

カルマン渦列の消滅と再生成

Annihilation and reincarnation of Karman's vortex street

同志社大学工学研究科 赤嶺博史 (Hiroshi Akamine)
同志社大学理工学部 水島二郎 (Jiro Mizushima)
同志社大学理工学部 大橋俊介 (Shunsuke Ohashi)
同志社大学理工学部 杉田翔 (Kakeru Sugita)

1 はじめに

柱状物体を過ぎる流れ場中には、2列の互い違いの千鳥配列をした渦が生じることがよく知られている。この渦列は、およそ100年前に Bénard[1] によって実験的に詳しく調べられ、Kármán[2] によって、非粘性流体力学を用いて理論的に調べられた。そのため、今日ではこの渦列はベナール・カルマン渦列と呼ばれており、簡潔にカルマン渦列とも呼ばれる。

円柱後流に生じるカルマン渦列について多くの研究が行われてきたが、それらの研究は円柱近傍の流れに集中していた。1959年に Taneda[3] は静止流体中に円柱を曳航することにより、円柱直径の数100倍程度の後方まで可視化を行い、カルマン渦列中の渦間隔の変化を調べた。その結果、円柱(直径 d)の後方に生じるカルマン渦列は下流へ流されていくが、円柱後方 $50d \sim 100d$ の位置まで来ると渦列が消滅し、数 $100d$ 後方で再び現れるということを発見した。Tanedaはこの渦列の消滅は渦配置の不安定性により生じ、下流へ流される渦が再配置するために起こる現象であると考えた。また、渦列の消滅と再生は何度も繰り返し生じるものであると予想した。ここでは、円柱ごく近傍から生じる渦列を第1渦列と呼び、第1渦列が消滅した位置よりさらに後流に再び現れる渦列を第2渦列と呼び、第3渦列以降については考えないことにする。

第1渦列が消滅し、第2渦列が発生する現象については Taneda の報告以降、多くの研究が行われてきた。それらの研究の中でも、Durgin and Karlsson[4] は渦列を生じる円柱の後方にそれと直交するように大きな円柱を置くことにより、渦列の移流速度を人為的に遅くする詳細な実験を行い、

第1渦列の消滅と生成を定量的に調べた。また、第1渦列の消滅について非粘性渦モデルを考え、渦領域の変形を調べた結果、2列に並ぶ渦列における流れ方向渦間隔を h とし、流れと垂直方向の間隔を a とすると、 $a/h > 0.366$ のときには各渦は他の渦との相互作用によって流れ方向に引き延ばされた楕円形渦となり、引き延ばされた楕円渦が自己誘起速度で回転し合体することにより、渦列は消滅してほぼ一様な剪断速度場になるという結論を得た。さらに、彼らは平板を過ぎる流れの線形安定性を調べた Sato and Kuriki[5] の論文を引用し、平板を過ぎる後流の速度場(ウェイク)と渦列が消滅することによってできる速度場とを比較し、第2渦列はこの一様剪断速度場の不安定性によるものであると予想した。

第2渦列は第1渦列の再配列によるものではなく、剪断流の不安定性によるという Durgin and Karlsson[4] の主張を支持する実験結果が Cimbala, Nagib and Rosho[6] によって報告されている。Cimbala *et al.* は流れの可視化と熱線流速計による詳細な実験を行い、円柱後流中の振動数を測定した。また、彼らは下流の各位置における平均流速分布を求め、その速度分布をもつ平行流に対する非粘性安定性解析を行うことにより不安定攪乱の振動数を評価し、実験結果と比較した。その結果、第2渦列は第1渦列が消滅してできた剪断流の線形不安定性により生じると結論した。この結論は、Karasudani and Funakoshi[7] によっても確かめられた。彼らは実験を行い、渦が下流へ流されるにしたがって、流れと垂直方向の渦間隔が広がることを確かめ、Durgin and Karlsson の実験結果を検証した。また、離散渦糸法による数値シミュレーションを行い、渦列の消滅と再生を確認し、それま

で行われてきた実験結果との比較を行った。こうして彼らもまた第2渦列の生成は第1渦列が消滅してできた剪断流の不安定性によると予想した。

第2渦列が第1渦列中の渦の合体や再配列によって生じると主張する研究結果もある。Matui and Okude[8]は流れの可視化と熱線流速計による測定を行い、第1渦列中の渦が合体することにより、第2渦列が生じるという観測結果を得た。また、流れ場中に外乱として音を加えると、音の振動数に依存して2つまたは3つの渦が合体するという実験結果を得ている。ただし、可視化写真から渦の合体を議論することには注意が必要であるという指摘もある[6]

このように、現在では第1渦列の消滅はその配置の不安定性によって起こり、第2渦列はその結果としてできる平均剪断流の線形不安定性によって生じるという結論が支配的であるが、それらの論拠はまだ十分ではない。たとえば、Takemoto and Mizushima[9]は非平行流の不安定性にはパッシブモード不安定性とアクティブモード不安定性があることを明らかにし、アクティブモード不安定性は全体不安定性を導くが、もし外乱があれば亜臨界レイノルズ数においてもパッシブモード不安定性が生じうることを示した。したがって、円柱後流に第1渦列による振動源があれば、第2渦列が容易に励起される可能性がある。

円柱を過ぎる流れにおける第2渦列の発生は円柱から非常に離れた位置(円柱直径の100倍以上後方)で生じるため、実験的研究においても数値シミュレーションにおいても精度の低下という問題が伴う。ところが、最近、Inasawa and Asai [10]は角柱を過ぎる流れから生じる音の伝播について、圧縮性流れの数値シミュレーションを行い、角柱後流においてもカルマン渦列の消滅と再生が起こることを確かめた。彼らの計算では、角柱の流れ方向の辺長を w 、流れと垂直な辺長を d とすると、角柱のアスペクト比 $A = w/d$ が1では彼らの計算範囲においては渦列の消滅は観測されず、 $A = 0.4$ のときは渦列の消滅と再生が観測された。アスペクト比 A の値が0.5程度であれば、第2渦列の発生は角柱の比較的近傍で生じ、第1渦列および第2渦列の強さが大きく減衰しないために数値シミュレーションでも実験でも精度の低下が小さくなる。

本研究では、角柱の後流において渦が消滅する

機構と渦が再生する機構について数値シミュレーションおよび線形安定性解析によって明らかにする。円柱ではなく角柱を選ぶ理由は、先に説明したように、パラメータ A の値によって、渦列の消滅と再生が生じる場合と生じない場合が存在し、その物理的理由を調べるのに適しているからである。

2 問題の定式化

2.1 基礎方程式と境界条件

流速 U の一様流中におかれた角柱を過ぎる流れを考える。角柱の流れ方向の辺長を w 、流れと垂直な辺長を d として、角柱のアスペクト比を $A = w/d$ で定義する。角柱の後端中央を原点 O として、流れ方向に x 軸をとり、それと垂直に y 軸をとる(図1)。流れは非圧縮性2次元流であると仮定し、流れ関数 $\psi(x, y, t)$ と渦度 $\omega(x, y, t)$ を導入する。流れを支配する基礎方程式は ψ と ω についての渦度輸送方程式とポアソン方程式であり、角柱の辺長 d を代表長さにとり、一様速度 U を代表速度にとって無次元化すると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\psi, \omega) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega, \quad (1)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (2)$$

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

と表せる。ここで、 $\text{Re} \equiv Ud/\nu$ はレイノルズ数であり、 ν は流体の動粘性係数である。

流れの境界条件として、角柱の柱状物体表面では滑りなし条件

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

を課し、上流側と流れに垂直方向の十分遠方では流速 U の一様流を仮定し、下流での流出条件には、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

を用いる。

2.2 対称定常解

レイノルズ数が小さいとき、流れ場は定常で角柱の中心を通り流れに平行な中心線(x 軸)に対し

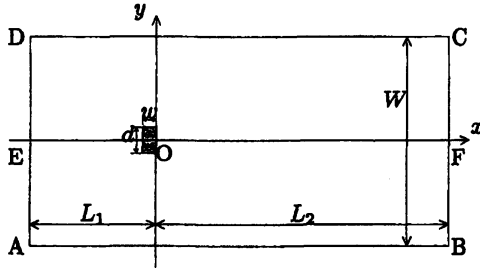


図 1: 角柱の配置と座標系。

て対称である。この対称流は、レイノルズ数に依らず、基礎方程式である渦度輸送方程式とポアソン方程式の定常解となっているが、レイノルズ数がある臨界よりも大きいときは対称流は不安定となり、実験でも数値シミュレーションでも実現されない。この対称定常解を $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ とする。この対称定常解がこれから安定性解析を行う対象となる主流であり、対称性 $\bar{\psi}(x, -y) = -\bar{\psi}(x, y)$ および $\bar{\omega}(x, -y) = -\bar{\omega}(x, y)$ を課すことにより、不安定な定常解をも数値シミュレーションにより計算で求めることができる。あるいは、(1)の時間微分項を省略して得られる定常方程式

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\omega} = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \bar{\psi} = -\bar{\omega} \quad (6)$$

を解くことによっても対称定常解を求めることができる。図 2 は角柱の対称定常解の例であり、この図では $\text{Re} = 50$ のときの流れ場の流線が $-10 \leq x \leq 40$ および $-10 \leq y \leq 10$ の範囲だけ描かれているが、数値計算の領域はこれよりも十分に大きい。このレイノルズ数 ($\text{Re} = 50$) では円柱後方の双子渦の長さはおおよそ $3.0d$ であり、不安定な流れである。

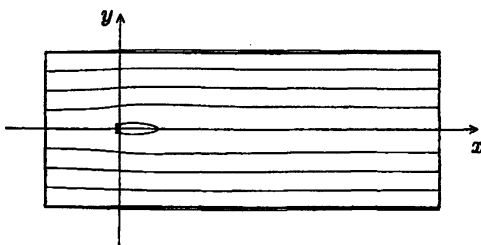


図 2: 対称定常流 (流線). $\text{Re} = 50$.

2.3 時間平均流

後で説明するように、流れ場はレイノルズ数がある臨界値より大きくなると振動流へ遷移し、第 1 渦列と第 2 渦列を形成する。この第 2 渦列は第 1 渦列が消滅してできたほぼ一様な剪断速度場の不安定性によるものであるという考えが支配的である [4]。剪断速度場の不安定性を調べるために、流れ場の時間平均流 $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ を求める。この時間平均流が安定性解析を行う対象となる主流である。 $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ を求めるためには、第 1 渦列と第 2 渦列の特徴を表す代表点 $P_1 ((x, y) = (20, 0))$ および $P_2 ((x, y) = (100, 0))$ のそれぞれの点における速度の振動周期から第 1 渦列の振動周期 T_1 と第 2 渦列の振動周期 T_2 を評価する。それらは必ずしも有理数比とはならないが、 T_1 と T_2 の最小公倍数周期 T の近似値を求め、その 5 倍周期にわたる時間平均を $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ とする。

2.4 対称定常解と時間平均流の線形安定性解析

対称定常解はレイノルズ数に依らず存在するが、レイノルズ数がある臨界値よりも大きくなるときには、流れの中に存在する攪乱の影響により不安定となって振動流へと遷移する。攪乱を流れ関数と渦度により、 ω' および ψ' と表すと、流れ場は対称定常流と攪乱からなるので、流れ場を表す流れ関数と渦度はそれぞれ、 $\omega = \bar{\omega} + \omega'$ および $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ となる。これらの式を基礎方程式 (1) と (2) に代入し、対称定常流 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ の式 (5) と (6) を引き、 (ψ', ω') についての非線形項を無視すると、攪乱 (ψ', ω') についての線形方程式

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = J(\psi', \bar{\omega}) + J(\bar{\psi}, \omega') + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega', \quad (7)$$

$$\Delta \psi' = -\omega' \quad (8)$$

が得られる。この線形攪乱方程式を初期値・境界値問題として数値的に解くことにより、速度攪乱の空間的・時間的変化を観察することができる。時間平均流の安定性解析では、 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ の代わりに $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ を用いる。

あるいは、主流の線形安定性を固有値問題として定式化することも可能である。そのときは、攪乱の時間依存性を指数関数と仮定して $\psi' = \hat{\psi}(x, y) \exp(\lambda t)$, $\omega' = \hat{\omega}(x, y) \exp(\lambda t)$ と表す。こ

ここで、 λ は複素線形増幅率と呼ばれ、一般に複素数であり、その実部 λ_r と虚部 λ_i はそれぞれ攪乱の増幅率と角速度 (振動数) を表している。これらを線形攪乱方程式 (7) と (8) に代入すると、 $\hat{\psi}(x, y)$ と $\hat{\omega}(x, y)$ に対する方程式

$$\lambda \hat{\omega} = J(\hat{\psi}, \hat{\omega}) + J(\bar{\psi}, \hat{\omega}) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \hat{\omega}, \quad (9)$$

$$\Delta \hat{\psi} = -\hat{\omega} \quad (10)$$

が得られ、これらの方程式 (9) と (10) を境界条件の下で解き、固有値および固有関数を求める。

攪乱 (ψ', ω') あるいは $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ の境界条件として、角柱表面では次の滑りなし条件:

$$u = \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

を用い、上流と流れに垂直方向に十分に離れた計算領域側面境界では $\psi' = \omega' = 0$ を課し、下流での流出条件には、

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

を用いる。ただし、 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ の境界条件については式 (11) および (12) で、 (ψ', ω') を $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ で置き換える。ここでも、時間平均流の安定性解析では、 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ の代わりに $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ を用いる。

3 数値計算法

3.1 数値シミュレーション

数値シミュレーションでは、差分法を用い初期値・境界値問題として基礎方程式 (1) と (2) を数値的に解く。計算領域を x 座標および y 座標について、等間隔 δx および δy の正方格子 ($\delta x = \delta y$) に分割し、渦度輸送方程式 (1) の時間微分を 1 次精度の前進オイラー法で近似し、粘性項および非線形項の空間微分を 2 次精度の差分で近似する。また、ポアソン方程式 (2) は空間微分を 2 次精度の差分を用いて近似し、SOR 法 (Successive Over Relaxation Method) を用いて逐次代入法により解を求める。このとき、収束判定は各格子点 $(i\delta x, j\delta y)$ における時刻 $n\delta t$ での流れ関数 $\psi(i\delta x, j\delta y, n\delta t)$ の $k-1$ 回目の逐次解 $\psi_{i,j}^{n(k-1)}$ と k 回目の値 $\psi_{i,j}^{n(k)}$ の絶対誤差の最大値が 10^{-6} より小さくなったときに解は収束したとみなす。

時間刻みは主に $\delta t = 0.001$ を用い、空間刻みを $\delta x = \delta y = 0.1$ とした。これらの値をさらに小さくして計算を行ったが、 $\delta x = \delta y = 0.05$ の場合との流速の誤差は最大で 2% であり、計算精度はこれらの値で十分である確認している。

線形攪乱方程式 (7) と (8) の数値シミュレーションも式 (1) と (2) の場合と同様に行う。ただし、初期条件には式 (1) と (2) の数値シミュレーションの結果 (ψ, ω) から対称定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ を引いた解を用い、上流および計算領域側面での境界条件には $\psi' = 0$ および $\omega' = 0$ を適用する。

3.2 対称定常流の数値計算と対称定常流および時間平均流の線形安定性

定常流の数値計算と線形安定性についても数値シミュレーションと同様に差分法を用いる。方程式 (5) と (6) における空間微分をすべて 2 次精度の差分で近似し、これらを SOR 法による反復法で解くことにより対称定常解を求める。SOR 法における解の収束判定は数値シミュレーションの場合とほぼ同様であるが、収束条件として、 $k-1$ 回目の逐次解 $\psi_{i,j}^{(k-1)}$ と k 回目の値 $\psi_{i,j}^{(k)}$ の絶対誤差の最大値が 10^{-8} より小さくなったときに解は収束したとみなした。

4 カルマン渦列の消滅・再生成

4.1 流れパターン

Inasawa and Asai [10] は、角柱を過ぎる圧縮性流れの数値シミュレーションを行い、角柱の流れ方向の辺長と流れと垂直な辺長の比 (アスペクト比) $A = w/d$ が 1 のとき、計算領域内全体でカルマン渦列を観察したが、0.4 のときには、角柱後方の比較的短距離の位置で渦列の消滅と再生成を観察した。

ここでは、角柱を過ぎる非圧縮性流れの数値シミュレーションを行って、彼らの計算結果を確かめる。図 3 は $\text{Re} = 80$ における $A = 0.5$ と $A = 1$ の角柱後流の渦度分布 (等高線) であり、 $x = -10$ から $x = 100$ までの範囲が描かれている。図 3(a) ($A = 1$) では計算領域内でカルマン渦列が見られるが、図 3(b) ($A = 0.5$) では、角柱の後方約 40d 近辺からカルマン渦列が崩壊し、弱い剪断流へと

変化している。計算領域を拡大すれば正方形角柱 $A = 1$ の場合にもカルマン渦列の消滅と再生は観測できると思われるが、本研究では計算時間を短縮する点から角柱の縦と横の長さの比が $A = 0.5$ の角柱についてカルマン渦列の消滅と再生について調べる。

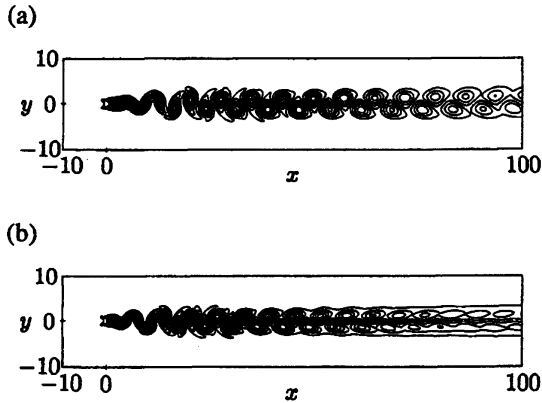


図 3: 流れ場 (渦度, $Re = 80$). (a) $A = 1$. (b) $A = 0.5$.

アスペクト比 $A = 0.5$ の角柱を過ぎる流れ場を $Re = 30$ から 140 まで間のいくつかのレイノルズ数について、数値シミュレーションにより求めた。その代表的な流れ場は図 4 のようになる。図 4(a) はレイノルズ数 $Re = 30$ のときの流れ場 (流線) であり、流れは角柱の中心を通り x 軸に対して対称で定常な対称定常流である。この流れ場に対応する渦度場は図 4(b) であり、孤立した渦は存在せず、剪断層が見られるのみである。 $Re = 40$ では流れは対称性を失い、角柱後方で振動が生じている (図 4(c))。このとき、振動は角柱後方の全領域 (計算領域の全ての範囲) に及んでいる。図 4(d) の渦度分布から分かるように、カルマン渦列が全領域で確認できる。レイノルズ数が大きくなるにしたがって、角柱後方のある位置より下流で振動が小さくなり、レイノルズ数が $Re = 90$ (図 4(e)) では、角柱の約 $40d$ 下流 ($x = 40$) で、振動がほぼ消滅しており、図 4(f) に見られるように、カルマン渦列もほぼ同じ位置では消滅し、単純な剪断層へと変化している。したがって、カルマン渦列の消滅は $Re = 40$ と 90 の間で起こることになる。さらにレイノルズ数が大きくなり $Re = 120$ になると、カルマン渦列の消滅していた領域の下流側で第 2 渦列が形成される (図 4(h))。

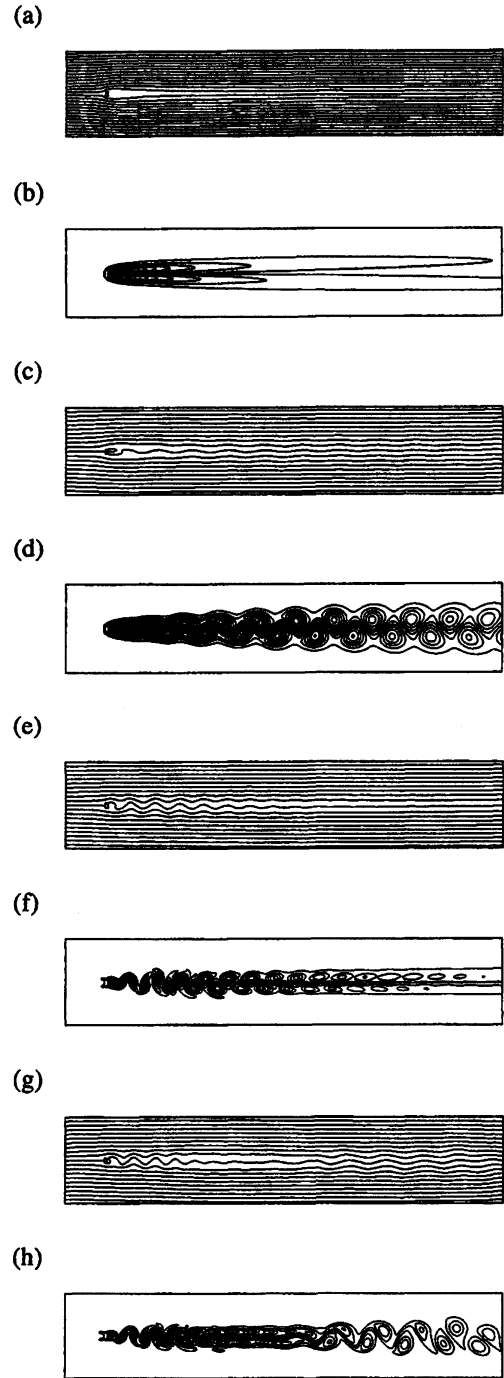


図 4: 流れ場。速度場 (流線) と渦度場 (渦度の等高線)。 $A = 0.5$ 。(a), (c), (e), (g) 速度場 (流線)。(b), (d), (f), (h) 渦度場 (渦度の等高線)。(a), (b) $Re = 30$ 。(c), (d) $Re = 40$ 。(e), (f) $Re = 90$ 。(g), (h) $Re = 120$ 。

次に、カルマン渦列を形成する渦の形状を見ていこう。レイノルズ数 $Re \sim 40$ (図 4(d)) では、角柱直後から下流の $20d \sim 30d$ までは、渦の形は

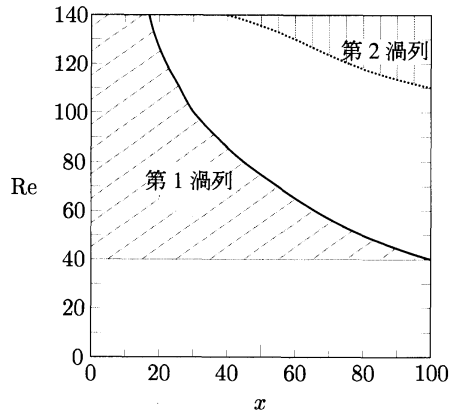


図5: 第1渦列の存在範囲と第2渦列の存在範囲。

流れ方向に長い楕円であり、それより下流では円形あるいは三角形に近い形をもつ。レイノルズ数が90(図4(f))になると、渦の形状は角柱直後で流れと垂直方向に長い楕円であるが、 $40d \sim 50d$ で流れ方向に長くなり、 $60d$ あたりで横(x 方向)に伸びた前後の渦が合体し、帯状の剪断流が現れる。 $Re = 120$ では、第1渦列内の渦は $Re = 90$ のときとあまり変化はないが、第2渦列の渦は第1渦列の渦より大きく、それらの間隔も広い。これらの結果はDurgin and Karlsson[4]の説明やKarasudani and Funakoshi [7]の実験および計算結果と定性的に一致している。

数値シミュレーションにおいて、第1渦列と第2渦列が観測された領域を図示すると、図5のようになる。第1渦列が生じるのは臨界レイノルズ数 $Re_c \sim 40$ より大きなレイノルズ数であり、 $Re \sim 40$ ではおよそ $x = 100$ までは観測されているが、レイノルズ数が大きくなると観測される領域の下流端が上流側へ移動しその長さが短くなる。第2渦列は $Re \sim 100$ 程度から現れ、その上流端はレイノルズ数が大きくなるにつれて上流へ移動する。

4.2 分岐図

数値シミュレーションにより、第1渦列の発生と消滅および第2渦列の生成を確認した。この節では、これらの渦列が発生または消滅の原因とその臨界レイノルズ数を調べる。2つの渦列が発生する臨界レイノルズ数を調べるために、角柱後方の流れの振動の大きさを表す代表的な物理量と

して、角柱後方の x 軸上 $x_1 = 20$ と $x_2 = 100$ における y 方向速度 v_1 および v_2 の最大振動振幅 a_1 と a_2 に着目する。観測点 x_1 は、角柱の比較的近傍で、第1渦列で生じる流れの振動振幅が大きくなる点であり、測定点 x_2 は第2渦列による振動が支配的となる点である。

振動振幅 a_1 と a_2 をレイノルズ数 Re の関数として描くと、図6のようになる。この図で、実線は観測点 $x_1 = 20$ での v_1 の振動振幅 a_1 、破線は $x_2 = 100$ での v_2 の振幅 a_2 を表している。実線は $a_1 \propto (Re - Re_c)^{1/2}$ ($Re_c = 39.7$)の関係を満たしており、この図は解のホップ分岐を表している。すなわち、位置 x_1 でも x_2 においても、 Re_c までは y 方向流速は0であり、対称な定常流であるが、レイノルズ数が Re_c よりも大きくなると、 y 方向流速が振動することから、対称性が破れ振動流へ遷移する。すなわち第1渦列が生じる。位置 x_2 で観測する v_2 の振幅 a_2 は、第1渦列が生じる臨界レイノルズ数 Re_c で生じるホップ分岐により、 $Re > Re_c$ で有限の値となる。振幅 a_2 は Re の増加と共に大きくなるが、その後少しずつ減少し、 $Re \sim 90$ 程度になると a_2 はほぼ0となる。すなわち、位置 $x_2 = 100$ ではカルマン渦列は消滅することになる。さらに、レイノルズ数が $Re \sim 100$ 程度になると、 a_2 は再び有限の値をもち、第2渦列が生じていることがわかる。

図6より、流れ場は $Re_c = 39.7$ で対称定常解の不安定性により解のホップ分岐を生じ、角柱後方全体にカルマン渦列が形成されることがわかった。また、レイノルズ数が大きくなるにしたがって下流からカルマン渦列が消滅し、 $Re = 100$ を超えると、第2渦列が生じるということがわかったが、第2渦列がどのようなメカニズムで生み出されるのか不明である。考えられる可能性としては、対称定常解の第2不安定モードとして第2渦列が生じる可能性と、ホップ分岐により生じた第1渦列を含む振動流解が再び不安定となって第2渦列を含む振動流が生み出される可能性と、カルマン渦列の消滅領域の時間平均流が不安定となって第2渦列が生じる可能性である。

4.3 定常解の線形安定性解析

数値シミュレーションによって得られた流れ場と分岐図から、アスペクト比 $A = 0.5$ の角柱を過

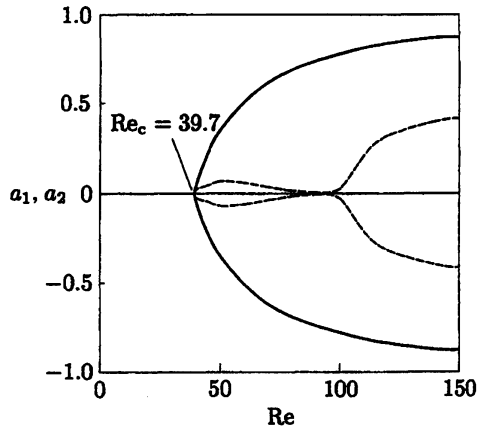


図 6: 振動振幅 a_1 と a_2 (分岐図). $A = 0.5$. 実線: a_1 ($x_1 = 20$). 破線: a_2 ($x_2 = 100$).

きる流れでは $Re_c = 39.7$ で第 1 渦列が形成され、 $Re \sim 100$ で第 2 渦列が形成されることがわかった。この節では、第 1 渦列の消滅する原因と第 2 渦列が生じる理由を突きとめるため対称定常流の線形安定性解析を行う。レイノルズ数が大きくなるにつれて下流でカルマン渦列が消滅し、第 2 渦列が形成されることから、対称定常流の線形不安定モードとして、第 1 固有モードが第 1 渦列を誘起し、第 2 固有モードが第 2 渦列を誘起する可能性もある。これより、それぞれの渦列が発生するレイノルズ数付近での対称定常流に対する線形安定性を調べる。

流れの線形安定性を調べるため、方程式 (5) と (6) を数値的に解き、対称定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ を求め、方程式 (9) と (10) および境界条件 (11) と (12) および上流と計算領域側面での境界条件からなる固有値問題を解く。得られた固有値 λ の実部 λ_r は線形増幅率、虚部 λ_i は振動数を表す。各レイノルズ数について固有値を計算すると、 λ_r はレイノルズ数の関数として図 7 のようになる。 $\lambda_r > 0$ ならば対称定常流は不安定であり、 $\lambda_r < 0$ であれば安定である。また、 $\lambda_r = 0$ となるレイノルズ数が臨界レイノルズ数 Re_c であり、図 7 より、臨界レイノルズ数は $Re_c = 38.2$ となった。この値は数値シミュレーションによって得られた第 1 回目のホップ分岐点 $Re_c = 39.7$ と計算精度の範囲内で一致している。

固有値問題の数値計算により得られる固有関数 $\hat{\omega}$ は x 軸上の点 P_1 ($(x, y) = (20, 0)$) において、

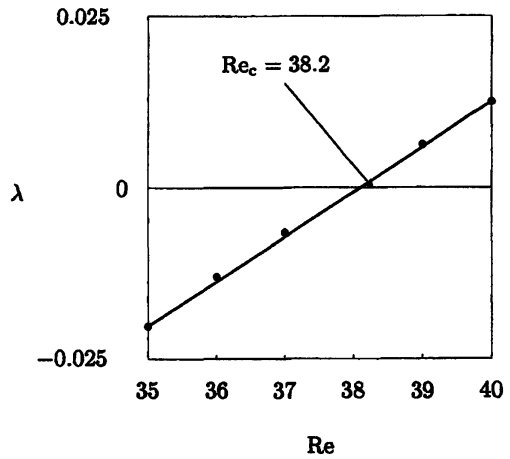


図 7: 線形増幅率 λ_r

$\hat{\omega}_r = 1$ となるように正規化する。このとき、固有関数 $\hat{\psi}_r$ の実部 $\hat{\psi}_r$ は図 8 のようになる。図 8(a) は $Re = 40$ における流れ場 (流線) を表す固有関数であり、渦は計算領域のほぼ全体にわたって観測される。ところが、 $Re = 90$ では図 8(b) のように、攪乱は角柱の後方のある位置 ($x \sim 60$) から下流で消えている。レイノルズ数が大きくなると渦列の存在範囲は短くなるが、攪乱の存在範囲が短くなっているのである。攪乱の存在範囲と渦の存在範囲が一致するため、第 1 渦列の消滅は攪乱の非線形相互作用に依らずとも、既に線形不安定性の段階で生じていると結論される。この結論と Durgin and Karlsson[4] の渦モデル (非線形相互作用) との関係は未だ不明である。また、数値シミュレーションにより得られた第 2 渦列の関数形を初期条件として、第 2 固有モードを計算しても収束解が得られないことより、第 2 渦列生成の物理的メカニズムとしてこれまで考えられてきたように、第 1 渦列ができた後の振動流の時間平均流が不安定となって第 2 渦列が生じるという可能性が有力となった。その安定性解析の結果は 4.5 項で説明する。

4.4 振動数

第 1 渦列と第 2 渦列の関係を調べるため、それぞれの渦列中での流れの振動数を評価する。もし、第 2 渦列の振動数が第 1 渦列の振動数の 2 倍あるいは 3 倍の値をもてば、Matsui and Okude[8] の主

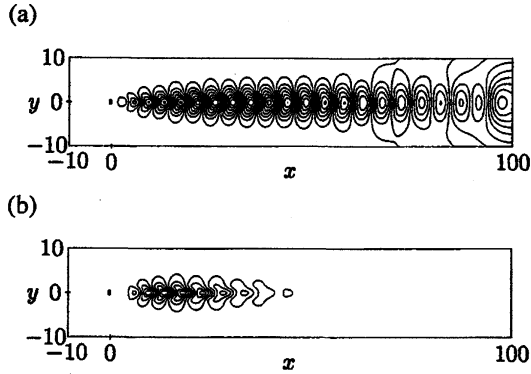


図 8: 線形固有関数 (流れ場, 流線). 攪乱の実部 $\hat{\psi}_r$ (虚部もほぼ同じ). (a) $Re = 40$. (b) $Re = 90$.

張るように第 2 渦列の発生は第 1 渦列の渦が合体することにより生じるという説が有力となる。

各レイノルズ数について, 第 1 渦列および第 2 渦列中での流れの振動数 f_1 および f_2 を評価し, レイノルズ数の関係としてグラフに描くと図 9 のようになる. 観測点 $P_1 (x_1 = 20)$ と $P_2 (x_2 = 100)$ はそれぞれ第 1 渦列および第 2 渦列内の代表点である. 図 9 で白丸は観測点 P_1 における振動数, 黒四角は P_2 での振動数である. レイノルズ数がおおよそ 100 より小さいときは観測点 P_1 と P_2 における振動数は同じである, ただし, カルマン渦列の消滅が起こっているレイノルズ数 $Re < 100$ では, P_2 での振動振幅 a_2 は P_1 での振動振幅 a_1 の 1000 分の 1 のオーダーである. この結果で注目する点は, 渦が消滅している領域の振動数は, 非常に小さい振動振幅であるが第 1 渦列の振動数は一致するという点である.

レイノルズ数が 100 より大きくなると, 点 P_1 と P_2 での振動数 f_1 と f_2 は異なり, それらは有理比とはならない. これより, 第 2 渦列は第 1 渦列の渦が合体して生じるものではなく, 第 1 渦列が消えてできる流れの時間平均流が不安定となって生じるものであると予想される. このモードの発生について次項で考える.

4.5 時間平均流の線形安定性解析

対称定常解の線形安定性では, 適切な初期条件を与えているにもかかわらず, 第 2 渦列を誘起する原因の候補である第 2 固有モードの解を得ることはできなかった. 第 2 渦列を誘起するもう一つの

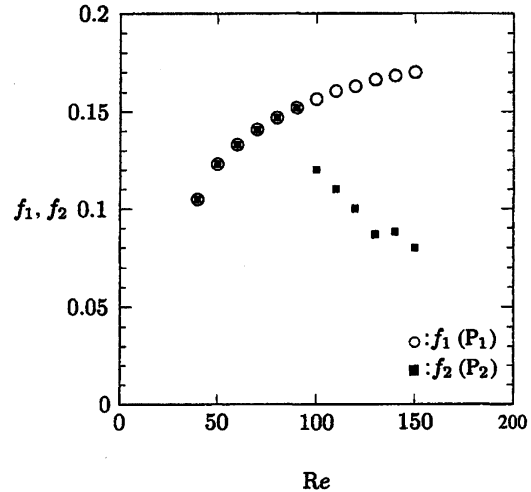


図 9: 点 P_1 での振動数 f_1 と点 P_2 での振動数 f_2 .
○: $f_1 (P_1, x_1 = 20)$. ■: $f_2 (P_2, x_2 = 100)$.

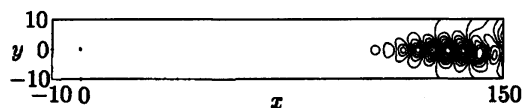
可能性として考えられるのは振動流の時間平均場が不安定となって第 2 渦列が生じる可能性である。

振動流を時間平均して平均流を求めるため, 第 1 渦列の振動周期 T_1 と第 2 渦列の周期 T_2 の最小公倍数の周期 T_3 を評価し, 周期 T_3 の 5 倍の時間にわたって流れ場 (ψ, ω) の時間平均を行い, これを $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ とおく. レイノルズ数が $Re = 100$ より大きいとき第 2 渦列が形成されるので, $Re = 100$ 近傍での平均流の線形安定性を調べる. 平均流の線形安定性は対称定常解の線形安定性を調べたのと同様に行うことも可能であるが, ここでは方程式 (7) と (8) を適切な境界条件 (11) と (12) および上流と計算領域の両側面での境界条件の下で初期値・境界値問題として数値的に解くことにより求める. 攪乱 (ψ', ω') の増幅率と固有関数を求める. ここで, 初期として与える攪乱は数値シミュレーションで求めた (ψ, ω) と時間平均流 $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ との差 $(\psi, \omega) - (\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ とする.

こうして得られたレイノルズ数 $Re = 115$ における攪乱の流線は図 10(a) のようになる. 攪乱は $x = 90$ より下流に存在するが, 図 10(a) のように等渦度線を描くと, $x = 110$ 近傍から渦が存在するように見える. これと比較するために, 同じレイノルズ数での数値シミュレーションより得られた渦度の等高線図を描くと図 10(b) のようになり, この図の第 2 渦列の存在範囲と図 10(a) の攪乱の分布とはよく一致している. これより, 第 2 渦列は第 1 渦列が消滅してできた時間平均流 (剪断流)

の不安定性によって誘起されると結論する。ただし、この計算については現在精度を確認中であり、また線形固有値問題の解を求めることにより確認を行っている。したがって、この結論は暫定的なものである。

(a)



(b)

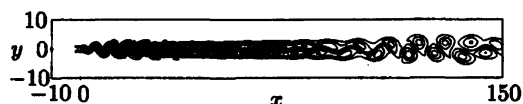


図 10: 流れ場 ($Re = 115$). (a) 攪乱, (b) 渦度の等高線.

この報告を執筆するに際し、首都大学東京の浅井雅人教授と稲澤歩助教および同志社大学大学院生の武本幸生氏から助言を受けたことを記し、感謝の意を表する。

参考文献

- [1] Bénard, H., C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 147, (1908), pp. 839-842.
- [2] Von Kármán, Th., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., (1911), pp. 509-517, (1912), pp. 547-556.
- [3] Taneda, S., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 14, (1959), pp. 843-848.
- [4] Durgin, W. W., Karlsson, S. K. F., J. Fluid Mech., Vol. 48, (1971), pp. 507-527.
- [5] Sato, H., Kuriki, K., J. Fluid Mech., Vol. 11, (1961), pp. 321-352.
- [6] Cimbala, J. M., Nagib, H. M. Roshko, A., J. Fluid Mech., Vol. 190, (1988,) pp. 265-298.
- [7] Karasudani, T., Funakoshi, M, Fluid Dyn. Res., Vol. 14, (1994), pp. 331-352.
- [8] Matsui, T., Okude, M., In *Structure of Complex Turbulent Shear Flow*, IUTAM Symposium, Marseille (Springer, Berlin, 1983) pp. 156-164.
- [9] Takemoto, Y., Mizushima, J., Phys. Rev. E., Vol. 82, (2010), pp. 056316-1-6.
- [10] Inasawa, A., Asai, M., Private communication (2010).