数理解析研究所講究録
第 1769 巻 2011 年 158-168

CQF-3′ 加群と双対遺伝的捩れ理論の一般化

函館工業高等専門学校・一般科目理数系竹花靖彦 (Yasuhiko Takehana)
General Education Hakodate National College of Technology

0. 序

ここでは R は単位元を持つ右完全環とする．Mod-R で右 R-加群全体を表し，特に断らない限り加群はユニタリーな R-加群を表すことにする．加群 M に対し $0 \to K(M) \to P(M) \to M \to 0$ を M の射影被覆とする，即ち $P(M)$ は射影加群で $K(M)$ は $P(M)$ の小部分加群である．$P(M)$ が M で生成されているとき加群 M は CQF-3′ 加群であるという．

Mod-R の恒等関手の部分関手を弱根基という．弱根基 σ に対し任意の加群 M とその部分加群 N について $M \supseteq \sigma(M)$ であり $\sigma(M/N) \supseteq (\sigma(M)+N)/N$ が成り立つ．弱根基 σ に対して $\mathcal{T}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R : \sigma(M) = M\}$ で定義しその元を σ-torsion 元といい $\mathcal{F}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R : \sigma(M) = 0\}$ で定義してその元を σ-torsionfree 元という．$\mathrm{Hom}_R(M, -)$ が $A \in \mathcal{F}_\sigma$ である短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ の完全性を保つとき加群 M は σ-射影的であると言う．加群 M に対し $P_\sigma(M) := P(M)/\sigma(K(M))$ と定める．$P_\sigma(M)$ は M で生成されるなら M は σ-CQF-3′ 加群であると言う．

ここでは σ-CQF-3′ 加群の性質とその関連事項について述べる．

1. 捩れ理論に付随するCQF-3′ 加群

F. F. Mbuntum と K. Varadarajan は QF-3′ 加群の双対化として CQF-3′ 加群を定義し [10] において特徴づけを与えた．[12] より CQF-3′ 加群は森田同値の一般化に有用な役割を果たしている．ここでは冪等根基を用いて CQF-3′ 加群を拡張する．弱根基 σ は任意の加群 M について $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ [$\sigma(M/\sigma(M)) = 0$] がいつでも成立するとき，それぞれ冪等 [根基] であるという．短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ で $A, C \in \mathcal{W}$ であるなら $B \in \mathcal{W}$ のときクラス $\mathcal{W}$ は拡大で閉じているという．よく知られているように σ が冪等なら $\mathcal{F}_\sigma$ は拡大で閉じており σ が根基なら $\mathcal{T}_\sigma$ は拡張で閉じている．弱根基 t は任意の加群 M とその部分加群 N について $t(M/N) = (t(M)+N)/N$ が成り立てば全射保持であると言われる．弱根基 σ が全射保持であることと，σ が根基でありかつ $\mathcal{T}_\sigma$ が剰余加群で閉じていることとは同値である．ここで全射保持性の概念を拡張する．弱根基 σ に対し弱根基 t は任意の加群 M とその部分加群 $N \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し $t(M/N) = (t(M) + N)/N$ が成立するとき σ-全射保持であるという．加群 M, N について $\sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(N,M)} im f$ を $t_N(M)$ であらわす．そ

のとき任意の加群 N に対して t_N は冪等弱根基になる．そして $\mathcal{F}_{t_A} = \{M \in \text{Mod-}R : \text{Hom}_R(A, M) = 0\}$ and $\mathcal{T}_{t_A} = \{M \in \text{Mod-}R : \oplus A \to M \to 0\}$ であることがわかる．

$X, Y \in \text{Mod-}R$ に対し全射 $g \in \text{Hom}_R(X, Y)$ が極小全射であるというのは $X \supsetneqq H$ ならば $g(H) \subsetneqq Y$ がいつでも成立するときに言う．全射 $g \in \text{Hom}_R(X, Y)$ が極小であることと $\ker g$ が X の小部分加群であることは同値である．

次に良く知られている射影被覆の拡張を述べる．$0 \to X \to Y \to M \to 0$ は Y が σ-射影的で X は σ-tosionfree で X は Y の小部分加群であるなら M の σ-射影被覆であるという．σ-射影被覆は同型を除いてただ一つに定まることが知られている．弱根基 σ が冪等ならば [11] の Lemma 1.4 により $P(M)/\sigma(K(M))$ は σ-射影加群である．σ が根基であるなら $K(M)/\sigma(K(M)) \in \mathcal{F}_\sigma$ である．弱根基 σ に対し $K_\sigma(M) := K(M)/\sigma(K(M))$ で $P_\sigma(M) := P(M)/\sigma(K(M))$ と定義するとき $K_\sigma(M)$ は $P_\sigma(M)$ の小部分加群である．従って σ が冪等根基なら加群 M は σ-射影被覆を持ち $0 \to K_\sigma(M) \to P_\sigma(M) \to M \to 0$ で与えられる．

以下 σ は弱根基とし $\mathcal{C}$ はＭｏｄ-R の部分クラスとする．また N は M の部分加群とする．

拡大の概念を拡張する．$N, M/N \in \mathcal{C}$ で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ ならば $M \in \mathcal{C}$ であるとき $\mathcal{C}$ は $\mathcal{F}_\sigma$-拡大で閉じているという．

次に剰余加群で閉じていることの拡張概念を述べる．$M \in \mathcal{C}$ でありかつ N は M の σ-torsionfree な部分加群であるなら $M/N \in \mathcal{C}$ がいつでも成り立つとき $\mathcal{C}$ は $\mathcal{F}_\sigma$-剰余加群で閉じているという．

次に双対本質的拡大の拡張を述べる．全射 $h : M \twoheadrightarrow X$ があって $\ker h \in \mathcal{F}_\sigma$ のとき M は X の σ-双対本質的拡大であるという．また任意の極小全射 $f : M \twoheadrightarrow X$ で $\ker f \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものに対して $X \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C}$ が成立するとき $\mathcal{C}$ は σ-双対本質的拡大で閉じているという．

しかしここでは記述の簡易化のために N は M の σ-torsionfree な小部分加群のとき M は M/N の σ-双対本質的拡大であるということにする．また N は M の σ-torsionfree な小部分加群のとき $M/N \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C}$ が成り立つとき $\mathcal{C}$ は σ-双対本質的拡大で閉じているということにする．

定理 1. σ は弱根基とする．加群 A について次の条件を考える．

(1) A は σ-CQF-$3'$ 加群である．

(2) $t_A(P_\sigma(A)) = P_\sigma(A)$ が成立する．

(3) 任意の加群 M に対して $t_A(M) = t_{P_\sigma(A)}(M)$ が成立する．

(4) $t_A(-)$ は σ-全射保持な弱根基である．

(5) (a) $\mathcal{T}_{t_A}$ は $\mathcal{F}_\sigma$-拡大で閉じている．

　(b) $\mathcal{F}_{t_A}$ は $\mathcal{F}_\sigma$-剰余加群で閉じている．

(6) $\mathcal{T}_{t_A}$ は σ-射影被覆で閉じている．

(7) $\mathcal{T}_{t_A}$ は σ-双対本質的拡大で閉じている.

(8) N は σ-torsionfree な M の部分加群のとき標準的全射 $f: M \to M/N$ に対して $[\mathrm{Hom}_R(A,f)=0 \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(A,M/N)=0]$ が成立する.

そのとき (1)→(3)→(2)→(1) と (4)→(5) が成り立つ.

σ が冪等なら (3)→(4), (1)→(8) と (7)←(6)→(5) が成り立つ.

σ が根基なら (7)→(6), (6)←(4)→(2) が成り立つ.

σ が全射保持根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ であるならば (8)→(5) が成り立ち，更に σ が冪等なら (5)→(2) が成り立つ.

かくして σ が弱根基なら (1)(2)(3) が同値であり，σ が冪等根基なら (1)(2)(3)(4) が同値である.

また σ が全射保持-冪等-根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ であるなら全ての条件は同値である.

証明. (1)→(3): 仮定より完全列 $\oplus A \to P_\sigma(A) \to 0$ がある. よって加群 M に対し $t_A(M) \supseteq t_{P_\sigma(A)}(M)$ である. $P_\sigma(A) \to A \to 0$ であるから, $t_A(M) \subseteq t_{P_\sigma(A)}(M)$ が得られる. かくして $t_A(\_) = t_{P_\sigma(A)}(\_)$ が成り立つ.

(3)→(2): $t_A(P_\sigma(A)) = t_{P_\sigma(A)}(P_\sigma(A)) = P_\sigma(A)$ であるから明らかである.

(2)→(1): $P_\sigma(A) = t_A(P_\sigma(A))$ であり $\oplus A \twoheadrightarrow t_A(P_\sigma(A))$ であるから明らかである.

(3)→(4): σ は冪等とする. そのとき $P_\sigma(A)$ は σ-射影加群である. $N \subseteq M$ で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ とする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{c} P_\sigma(A) \\ \swarrow_h \ \downarrow_f \\ 0 \to N \to M \underset{g}{\to} M/N \to 0, \end{array}$$

そこで g は標準的全射で $f \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(A), M/N)$ であり,

$h \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(A), M)$ は $P_\sigma(A)$ の σ-射影性から導かれ $f = gh$ になる準同型である.

かくして $t_{P_\sigma(A)}(M/N) \subseteqq (t_{P_\sigma(A)}(M) + N)/N$ が成り立ち，仮定から $t_A(M/N) \subseteqq (t_A(M)+N)/N$ が成り立つ. $t_A(-)$ は弱根基であるから,

$t_A(M/N) \supseteqq (t_A(M)+N)/N$ が成り立つ. よって $t_A(-)$ は σ-全射保持である.

(4)→(2): ここで σ は根基と仮定する.

そのとき $K_\sigma(A) = K(A)/\sigma(K(A)) \in \mathcal{F}_\sigma$ となる. よって $(t_A(P_\sigma(A)) + K_\sigma(A))/K_\sigma(A) = t_A(P_\sigma(A)/K_\sigma(A))$. しかし $t_A(A) = A$ であり $A \simeq P_\sigma(A)/K_\sigma(A)$ であるから $t_A(P_\sigma(A)/K_\sigma(A)) = P_\sigma(A)/K_\sigma(A)$ が従う. かくして $t_A(P_\sigma(A)) + K_\sigma(A) = P_\sigma(A)$ が成立する. $K_\sigma(A)$ は $P_\sigma(A)$ の小部分加群であるから $P_\sigma(A) = t_A(P_\sigma(A))$ が成り立つ.

(4)→(5)(a): N は加群 M の部分加群で $N \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{t_A}$ と $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ を満たすものとする. そのとき $N = t_A(N) \subseteqq t_A(M)$ と $t_A(M/N) = M/N$

が成り立つ．仮定より $t_A(M/N) = (t_A(M)+N)/N$ が成り立ち，従って $M = t_A(M)+N = t_A(M)$ が得られる．

(b): N は加群 M の部分加群で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ と $M \in \mathcal{F}_{t_A}$ を満たすものとする．そのとき次が成り立つ．$t_A(M/N) = (t_A(M)+N)/N = N/N = 0$.

(1)→(8): σ は冪等であると仮定する．そのとき $P_\sigma(A)$ は σ- 射影的である．$M \supseteq N \in \mathcal{F}_\sigma$ である加群 M, N を考える．A は σ-CQF-$3'$ 加群であるから，全射 $\oplus A_i \overset{(\varphi_i)}{\twoheadrightarrow} P_\sigma(A)$ があって $(\varphi_i)(a_i) = \sum_i \varphi_i(a_i)$ を満たす．ただし $(a_i) \in \oplus A_i$, $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_R(A_i, P_\sigma(A))$ で $A_i \cong A$ である．

次に $\mathrm{Hom}_R(A,f) = 0 \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M/N) = 0$ を示す．$\mathrm{Hom}_R(A, M/N) \neq 0$ を仮定する．そのとき $0 \neq j \in \mathrm{Hom}_R(A, M/N)$ がある．$f : M \to M/N$ は標準的全射であり，$g : P_\sigma(A) \to A$ は A の σ 射影性から引き起こされる準同型で $h : P_\sigma(A) \to M$ は $P_\sigma(A)$ の σ-射影性より引き起こされ，$jg = fh$ を満たす．

次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_\sigma(A) & \xrightarrow{g} & A & \to & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow j & & \\ 0 \to N \to & & M & \underset{f}{\to} & M/N & \to & 0 \end{array}$$

そのとき $j(x) \neq 0$ となる $0 \neq x \in A$ がある．そのとき $0 \neq y \in P_\sigma(A)$ があって $y = \sum_i \varphi_i(a_i)$ と $x = g(y) = g(\sum_i \varphi_i(a_i)) = \sum_i g(\varphi_i(a_i))$ が成り立つ．従って $0 \neq j(x) = j(g(y)) = \sum_i j(g(\varphi_i(a_i)))$ が得られ，それである a_i が A に存在し，ある φ_i が $\mathrm{Hom}_R(A, P_\sigma(A))$ に存在し $j(g(\varphi_i(a_i))) \neq 0$ となる．$jg = fh$ であるから $0 \neq j(g(\varphi_i(a_i))) = f(h(\varphi_i(a_i)))$ が成り立つ．$h\varphi_i \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ であるから $0 \neq fh\varphi_i = \mathrm{Hom}(A,f)(h\varphi_i)$ が成り立つ．しかしこれは矛盾である．よって $\mathrm{Hom}_R(A, M/N) = 0$ が得られる．

(8)→(5): ここでは σ は全射保持弱根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ を仮定する．

(a): ここでは $\mathcal{T}_{t_A}$ が拡大で閉じているという，より強い条件を示す．N は加群 M の部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ と $N \in \mathcal{T}_{t_A}$ を満たすものとする．$t_A(M)$ は $A \in \mathcal{F}_\sigma$ のコピーの直和であるから $t_A(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う．$\mathcal{F}_\sigma \ni t_A(M) \hookrightarrow M \underset{f}{\twoheadrightarrow} M/t_A(M)$ であるから $t_A(M)$ の定義より $\mathrm{Hom}_R(A,f) = 0$ が従う．よって仮定より $\mathrm{Hom}_R(A, M/t_A(M)) = 0$ が成り立ち $M/t_A(M) \in \mathcal{F}_{t_A}$ が言える．$N \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから $N = t_A(N) \subseteq t_A(M)$ が従う．$M/t_A(M)$ は $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ の剰余加群であるから $M/t_A(M) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う．$M/t_A(M) \in \mathcal{F}_{t_A}$ であったから $M/t_A(M) = 0$ となる．

(b): 加群 N は加群 M の部分加群で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ で $M \in \mathcal{F}_{t_A}$ とする．短完全列 $0 \to N \to M \xrightarrow{f} M/N \to 0$ を考える．$M \in \mathcal{F}_{t_A}$ であるから $\mathrm{Hom}_R(A,f) = 0$ が従う．よって仮定より $\mathrm{Hom}_R(A, M/N) = 0$ が成り立ち $M/N \in \mathcal{F}_{t_A}$ となることがわかる．

(5)→(2): ここでは σ は全射保持-冪等-根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ を仮定する. $\mathcal{F}_\sigma$ は拡大で閉じていて $K_\sigma(A) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $P_\sigma(A) \in \mathcal{F}_\sigma$ が得られる. $\mathcal{F}_\sigma$ は部分加群で閉じているから $t_A(P_\sigma(A)) \in \mathcal{F}_\sigma$ が成立する. $K = t_A(P_\sigma(A))$ と置く. $K = P_\sigma(A)$ を示したい. $K \subsetneqq P_\sigma(A)$ を仮定して矛盾を導く. $K_\sigma(A)$ は $P_\sigma(A)$ の小部分加群であるから $K + K_\sigma(A) \subsetneqq P_\sigma(A)$ が得られる. $A \simeq P_\sigma(A)/K_\sigma(A) \twoheadrightarrow P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+K) \neq 0$ であるから

$\mathrm{Hom}_R(A, P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+K)) \neq 0$ が得られる. よって $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+K)) \notin \mathcal{F}_{t_A}$ となる. $(K_\sigma(A)+K)/K$ は $K_\sigma(A) \in \mathcal{F}_\sigma$ の像であり $\mathcal{F}_\sigma$ は剰余加群で閉じているから $(K_\sigma(A)+K)/K \in \mathcal{F}_\sigma$ が成り立つ. 次の短完全列を考える. $0 \to (K_\sigma(A)+K)/K \to P_\sigma(A)/K \to P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+K) \to 0$. (b) の仮定より, $(P_\sigma(A)/K) \notin \mathcal{F}_{t_A}$ が従う. $X/K = t_A(P_\sigma(A)/K)(\neq 0)$ と置く. 短完全列 $0 \to K \to X \to X/K \to 0$ を考える. $K = t_A(P_\sigma(A)) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $K \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{t_A}$ が得られる. $X/K \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから 仮定 (a) より $X \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う. $X \subseteqq P_\sigma(A)$ であるから $X = t_A(X) \subseteqq t_A(P_\sigma(A)) = K$ が得られる. 従って $X = K$ を得る. $X/K = t_A(P_\sigma(A)/K) \neq 0$ であるから矛盾となる. よって $t_A(P_\sigma(A)) = K = P_\sigma(A)$ が従う.

(4)→(6): σ は根基であるとする. そのとき任意の加群 X について $K_\sigma(X) \in \mathcal{F}_\sigma$ が得られる. $M \in \mathcal{T}_{t_A}$ とする. 短完全列 $0 \to K_\sigma(M) \to P_\sigma(M) \to P_\sigma(M)/K_\sigma(M) \to 0$ を考える. $K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であり $P_\sigma(M)/K_\sigma(M) \simeq M \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから $P_\sigma(M)/K_\sigma(M) = t_A(P_\sigma(M)/K_\sigma(M)) = (t_A(P_\sigma(M))+K_\sigma(M))/K_\sigma(M)$ が従う. 従って $P_\sigma(M) = t_A(P_\sigma(M)) + K_\sigma(M)$ が得られる. $K_\sigma(M)$ は $P_\sigma(M)$ の小部分加群であるから $P_\sigma(M) = t_A(P_\sigma(M)) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う.

(6)→(5): σ は冪等であると仮定する. 任意の加群 X について $P_\sigma(X)$ は σ-射影的である.

(a): 加群 M とその部分加群 N は $N \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{t_A}$ で $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ を満たすものとする. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} & & & P_\sigma(M/N) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r, "h"'] & M/N \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

そこで g は M/N の σ-射影被覆に付随する全射であり, h は標準的な全射であり, f は $P_\sigma(M/N)$ の σ-射影性から導かれる準同型である. 仮定より $P_\sigma(M/N) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う. よって $f(P_\sigma(M/N)) = f(t_A(P_\sigma(M/N))) \subseteq t_A(M)$ が導かれる. $N \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから $N = t_A(N) \subseteq t_A(M)$ となる. そのとき次の式が成り立つ. $M/N = g(P_\sigma(M/N)) = h(f(P_\sigma(M/N))) = (f(P_\sigma(M/N))+N)/N \subseteq (t_A(M)+N)/N = t_A(M)/N \subseteq t_A(M/N) = M/N$. よって $M = t_A(M)$ が得られる.

(b): $N(\in \mathcal{F}_\sigma)$ は加群 $M(\in \mathcal{F}_{t_A})$ の部分加群とする．そのとき次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & P_\sigma(t_A(M/N)) & \xrightarrow{g} & t_A(M/N) & \to & 0 \\ & & & & f\downarrow & & \downarrow i & & \\ 0 & \to N & \to & & M & \underset{h}{\to} & M/N & \to & 0, \end{array}$$

そこで g は $t_A(M/N)$ の σ-射影被覆に付随する全射であり，i は標準的単射で，f は $P_\sigma(t_A(M/N))$ の σ-射影性により誘導される準同型である．

仮定より $P_\sigma(t_A(M/N)) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う．$M \in \mathcal{F}_{t_A}$ であるから $f=0$ が従い $ig=0$ が

得られ，$i=0$ となる．従って $t_A(M/N)=0$ が従う．

(7)→(6): σ は根基であるとする．そのとき任意の加群 M について $K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であり，$P_\sigma(M)$ は M の σ-双対本質的拡大であるから明らかに成り立つ．

(6)→(7): σ は冪等と仮定する．そのとき任意の加群 X について $P_\sigma(X)$ はいつでも σ-射影的になる．N は M 小部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものとする．次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P_\sigma(M/N) & & \\ & & & h\swarrow & \downarrow f & & \\ 0 \to N & \to & M & \underset{g}{\to} & M/N & \to & 0, \end{array}$$

そこで f は M/N の σ-射影被覆に付随する全射で，g は標準的全射で，h は $P_\sigma(M/N)$ の σ-射影性より誘導される準同型である．

g は 極小全射で f は全射であるから h もまた全射になる．仮定より $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ から $P_\sigma(M/N) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が導かれる．h は全射であるから $M \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う．

σ は 0 関手であるなら σ は全射保持-冪等根基となり A は σ-torsionfree となる．よってこのとき σ-CQF-$3'$ 加群は CQF-$3'$ 加群である．

命題 2. σ は全射保持-冪等根基とする．そのとき加群 A に関する次の条件は同値である．

(1) $\mathcal{F}_{t_A}$ は $\mathcal{F}_\sigma$-剰余加群で閉じている．

(2) $\mathcal{F}_{t_A} = \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$

証明. (1)→(2): 射影被覆に付随する $P_\sigma(A) \to A$ は全射であるから $\mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}} \subseteq \mathcal{F}_{t_A}$ が従う．次に $\mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}} \supseteq \mathcal{F}_{t_A}$ を示す．M は $\mathcal{F}_{t_A}$ の元とする．$M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ を示す．$M \notin \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ と仮定する．そのとき $\mathrm{Hom}_R(P_\sigma(A), M) \neq 0$ が成り立ち $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(A), M)$ が存在する．$\ker f \subsetneqq P_\sigma(A)$ であり $K_\sigma(A)$ は $P_\sigma(A)$ の小部分加群であるから $\ker f + K_\sigma(A) \subsetneqq P_\sigma(A)$ が従う．σ は全射保持であるから，$\mathcal{F}_\sigma$ は剰余加群で閉じている．かくして

$(K_\sigma(A)+\ker f)/\ker f \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う．よって $P_\sigma(A)/\ker f \subseteq M \in \mathcal{F}_{t_A}$ であるから $P_\sigma(A)/\ker f \in \mathcal{F}_{t_A}$ が成り立つ．次の図式を考える． $0 \to (K_\sigma(A)+\ker f)/\ker f \to P_\sigma(A)/\ker f \to P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+\ker f) \to 0$.

仮定より $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+\ker f) \in \mathcal{F}_{t_A}$ が従う． $A \in \mathcal{T}_{t_A}$ であり， $A \simeq P_\sigma(A)/K_\sigma(A) \twoheadrightarrow P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+\ker f)$ であるから $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+\ker f) \in \mathcal{T}_{t_A} \cap \mathcal{F}_{t_A}$ が成り立つ．よって $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A)+\ker f) = 0$ が導かれるがこれは矛盾である．よって $M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ が成り立つ．

(2)→(1): 仮定より $\mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ は $\mathcal{F}_\sigma$-剰余加群で閉じている． $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は $M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ の部分加群とする． $M/N \notin \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ と仮定すると $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(A), M/N)$ がある． $P_\sigma(A)$ は σ-射影的であるから， $gh = f$ を満たす $h \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(A), M)$ がある． $M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ であるから $h = 0$ となり， $f = 0$ が得られる．これは矛盾であるから $M/N \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ が従う．

補題 3. σ は冪等根基とする．加群 M とその部分加群 N について次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to K_\sigma(M) & \to & P_\sigma(M) & \xrightarrow{f} & M & \to 0 \\ & & & & \downarrow_j & \\ 0 \to K_\sigma(M/N) & \to & P_\sigma(M/N) & \underset{g}{\to} & M/N & \to 0, \end{array}$$

ただし f と g は σ-射影被覆に付随する全射で， j は標準的全射である． $P_\sigma(M)$ の σ-射影性より $jf = gh$ を満たす $h : P_\sigma(M) \to P_\sigma(M/N)$ が存在する．

そのとき次が成り立つ．

(1) M が M/N の σ-双対本質的拡大なら， $h : P_\sigma(M) \to P_\sigma(M/N)$ は同型である．

(2) σ が 全射保持で $h : P_\sigma(M) \to P_\sigma(M/N)$ が同型であるなら M は M/N の σ-双対本質的拡大である．

証明. (1): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は M の小部分加群とする． jf は全射であり g は極小全射であるから， h もまた全射である． $j(f(\ker h)) = g(h(\ker h)) = g(0) = 0$ であるから $f(\ker h) \subseteq \ker j = N \in \mathcal{F}_\sigma$ となり， $f(\ker h) \in \mathcal{F}_\sigma$ が得られる． $f|_{\ker h}$ を f の $\ker h$ への制限写像とする．そのとき次式が成り立つ． $\ker(f|_{\ker h}) = \ker h \cap \ker f = \ker h \cap K_\sigma(M) \subseteq K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$． 次の短完全列を考える． $0 \to \ker f|_{\ker h} \to \ker h \to f(\ker h) \to 0$． $\mathcal{F}_\sigma$ は拡大で閉じているから $\ker h \in \mathcal{F}_\sigma$ が成り立つ． $P_\sigma(M/N)$ は σ- 射影的であるから短完全列 $0 \to \ker h \to P_\sigma(M) \to P_\sigma(M/N) \to 0$ は分解する．従ってある部分加群 L が $P_\sigma(M)$ にあって $P_\sigma(M) = L \oplus \ker h$ が成り立つ．それで $f(P_\sigma(M)) = f(L) + f(\ker h)$ が成り立つ． $f(\ker h) \subseteq N$ であり $f(P_\sigma(M)) = M$ であるから $M = f(L) + N$ が成り立つ． N は M の小部分加群であるから $M = f(L)$ が従う． f は極小全射であるから $P_\sigma(M) = L$ が成り立ち $\ker h = 0$ となる．従って $h : P_\sigma(M) \simeq P_\sigma(M/N)$ となる．

(2): $h : P_\sigma(M) \simeq P_\sigma(M/N)$ と仮定する．上の図式と h の可換性より，$h(f^{-1}(N)) \subseteq K_\sigma(M/N) \in \mathcal{F}_\sigma$ が成り立つ．h は同型であるから $f^{-1}(N) \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う．$f|_{f^{-1}(N)} : f^{-1}(N) \to N \to 0$ であり σ は全射保持弱根基であるから $N \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う．

次に N は M の小部分加群であることを示す．K は M の部分加群で $M = N + K$ が成り立つものとする．もし $f^{-1}(K) \subsetneqq P_\sigma(M)$ であるなら h は同型であるから $h(f^{-1}(K)) \subsetneqq P_\sigma(M/N)$ が成り立つ．$g(h(f^{-1}(K))) = j(f(f^{-1}(K))) = j(K) = (K+N)/N = M/N$ が成立するが g は極小全射であるから矛盾を引き起こす．従って $f^{-1}(K) = P_\sigma(M)$ となる．よって $K = f(f^{-1}(K)) = f(P_\sigma(M)) = M$ が成り立ち N は M の小部分加群である．

命題 4. σ は冪等根基とする．σ-CQF-$3'$ 加群全体は σ-双対本質的拡大で閉じている．

証明. $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は $P_\sigma(M/N)$ が M/N で生成されるような加群 M の部分加群とする．そのとき補題 3 より次が成り立つ．$\oplus M \twoheadrightarrow \oplus(M/N) \twoheadrightarrow P_\sigma(M/N) \simeq P_\sigma(M)$．よって M は σ-CQF - $3'$ 加群である．

2. σ-全射保持-弱根基とσ-双対遺伝的捩れ理論

ここでは捩れ理論を重複して用いて全射保持-弱根基を拡張する．加群 A が σ-CQF-$3'$ ならば t_A は定理 1 より σ-全射保持-弱根基である．

定理 5. σ は冪等根基とする．弱根基 t に関する次の条件を考える．
(1) t は σ-全射保持である．
(2) $\mathcal{T}_t$ は σ-双対本質的拡大で閉じている．
(3) $\mathcal{T}_t$ は σ-射影被覆で閉じている．
(4) (i) $\mathcal{F}_t$ は $\mathcal{F}_\sigma$-剰余加群で閉じている．
(ii) $\mathcal{T}_t$ は $\mathcal{F}_\sigma$-拡大で閉じている．

そのとき (4)←(1)→(2)⟷(3) が成り立つ．
もし t が冪等ならば (3)→(1) が成り立つ．
σ が全射保持で t は根基ならば (4)→(1) が成り立つ．
よって σ が全射保持冪等根基で t が冪等根基なら全ての条件は同値である．

証明. σ は冪等根基であるから任意の加群 M は σ-射影被覆を持ち $P_\sigma(M)$ で与えられる．

(1)→(2): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は加群 M の小部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_t$ とする．よって $M/N = t(M/N) = (t(M)+N)/N$ が成り立ち，$M = t(M) + N$ が得られる．N は M の小部分加群であるから $M = t(M)$ が得られる．

(2)→(3): 明らかである．

(3)→(2): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は M の小部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_t$ を満たすものとする. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} & & & P_\sigma(M/N) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r, "g"'] & M/N \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

そこで f は M/N の σ-射影被覆に付随する全射とし, g は標準的全射で h は $P_\sigma(M/N)$ の σ-射影性から導かれる写像とする.

f は全射で g は極小全射であるから, h は全射である. 仮定により $P_\sigma(M/N) \in \mathcal{T}_t$ が得られ, 従って $M \in \mathcal{T}_t$ となる.

(1)→(4): これは定理 1 の (4)→(5) の証明とほとんど同じである.

(3)→(1): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は加群 M の部分加群で t は冪等弱根基とする. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} & & & P_\sigma(t(M/N)) \arrow[d, "f"] & \\ & & t(M) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & t(M/N) \arrow[d, "i"] & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"'] & M \arrow[r, "g"'] & M/N \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

ただし i, j と u は標準的単射であり, f は $t(M/N)$ の σ-射影被覆に付随する全射で g は M から M/N への標準的全射とする. 仮定より $P_\sigma(t(M/N)) \in \mathcal{T}_t$ である. $N \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $P_\sigma(t(M/N))$ の σ-射影性より

$h \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(t(M/N)), M)$ が存在して $if = gh$ が成り立つ.

$h(P_\sigma(t(M/N))) = h(t(P_\sigma(t(M/N)))) \subseteq t(M)$ であるから

$h \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(t(M/N)), t(M))$ である. $g(t(M)) \subseteq t(M/N)$ であるから g は $f = g'h$ である $g' \in \mathrm{Hom}_R(t(M), t(M/N))$ を誘導する. f は全射であるから, g' もまた全射である. よって $(t(M)+N)/N = g'(t(M)) = t(M/N)$ が得られる.

(4)→(1): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は加群 M の部分加群で t は根基で σ は全射保持とする. そのとき次の式が成り立つ. $(N+t(M))/t(M) \simeq N/(N \cap t(M)) \leftarrow N \in \mathcal{F}_\sigma$. 次の短完全列を考える. $0 \to (N+t(M))/t(M) \to M/t(M) \to M/(N+t(M)) \to 0$. $M/t(M) \in \mathcal{F}_t$ であるから仮定 (i) より $M/(N+t(M)) \in \mathcal{F}_t$ が従う. よって $(M/N)/((N+t(M))/N) \in \mathcal{F}_t$ となり, $t(M/N) \subseteqq (N+t(M))/N$ が成り立つ. t は弱根基であるから, $t(M/N) \supseteqq (N+t(M))/N$ が成り立つので $t(M/N) = (N+t(M))/N$ が従う.

命題 6. σ は全射保持根基で t は弱根基とする．そのとき次は同値である．

(1) N は M の部分加群で $M \supseteq N \supseteq t(M)$ を満たすものとする．このとき $N/t(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ なら $M/N \in \mathcal{F}_t$ が成り立つ．

(2) t は根基で σ-全射保存弱根基である．

証明.(1)→(2): N の代わりに $t(M)$ を用いる．そのとき $M/t(M) \in \mathcal{F}_t$ が成り立ち t は根基となる．

次に「$N \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow t(M/N) = (t(M)+N)/N$」を示したい．$N$ の代わりに $N + t(M)$ を使う．次の短完全列を考える． $0 \to (N + t(M))/t(M) \to M/t(M) \to M/(N + t(M)) \to 0$.

「$(N + t(M))/t(M) \simeq N/(N \cap t(M)) \leftarrow N \in \mathcal{F}_\sigma$」であるから $(N + t(M))/t(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う．よって仮定により $(M/(N + t(M)) \in \mathcal{F}_t$ が従い同型であるから $(M/N)/((N + t(M))/N) \in \mathcal{F}_t$ となる．よって $t(M/N) \subseteq (N + t(M))/N$ が従う．弱根基の性質より，$t(M/N) \supseteq (N + t(M))/N$ は成り立つから $t(M/N) = (N + t(M))/N$ は成り立つ．

(2)→(1): N は M の部分加群で $M \supseteq N \supseteq t(M)$ で $N/t(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものとする．次の完全列を考える．$0 \to N/t(M) \to M/t(M) \to M/N \to 0$. t は σ-全射保持根基であるから，

$\{t(M/t(M)) + N/t(M)\}/(N/t(M)) \simeq t(M/N)$ である． 従って $0 \simeq t(M/N)$ がわかる．

参考文献

1. L. Bican, **QF-3′ modules and rings, Commentationes Mathematicae**, Universitatis Carolinae, 14(1973), 295-301.

2. P. E. Bland, **Perfect torsion theories**, Proc. Amer. Math. Soc. 41(1973), 349-355.

3. P. E. Bland, **Divisible and codivisible modules**, Math. Scand. 34(1974), 153-161

4. R. R. Colby and E. A. Rutter Jr., **Semi-primary QF-3′ rings,** Nagoya Math. J. 32(1968), 253-258.

5. S. E. Dickson, **A torsion theory for abelian categories**, Trans. Amer. Math. Soc. 121(1966), 223-235.

6. J. S. Golan, "**Localization of Noncommutative Rings**". Marcel Dekker, New York, 1975.

7. J. P. Jans, H. Y. Mochizuki and L. E. T. Wu, **A characterization of QF-3 rings**, Nagoya Math. J. 27(1966), 7-13.

8. J. P. Jans, H. Y. Mochizuki, **Torsion associated with duality**, Tohoku Math. J. 32 (1972), 449-452.

9. Y. Kurata and H. Katayama, **On a generalization of QF-3′ rings**, Osaka Journal of Mathematics, 13(1976), 407-418.

10. F. F. Mbuntum and K. Varadarajan, **Half exact preradicals**, Comm. in Algebra, 5(1977), 555-590.

11. K. Ohtake, **Colocalization and Localization**, Journal of pure and applied algebra 11(1977), 217-241.

12. K. Ohtake, **Equivalence between colocalization and localization in abelian categories with applications to the theory of modules**, Journal of Algebra 79(1982),169-205.

13. Bo Stenstrom, "**Rings and Modules of Quotients**". Springer-Verlag, Berlin, 1975.

14. C. Vinsonhaler, **A note on two generalizations of QF-3**, Pac. J. Math. 40(1972), 229-233.

15. Y. Takehana, **On a generalization of CQF-3′ modules and cohereditary torsion theories**, to appear in Math. J. Okayama Univ.

16. Y. Takehana, **On a generalization of QF-3′ modules and hereditary torsion theories**, to appear in Math. J. Okayama Univ.

General Education, Hakodate National College of Technology,
14-1, Tokura-cho, Hakodate-shi, Hokkaido, 042-8501 Japan
Email takehana@hakodate-ct.ac.jp