、サドル-ノード分岐点の近くに存在する gUPO の最小多様体角度は小さな値を持つ傾向にあると考えられる。

3 まとめ

本論文では、藏本-シバシンスキー方程式におけるアトラクタ・マーキング・クライシス転移点前後のカオスアトラクタと不安定周期軌道の性質に関する解析を行った。特に、アトラクタ・マーキング・クライシス転移点前後におけるそれぞれの不変集合に対する多様体の構造を解析した。多様体の構造を特徴づける量として、我々は、安定多様体と不安定多様体のなす角度に着目した。その結果、カオスアトラクタの多様体構造は転移点前後で特徴的な変化は見られなかった。アトラクタ・マーキング・クライシスは分岐図からも分かるように非常に大きな構造変化を伴うが、転移点前後で多様体の構造に変化がほとんど見られないことは驚きである。同様に、転移点付近での不安定周期軌道の多様体構造の変化に関する解析も行った。結果として、カオスアトラクタと同様に、不安定周期軌道の多様体構造も AMC によって、大きな構造変化は起きなかった。一方、aUPO(AMC の前後で存在する UPO) と gUPO(AMC 後でのみ存在する UPO) に対して、それぞれの多様体構造を解析することで興味深い結果を得た。AMC 直後のパラメタにおいて、gUPO の最小多様体角度は、aUPO のそれと比べると相対的に小さい値を持つことが分かった。この結果は、以下のように、斉木等の結果 [15] と小林等の結果 [7] を考えると自然な結果であると思われる。斉木等の結果より、パラメタ ν を AMC 転移点に下から (AMC 後のパラメタから) 近づけていくと、AMC 転移点に向かってサドル-ノード分岐が集積する事が明らかとなった。一方、小林等の結果より、サドル-ノード分岐点で発生する不安定周期軌道の多様体角度は非常に小さくなる事が明らかとなった。これらを合わせて考えると、AMC 転移点直後のパ

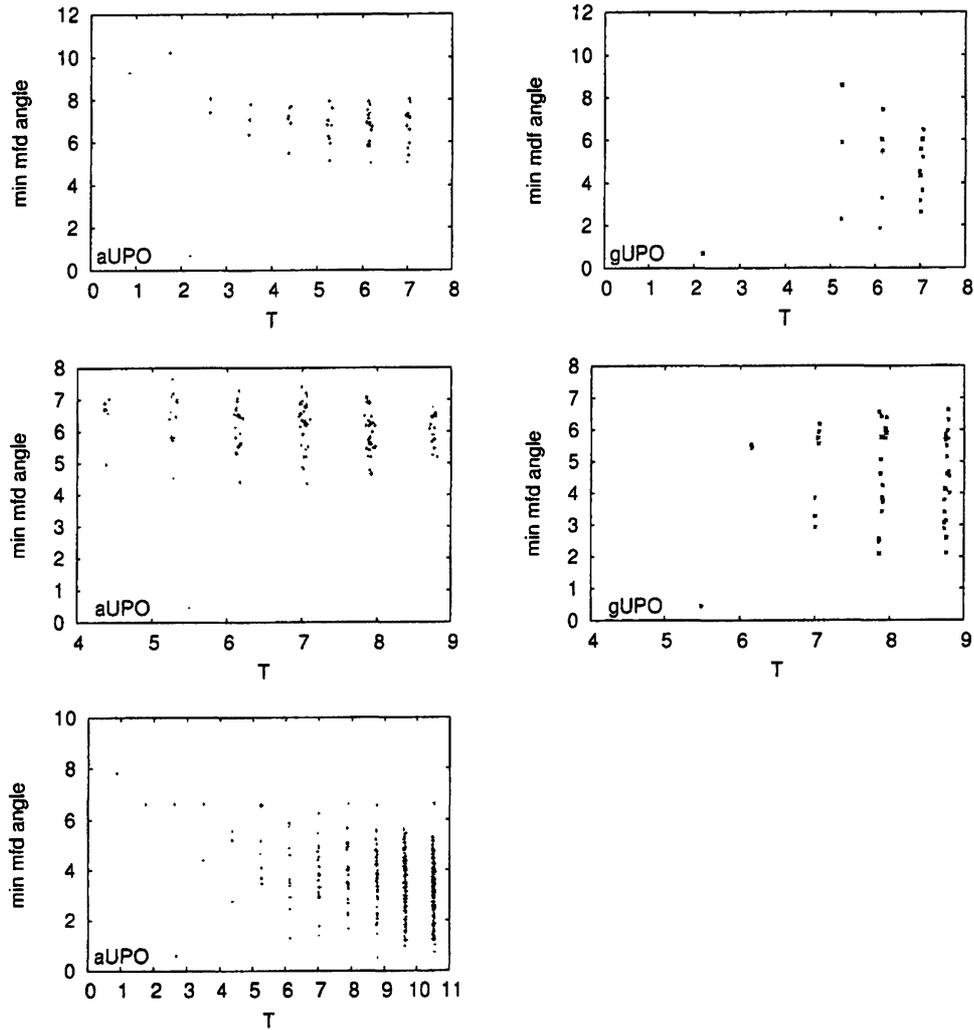


FIG. 4: 3つのパラメタ値に対する不安定周期軌道(周期 T)の最小多様体角度(mini mfd angle). 左列の図はaUPOの, 右列の図はgUPOの結果を示している. (上の2つの図): $\nu = 0.02986$ (AMC後). (真ん中の2つの図): $\nu = 0.02987$ (AMC後). (下の図): $\nu = 0.02991$ (AMC前).

ラメタ領域ではサドル-ノード分岐がたくさん存在するので, それらに起因した不安定周期軌道(gUPO)の多様体角度は相対的に小さい値を持っていることになる.

参考文献

- [1] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).
- [2] S. Grossmann and H. Fujisaka, Diffusion in Discrete Nonlinear Dynamical Systems, *Phys. Rev. A* **26** (1982), 1779.
- [3] T. Kai and K. Tomita, Statistical Mechanics of Deterministic Chaos - The case of One-Dimensional Discrete Process -, *Prog. Theor. Phys.*, **64** (1980), 1532.
- [4] P. Cvitanović, Invariant Measurement of Strange Sets in Terms of Cycles, *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988), 2729.

- [5] C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, Unstable Periodic Orbits and the Dimensions of Multifractal Chaotic Attractors, *Phys. Rev. A*, **37** (1988), 1711
- [6] T. Morita, H. Hata, H. Mori, T. Horita and K. Tomita, Spatial and Temporal Scaling Properties of Strange Attractors and Their Representations by Unstable Periodic Orbits, *Prog. Theor. Phys.* **79**, (1988), 296.
- [7] M. U. Kobayashi and Y. Saiki, Periodic window as the origin of non hyperbolicity in some chaotic systems, submitted.
- [8] Y. Kuramoto, Springer Series in Synergetics, Vol. 19 (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [9] A.C.-L. Chian, E.L. Rempel, E.E. Macau, R.R. Rosa and F. Christiansen, High-dimensional interior crisis in the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Phys. Rev. E*, **65**, 035203(R) (2002).
- [10] F. Christiansen, P. Cvitanović, and V. Putkaradze, Spatiotemporal chaos in terms of unstable recurrent patterns, *Nonlinearity* **10**, 55 (1997).
- [11] P. V. Kuptsov and S. P. Kuznetsov, Violation of hyperbolicity in a diffusive medium with local hyperbolic attractor, *Phys. Rev. E*, **80**, 016205 (2009).
- [12] Y. Saiki and M. U. Kobayashi, Numerical Identification of Nonhyperbolicity of the Lorenz Systems through Lyapunov Vectors, *J. SIAM Lett.* **2** (2010) 107.
- [13] Y. Saiki and M. U. Kobayashi, Period doubling bifurcation as the origin of tangency in the Lorenz system, in preparation.
- [14] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi and P. Politi, Characterizing dynamics with covariant Lyapunov vectors, *Phys. Rev. Lett.*, **99**(13) (2007), 130601.
- [15] Y. Saiki, M. Yamada, C.-L. Chian, R. A. Miranda and E. L. Rempel, Reconstruction of chaotic saddles and classification of unstable periodic orbits, submitted.