

スライディング・クエット流の線形・非線形解析

京都大学大学院 工学研究科 出口健悟 (Kengo Deguchi)
京都大学大学院 工学研究科 永田雅人 (Masato Nagata)

概要

We carry out linear and nonlinear analyses on a flow between two infinitely long concentric cylinders with the radii a and b subject to a axial mutual sliding motion of the cylinders. Two different approaches are sought to obtain nonlinear solutions: (1) Our linear stability analysis of the base flow confirm that the flow is always stable for non-axisymmetric disturbances. It means that the base flow is linearly stable if ratio $\eta = a/b$ is greater than 0.1415, otherwise instability is always caused by axisymmetric perturbations which is firstly discovered by Gittler (1993). From the linear critical point, axisymmetric solutions are bifurcated. (2) Three dimensional solutions in plane Couette flow (Nagata 1990) can be extended to the annular geometry. Resulting solution is non-axisymmetric travelling wave solutions. Moreover, bifurcations of new mirror-symmetric solutions are detected.

1 はじめに

軸方向に速度差を持つ同軸二重円筒管内の流れはスライディング・クエット流として知られている。この系に圧力勾配を加えた系は円管内クエット・ポアズイユ流と呼ばれており、血管内カテーテル、スレッド・インジェクション (Frei *et al.* 2000, Walton 2003) や、ワイヤ・コーティング (Tadmor & Bird 1974) など多くの医療的、工業的応用がある。また、純粋なスライディング・クエット流はせん断が引き起こす不安定性に及ぼす壁面の曲率の影響を調べるのに格好の素材である。

このモデルは狭間隙の極限 (半径比 $\rightarrow 1$) で平面クエット流となるため、少なくとも半径比が大きい場合は線形安定であることは明らかであるが、Gittler (1993) は軸対称擾乱に対する線形安定性解析を行い、半径比が 0.1415 より小さい場合に非常に大きいレイノルズ数領域に不安定性を発見している。まず我々はこのレイノルズ数領域に対する線形安定性解析を行い、この結果を確かめた。

このように線形臨界点が非常に大きいレイノルズ数である (半径比 < 0.1415)、または不存在である (半径比 > 0.1415) ことに起因して、その非線形解については手付かずである。本研究はこの非線形解を二つのアプローチにより求めた。ひとつは線形臨界点から通常の方岐解析を用いる方法であり、これにより軸対称進行波解が得られた。もうひとつは狭間隙極限である平面クエット流において、すでに得られている平面クエット流の三次元定常解 (Nagata 1990) を広間隙の場合に拡張する方法である。本研究では並行平板から二重円管への非線形解の接続手法を確立し、非軸対称進行波解を得た。この解からはさらに鏡面对称な進行波解が分岐する。また、接続を逆向きに利用することによりスライディング・クエット系で得られた軸対称解、鏡面对称解を用いて平面クエット流の解を得ることに成功した。

2 モデルと数値計算法

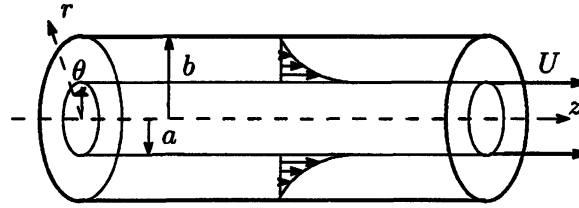


図 2.1: The configuration of sliding Couette flow.

Fig. 1 のように内外半径が a, b である同軸二重円筒内に動粘性係数 ν の非圧縮ニュートン流体を満たし, 内側円筒を速度 U で引き抜いた場合の流れ場を考える. このとき流体の運動は円筒座標 (r, θ, z) における非圧縮ナビエ・ストークス方程式系

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

と境界条件

$$\mathbf{u} = R\mathbf{e}_z \quad \text{at} \quad r = 2\eta/(1-\eta), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{at} \quad r = 2/(1-\eta) \quad (2.4)$$

により記述できる. 軸方向には周期性を仮定するものとする. ここで $R = U(b-a)/2\nu$ はレイノルズ数, $\eta = a/b$ は半径比であり, この二つのパラメータにより系は支配される. 軸方向波数, 周方向波数をそれぞれ α, m_0 と記述する. 周方向は周期 2π をもつため, 物理的には m_0 は整数値でなければならない. 方程式の離散化は壁方向にはチェビシェフ・選点法を, 周期方向にはフーリエ・ガラキン法を用いる. 得られた代数方程式をニュートン法で数値的に解き非線形解を得る. 線形安定性解析に際してはよく知られたように, 解のまわりで線形化した方程式から固有値問題を構成し, 得られた固有値により判別を行う.

3 基本解の分岐解析

3.1 線形安定性解析

層流状態を表す基本解は以下のように解析的に解ける.

$$U_B(r) = U_B(r)\mathbf{e}_z = R \frac{\ln(r(1-\eta)/2)}{\ln(\eta)} \mathbf{e}_z. \quad (3.1)$$

我々はまず軸対称擾乱 ($m_0 = 0$) に対する Gittler (1993) の線形安定性解析を再現した. この結果図 3.1 のような中立曲線が得られた. η が 0.1415 に近づくとつれ中立曲線はレイノルズ数無限大に向かい, 軸方向波数 α は 0 に近づく. 不安定が起こるのは非常に高いレイノルズ数 ($R = O(10^6)$ 程度) に限られる. また, 非軸対称擾乱 ($m_0 = 1, 2, 3, 4$) に対する解析を $R = O(10^7)$ まで行ったが, いかなる η に対しても不安定を見つけることはできなかった. 以上を総合すると, スライディング・クエット流は $\eta > 0.1415$ ならば平面クエット流と同じく常に線形安定であり, $\eta < 0.1415$ ならば軸対称擾乱に対し不安定となりうる, ということが結論付けられる.

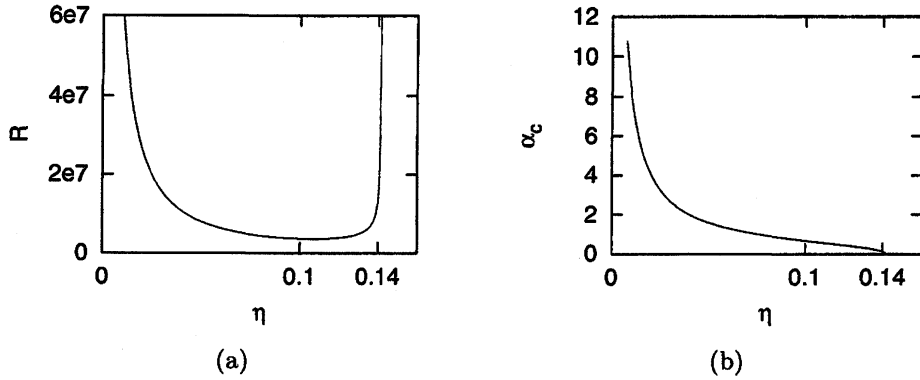


図 3.1: The neutral curve determined by axisymmetric perturbations ($m_0 = 0$). (a): the critical Reynolds number R_c . (b): the critical axial wavenumber α_c .

3.2 軸対称進行波解

$\eta = 0.1$ の場合に臨界波数 $\alpha_c = 0.6546$ として得られる線形臨界点 $R_c = 3.61 \times 10^6$ から, 分岐解析により軸対称な進行波解を得た. 図 3.2 はこのときの分岐線図である. これより見て取れるように, 解は亜臨界分岐により発生し, $R = 4.0 \times 10^4$ で転回する. 非線形の尺度 M は (基本解の値で規格化した) 内円筒壁面での運動量輸送値である. この解は η を変化させることで線形安定な範囲 $\eta > 0.1415$ まで解を計算することができた. $\eta = 0.1$, $\eta = 0.5$ の場合の流れ場をそれぞれ図 3.3(a),(b) に示す. このように η が大きい時, 流れ場は擾乱が流れ方向に局在したような様相をみせる. この解を $\eta \rightarrow 1$ として平面クエット流の場合まで接続することも可能であった (接続については次節で詳述). 同様な二次元解がすでに Ehrenstein *et al.* (2008) により求められており, その流れ場の様相も酷似していることから, 両者は同じ解なのではないかと推測される. この解は流れ方向の解像度を増加させると, 解が存在する領域が波長が長いほうへシフトするという奇妙な特徴をもつ. この性質のため十分な精度が得られず解析は進行中であるが, 流れ方向への局在は円管内流における「パフ」を想起させ興味深い. サドル・ノード分岐点は η を変化させても $R = O(10^3) \sim O(10^4)$ 程度のところに位置していた.

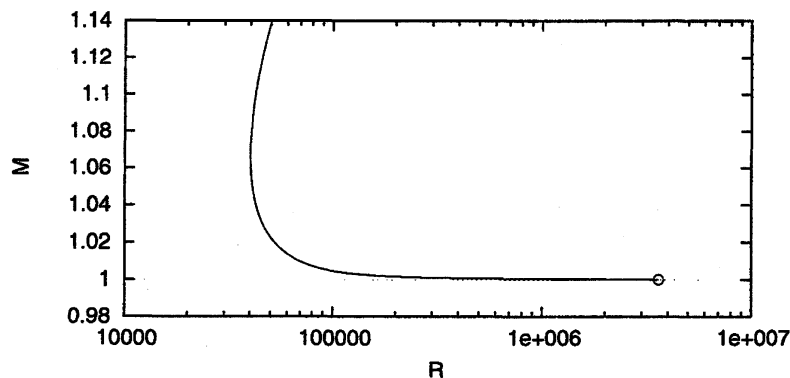


図 3.2: The subcritical bifurcation of the axisymmetric solution with $m_0 = 0$ and $\alpha = 0.6546$ for $\eta = 0.1$. $R_c = 3.61 \times 10^6$. Circles indicate the linear critical point. The measures of the nonlinearity are the momentum transport on the inner cylinder M .

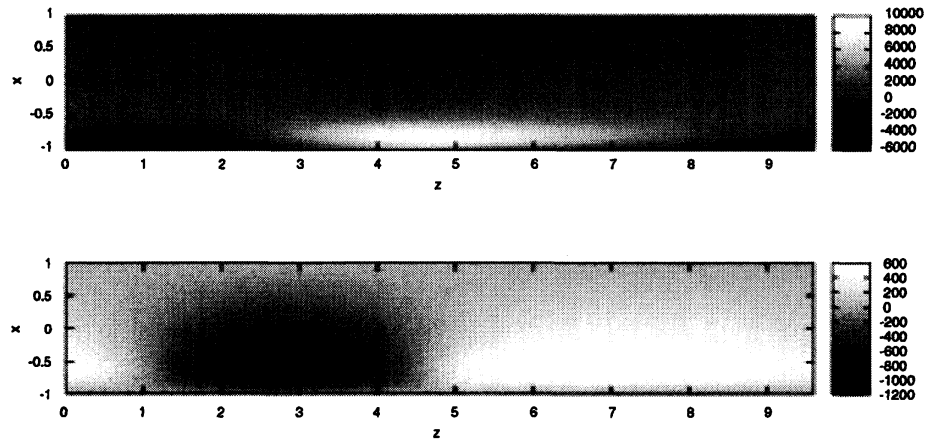
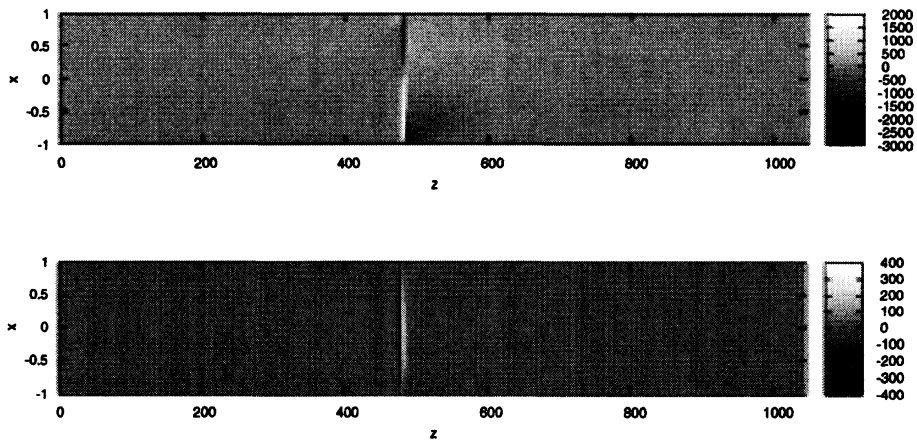
(a): $\eta = 0.1$ (b): $\eta = 0.5$

図 3.3: The disturbance flow field of the axisymmetric solutions at upper branch. (a): $(\eta, \alpha, R) = (0.1, 0.6465, 45000)$, (b): $(\eta, \alpha, R) = (0.5, 0.006, 5000)$. The upper and lower figure represents the streamwise velocity and the wall-normal velocity in each case. x represents $r - r_m$ where r_m is mean radius.

4 スライディング・平面クエットホモトピー

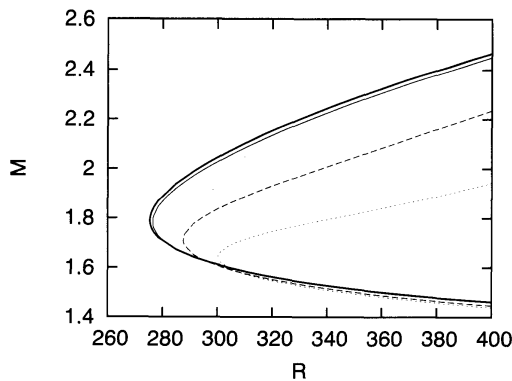
4.1 非軸対称進行波解

狭間隙極限を実行するに際し、まず円筒座標の周方向座標 θ を平均半径 $r_m = \frac{1+\eta}{1-\eta}$ を用いて $x = r - r_m$, $y = r_m\theta$ と変換する。次に極限操作 $\eta \rightarrow 1$ を解析的に行い、直交座標への変換を行う。変換の結果は (x, y, z) をそれぞれ壁方向, スパン方向, 流れ方向とした時の、平行平板間流れを記述する方程式に一致する。ただし y に関する波数は $\beta = m_0/r_m$ となる。また基本流は

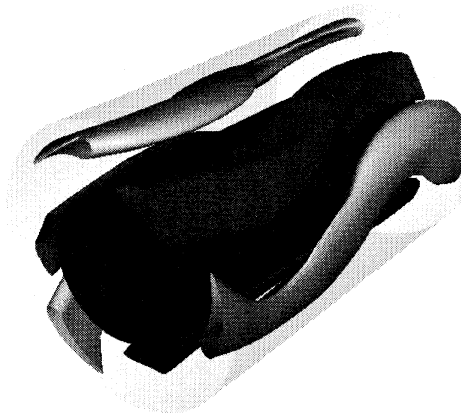
$$U_B(x) = R(1 - x)/2. \quad (4.1)$$

となる。すなわち $\eta \rightarrow 1$ の場合にはスライディング・クエット流は平面クエット流に一致する。このため、すでに Nagata (1990) により求められている平面クエット流の三次元非線形解を、スライディング・クエット流に接続できるのではないかと考えられる。接続は、(極限を取った際得られる) 直交座標で得られたこの解を、円筒座標で $\eta = 0.9999$ とした場合のニュートン法の初期値として行う。その後、 β を固定して η を徐々に変化させていく。このとき m_0 は非整数値をとりうるが、数値計算上は問題ない。その後 m_0 を整数に調整し、物理的に正しい解を得た。

得られた解は $R = O(10^2)$ でサドル・ノード分岐により発生する、スライディング・クエット流の非軸対称進行波解となる。その流れ場の様相は Nagata (1990) と同様、図 4.1(b) に見られるような波状のストリークで特徴付けられる。



(a)



(b)

図 4.1: (a): The saddle-node bifurcations of non-axisymmetric travelling wave solutions for $(\alpha, \beta) = (0.75, 1.5585)$. The nonlinear measures are the momentum transport M on the inner cylinder. Thick solid, thin solid, dashed and dotted curves indicate the cases for $\eta = 1, 0.8, 0.5$ and 0.4 , respectively. (b): The isosurface of the axial variation of the streaks at $w - U_B = \pm 70$. $(\eta, m_0, \alpha, R) = (0.5, 3, 0.51, 350)$. Light/dark gray surfaces correspond to the fast/slow streaks.

4.2 鏡面对称進行波解

$\eta = 0.1$ の場合に軸方向波数 α を変化させて計算した結果 (図 4.2), 前述の非軸対称進行波解 (実線) から、鏡面对称性 (点線) を有する新たな解への分岐が存在することが明らかとなった。これを以降鏡面对称解と呼び、Nagata (1990) からの接続から得られたものは非鏡面对称解と呼ぶものとする。両者をつなぐ分岐点は比較的レイノルズ数が高い場合にのみ存在する (図 4.2(a),(b))。レイノルズ数の低下とともに分岐線は複雑につなぎ換えを繰り返す、最終的に 3つのループが形成される (図 4.2(c),(d))。これらの図からわかるように鏡面对称解は二つのモードから形成されている。これらのモードの違いは軸方向平均場 (図 4.3(a),(b)) を見ると明らかとなる：一方は 4つの大きな渦を伴っているが、他方は 8つの大きな渦を伴っている。図 4.2(d) にある 3つのループの左から順に非鏡面对称解、4つ渦鏡面对称解、8つ渦鏡面对称解である。8つ渦の鏡面对称解が円管内流 (Pringle & Kerswell 2007), 正方形ダクト内流 (Okino *et al.* 2010) においても見られることが近年報告されてい

る。これらの解の空間構造, 特に渦の配置には共通点が見られるため, 何らかの関連性があるのではないかと考えられる。

さらにスライディング・クエット流の鏡面对称解のそれぞれを平面クエット流まで戻すことも可能であった。本研究で得られた解は基本的に進行波の形をしており, 4つ渦の解から接続したものは4つ渦, 8つ渦の解から接続したものは8つ渦をもつ(図4.3(c),(d))。平面クエット流においても鏡面对称性を有する定常解(Gibson *et al.* 2009, Itano & Generalis 2009)が近年見つかっている(ここでは位相速度が他のパラメータの変化に対し不変であるものを定常解, そうでないものを進行波解とすることにする)。図4.4は解が最も低いレイノルズ数に達する時の波数に関する分岐線図である。最下点の値は4つ渦解は $R = 3169$ とかなり高いが, 8つ渦解は $R = 348.4$ であり, Nagata (1990) がもつ最下点の値($R = 250$ 程度)に近い値を与える。分岐線を追跡することにより, 少なくとも解が出現し始めるような低レイノルズ数域では既知の鏡面对称解と今回得られた鏡面对称解は別の解であるということがわかった。しかしながら8つ渦解の下分岐は高レイノルズ数域で定常解となり, 既知の解と同じ対称性をもつため, レイノルズ数を上げることで両者の接続が取れる可能性はある。

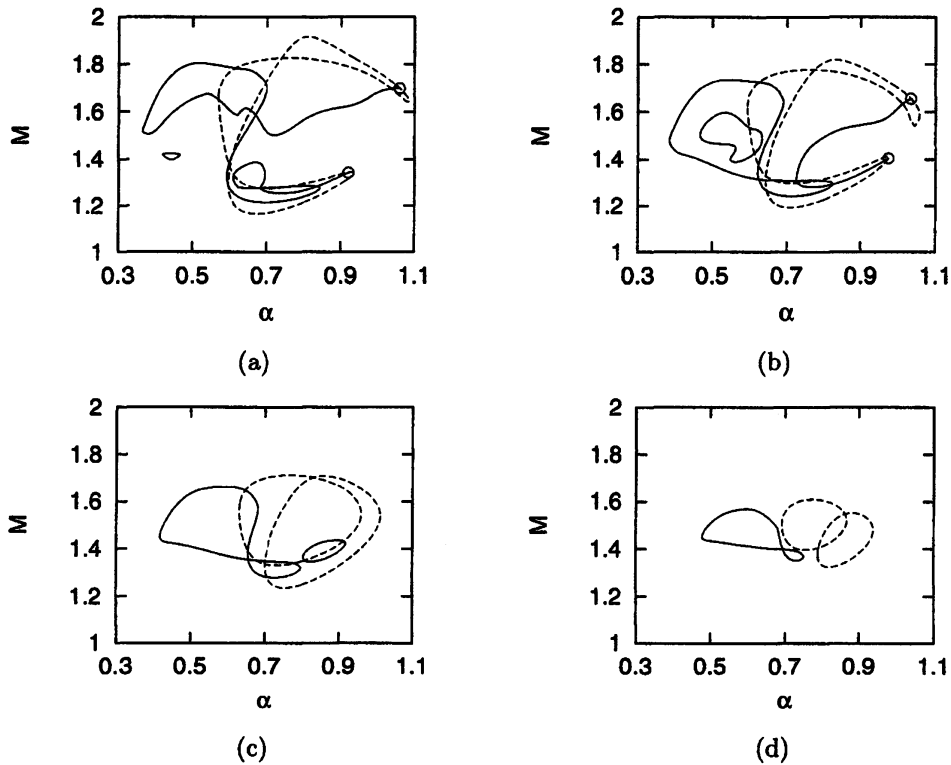


図 4.2: The momentum transport of the solutions for $\eta = 0.1$. Solid/dashed curves represent the non-mirror symmetric/mirror symmetric solutions with $m_0 = 1$. (a): $R = 360$, (b): $R = 340$, (c): $R = 320$, (d): $R = 300$. Circles in (a) and (b) are the bifurcation points.

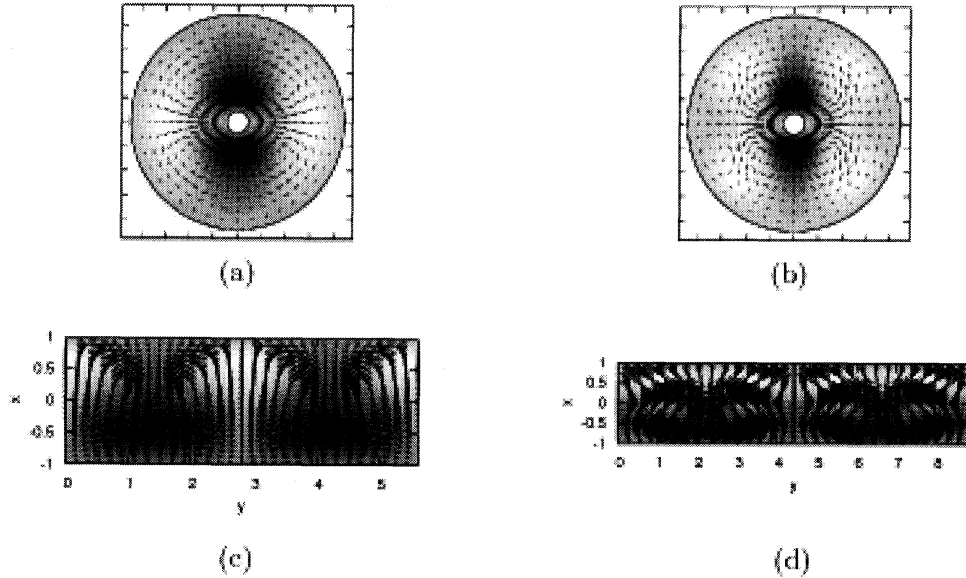


図 4.3: The fluctuation part of streamwise averaged velocity field of the upper branch mirror symmetric travelling waves in sliding Couette flow and plane Couette flow (light: fast, dark: slow). (a): 4-vortex mirror symmetric solution at $(\eta, \alpha, m_0, R) = (0.1, 0.77, 1, 300)$. (b): 8-vortex mirror symmetric solution at $(\eta, \alpha, m_0, R) = (0.1, 0.86, 1, 300)$. (c): 4-vortex mirror symmetric solution at $(\eta, \alpha, \beta, R) = (1, 0.73, 1.12, 2000)$. (d): 8-vortex mirror symmetric solution at $(\eta, \alpha, \beta, R) = (1, 0.5, 0.71, 200)$.

5 結論

スライディング・クエット流の Gittler (1993) による線形安定性解析を一般の三次元擾乱に対し拡張し、この流れ場が $\eta > 0.1415$ のとき常に線形安定となることを示した。線形不安定性は常に軸対称擾乱により生じる。

ニュートン法を用いた非線形解析により多種の非線形解を得た。重要な役割を演ずるのは狭間隙極限 $\eta \rightarrow 1$ により系が平面クエット流となることである。はじめに線形臨界点から亜臨界分岐する軸対称進行波解を得た。この解のサドル・ノード点は $R = O(10^4)$ 程度である。 η を変化させることで平面クエット流まで接続し、既に得られている二次元解 Ehrenstein *et al.* (2008) と思われる解が得られた。この解は流れ方向に擾乱が局在するという特徴をもつ。次に平面クエット流における三次元非線形解 (Nagata 1990) をスライディング・クエット流に接続し、 $\eta = 0.1$ まで延長した。得られた解は非軸対称進行波解である。この時、非軸対称進行波解からの分岐により鏡面对称解が得られる。鏡面对称解は平面クエット流に戻ることが可能であり、新たな鏡面对称解を形成した。非鏡面对称解、鏡面对称解が出現しはじめるサドル・ノード点は $R = O(10^2)$ 程度である。

スライディング・クエット流の実験・直接数値計算の結果はほとんど見られないが、以上の結果はすべてこの流れの遷移形態が亜臨界型であることを示唆している。また、レイノルズ数を徐々に増加させていった際には三次元の有限振幅擾乱により不安定となるであろう。得られた解の多くは平面クエット流においても存在することから、乱流化が生じた後においても平面クエット乱流と多くの類似を持つのではないかと考えられる。

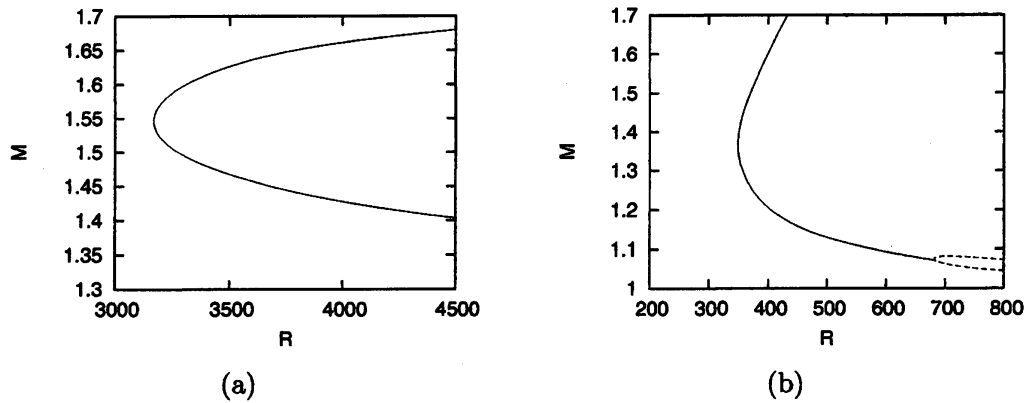


图 4.4: The bifurcation diagram of the mirror symmetric solutions in plane Couette flow at optimal wavenumber pair. (a): 4-vortex solution $(\alpha, \beta) = (0.73, 1.12)$, (b): 8-vortex solution $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.71)$.

参考文献

- [1] EHRENSTEIN, U., NAGATA, M. & RINCON, F. 2008 Two-dimensional nonlinear plane Poiseuille-Couette flow homotopy revisited. *Phys. Fluids* **20**, 064103.
- [2] FREI, CH., LÜSCHER, P & WINTERMANTEL, E. 2000 Thread-annular flow in vertical pipes. *J. Fluid Mech.* **410**, 185–210.
- [3] GIBSON, J. F., HALCROW, J. & CVITANOVIC, P. 2009 Equilibrium and traveling-wave solutions of plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* **638**, 243–266.
- [4] GITTLER, P. 1993 Stability of Poiseuille-Couette flow between concentric cylinders. *Acta Mechanica.* **101**, 1–13.
- [5] ITANO, T. & GENERALIS, S. C. 2009 Hairpin vortex solution in plane Couette flow: a tapestry of knotted vortices. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 114501.
- [6] NAGATA, M. 1990 Three-dimensional finite amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519–527.
- [7] OKINO, S., NAGATA, M., WEDIN, H. & BOTTARO, A. 2010 A new nonlinear vortex state in square duct flow. *J. Fluid Mech.* **657**, 413–429.
- [8] PRINGLE, C. C. T. & KERSWELL, R. R. 2007 Asymmetric, helical and mirror-symmetric traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**(2), 074502.
- [9] TADMOR, Z. & BIRD, R. B. 1974 Rheological analysis of stabilizing forces in wire-coating dies. *Polym. Eng. Sci.* **14**(2), 124–136.
- [10] WALTON, A. G. 2003 The nonlinear instability of thread-annular flow at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **477**, 227–257.