

## $\delta^\infty$ 不安定周期軌道の階層構造の解析

M. Komatsuzaki (小松崎 慎人) \*, T. Motoike (本池 巧) †  
T. Arimitsu (有光 敏彦) \*

\* Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba (筑波大学 数理)

† Faculty of Media and Information Resources, Surugadai University (駿河台大学 メ情)

### 概要

ロジスティック写像 (パラメータ  $\mu$ ) における,  $\delta^\infty$  不安定周期軌道 (USPO) の振る舞いを解析する。充分発達したカオス状態での USPO は, 「吹き寄せ」のため, 超安定周期軌道 (SSPO) が持つ  $\delta$  スケール Cantor 集合とは見た目が異なるが, そのトポロジカルな構造は同一の階層構造を有する。Cantor 集合第  $k$  階層の最小島の長さ  $I_1^{(k)}$  は, 吹き寄せにより, 充分発達したカオス状態から SSPO の近傍までの広い範囲で激しい  $k$  依存性を呈する。 $I_1^{(k)}$  の詳しい解析の結果,  $\delta^\infty$  USPO の Ljapunov 指数  $\lambda$  の  $\mu$  依存性に対するコンパクトな表式を見出した。この解析を可能にしたのは, 記号力学を駆使して,  $\delta^K$  USPO ( $K \gg 1$ ) の軌道の高精度同定の実現に成功したからである。

## 1 はじめに

充分発達した乱流を記述するマルチフラクタル確率密度関数理論 (MPDFT) [1, 2, 3, 4, 5, 6] は, 間欠性に起因する特異点が実空間にマルチフラクタル分布しているという仮定の下に, 裾拡がり確率密度関数 (PDF) を呈する間欠現象を解析するために建設された統計力学的アンサンブル理論である。充分発達した乱流の間欠的性質を抽出するためには, 系の階層構造の情報を得る必要がある。それは, 間欠性を呈する物理量に対する, 長さ  $l_n$  の異なる一連の PDF を観測することにより得られる。長さ

$$l_n = l_0 \delta^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

は, 物理量が均される領域の特徴的サイズである。拡大率  $\delta (> 1)$  の値は観測者によって自由に選べるので,  $\delta$  の選択が乱流の基礎物理量に影響を与えてはならない。この要請は, 新しいスケーリング関係式 [4, 5, 6]

$$\frac{\ln 2}{(1-q) \ln \delta} = \frac{1}{\alpha_-} - \frac{1}{\alpha_+} \tag{2}$$

をもたらした。ただし,  $\alpha_\pm$  は,  $f(\alpha) = 0$  の解である。 $f(\alpha)$  は, マルティフラクタル・スペクトルである。各乱流系は, それぞれ特定のマルチフラクタル・スペクトルを有する。なお,  $q$  は, Rényi エントロピーあるいは Tsallis エントロピーに付随するエントロピー指標である。

新しいスケーリング関係式は, ロジスティック写像の  $\delta^\infty$  超安定周期軌道 (SSPO) に付随する  $\delta$  スケール・コントロール集合と深く関連していることが明らかになった [7, 8]。このことより, 充分発達した乱流の系は, あらゆる  $\delta$  値の  $\delta^\infty$  SSPO に付随するコントロール集合が集積したものとの仮説に導かれる。拡大率  $\delta$  での系の観測により, 乱流を構成している  $\delta$  スケール・コントロール集合の情報が抽出できる。ところで,  $\delta^\infty$  SSPO のスケーリング関係式と充分発達した乱流で見つかった上記の MPDFT における新しいスケー

リング関係式との間には、 $1/\delta$  のオーダーの相違がある [7, 8]。各  $\delta^\infty$  SSPO がそれぞれ異なるマルチフラクタル・スペクトルを持つことも、充分発達した乱流の場合とは異なる。

この論文では、『充分発達した乱流系は、あらゆる  $\delta$  値の充分発達したカオス状態の  $\delta^\infty$  不安定周期軌道 (USPO) に付随するカントール集合の集積である』という改良版仮説を提案し、この仮説の検証に向けて、あらゆる  $\delta$  値の  $\delta^\infty$  USPO が共存する充分発達したカオス状態での周期軌道の性質とトポロジカルな構造を詳細に解析する。

## 2 ロジスティック写像

1次元の離散力学系

$$z_{i+1} = F(\mu, z_i) \quad (3)$$

を扱う。ただし、 $F$  は  $\mu$  をパラメータとする単峰写像である。この力学系の軌道を、 $z_0$  を初期値として、 $\{z_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) と記すことにする。以下では、単峰写像の具体例としてロジスティック写像

$$L(\mu, z) = 1 - \mu z^2 \quad (4)$$

を用いる。パラメータ  $\mu$  の定義域は、 $0 < \mu \leq 2$  である。

ロジスティック写像の分岐図を図 1 に示す。 $0 < \mu < 1.4011551$  (単精度) の領域では、 $2^k$  周期軌道 ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) が次々と現れる (周期倍分岐)。 $\mu = 1.4011551$  における軌道を  $2^\infty$  周期軌道と呼ぶことにする。

$1.4011551 < \mu \leq 2$  のカオス領域には、任意の  $\delta$  周期軌道 ( $\delta \neq 1, 2$ ) の窓が存在する。 $\delta$  周期軌道の窓の中では、 $\delta^k$  周期軌道の窓 ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) が入れ子構造を形成している。例えば、 $\mu = 1.75$  付近の 3 周期窓 (最大の窓) の中には、分岐図全体の構造が存在し、そのカオス領域に再び  $3^2$  周期窓がある (図 2)。同様に、 $3^2$  周期窓の中には  $3^3$  周期窓が存在する。以下次々と、 $3^k$  周期軌道の窓 ( $k = 3, 4, 5, \dots$ ) が入れ子構造として現れる。この極限 ( $k \rightarrow \infty$ ) として現れる軌道を  $3^\infty$  周期軌道と呼ぶことにする。

$\{z_i\}$  の軌道点の中に写像関数  $L(\mu, z)$  の頂点  $z_c$  が含まれる周期軌道が、超安定周期軌道 (SSPO) である。SSPO については、その初期位置を  $z_c$  とする。すなわち、 $z_0 = z_c$  とおく。なお、ロジスティック写像では  $z_c = 0$  である。

## 3 $\delta^K$ SSPO と $\delta^K$ USPO の累積軌道拡大率

$z_1$  と  $z_1 + \delta z_1$  を初期値とする二つの軌道を考える。時刻  $i$  における二つの軌道間の距離  $\delta z_i$  は

$$\delta z_i = |L^{i-1}(z_1 + \delta z_1) - L^{i-1}(z_1)| = \Xi_i \delta z_1 \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 $\Xi_i$  は時刻  $i$  における累積軌道拡大率

$$\Xi_i(\mu) = \left| \frac{\partial L^{i-1}}{\partial z} \right| (z_1, \mu) = \prod_{j=1}^{i-1} |L'_j(\mu)| \quad (6)$$

であり、写像  $|L'_j(\mu)|$  は  $z = z_j$  における導関数の絶対値

$$|L'_j(\mu)| = \left| \frac{\partial L}{\partial z} \right| (z_j, \mu) \quad (7)$$

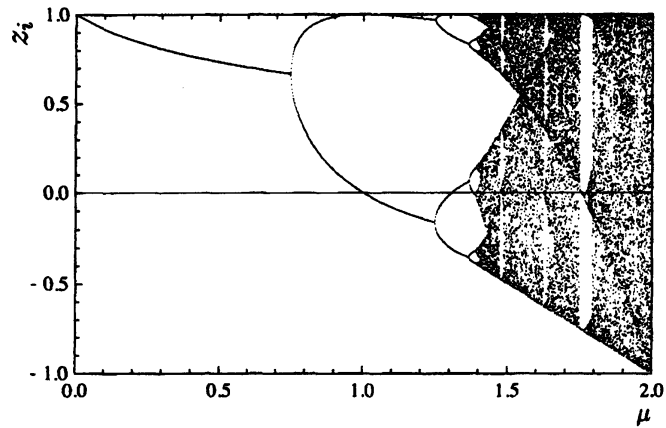


図 1: ロジスティック写像の分岐図。縦軸は軌道点  $z_i$ , 横軸はパラメータ  $\mu$  である。分岐図の安定周期軌道と  $z_i = 0$  との交点が SSPO を与える。 $\mu = 1.75$  付近に 3 周期の窓が見える。

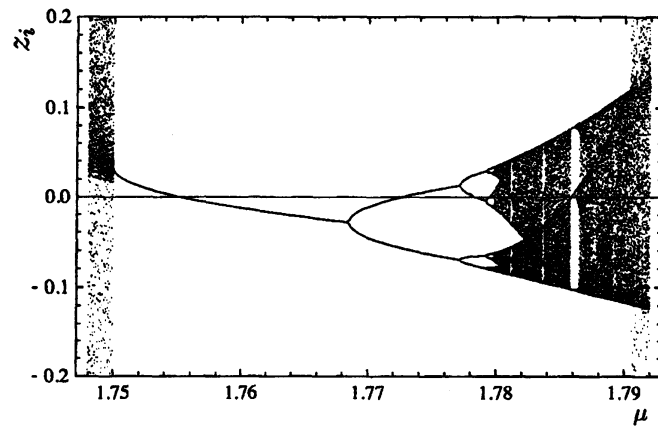


図 2: 図 1 の分岐図で 3 周期の窓を, SSPO 付近で拡大したもの。縦軸は軌道点  $z_i$ , 横軸はパラメータ  $\mu$  である。 $\mu = 1.786$  付近に  $3^2$  周期の窓の一部が見える。

とした。

$\delta^K$  SSPO の累積拡大率  $\Xi_i$  は、時刻  $i$  に対して複雑に増減を繰り返す。時刻  $i = \delta^k$  の累積拡大率  $\Xi_i$  に着目すると、 $\Xi_i$  は時刻  $i$  に対して冪的に増大する (図 3(a))。  $\mu$  の値を超安定の値から増やすと、 $\delta^K$  SSPO は  $\delta^K$  USPO に変化し、累積拡大率  $\Xi_i$  の時刻  $i$  に関する振る舞いは指数的大増大へと変化する。すべての  $\delta^K$  SSPO が不安定化する充分発達したカオス状態 ( $\mu = 2$ ) では、累積軌道拡大率は

$$\Xi_i \sim 2^i \quad (8)$$

に支配される (図 3(b))。

ところで、Ljapunov 指数  $\lambda$  は、

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |L'|_i(\mu) \quad (9)$$

で定義される。累積軌道拡大率 (6) を用いると、Ljapunov 指数は、

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Xi_{n+1} \quad (10)$$

と表わされる。観測結果 (8) を (10) に代入すると、 $\lambda = \ln 2$  を得る。これは、充分発達したカオス状態 ( $\mu = 2$ ) における Ljapunov 指数そのものである。

## 4 記号力学による軌道点の同定

### 4.1 記号力学

写像  $F(\mu, z)$  の軌道  $\{z_i\}$  を  $z_{i+1} = F(\mu, z_i)$  で定義する。 $\delta^k$  周期軌道  $\{z_i^{[k]}\}_{i=1}^{\delta^k}$  の各々の軌道点  $z_i^{[k]}(\mu)$  は方程式

$$z = F^{\delta^k}(\mu, z) \quad (11)$$

の解として与えられる。方程式 (11) は  $\delta^i$  ( $0 \leq i < k$ ) 周期軌道だけでなくその他の周期軌道の軌道点も一般には含む。特定の  $\delta^k$  周期軌道の軌道点  $z_i^{[k]}$  を求めるには、方程式 (11) の中にある多数の解の中から、欲しい軌道を取り出す必要がある。

そのために、軌道の時間発展を文字列で記述する方法を考える。 $F$  が単峰写像の場合、軌道点  $z_i$  が写像  $F$  の傾きが正 (負) の領域にある場合、文字  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{R}$ ) を割り当てる。これによって  $\delta^k$  周期軌道  $\{z_i^{[k]}\}_{i=1}^{\delta^k}$  の時間発展が長さ  $\delta^k$  の  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{R}$  の文字列で表される。 $\delta^k$  周期軌道の軌道点  $z_i^{[k]}$  に対する文字列を  $\{s_i | s_i = \mathcal{L}, \mathcal{R}\}$  とすると、 $z_i^{[k]} = F^{i-1}(\mu, z_1^{[k]})$  より  $\delta^k$  周期軌道の最初の軌道点  $z_1^{[k]}$  は

$$F_{s_{\delta^k}} \circ \cdots \circ F_{s_2} \circ F_{s_1}(z, \mu) = z \quad (12)$$

を解くことで求まる。ただし、 $F_{s_i}(\mu, z)$  ( $s_i = \mathcal{L}$  または  $\mathcal{R}$ ) は

$$F_{\mathcal{L}}(\mu, z) = \begin{cases} F(\mu, z), & z \in \{z | F'(\mu, z) \geq 0\} \\ 0, & z \in \{z | F'(\mu, z) < 0\} \end{cases} \quad (13)$$

および

$$F_{\mathcal{R}}(\mu, z) = \begin{cases} 0, & z \in \{z | F'(\mu, z) \geq 0\} \\ F(\mu, z), & z \in \{z | F'(\mu, z) < 0\} \end{cases} \quad (14)$$

と定義する。

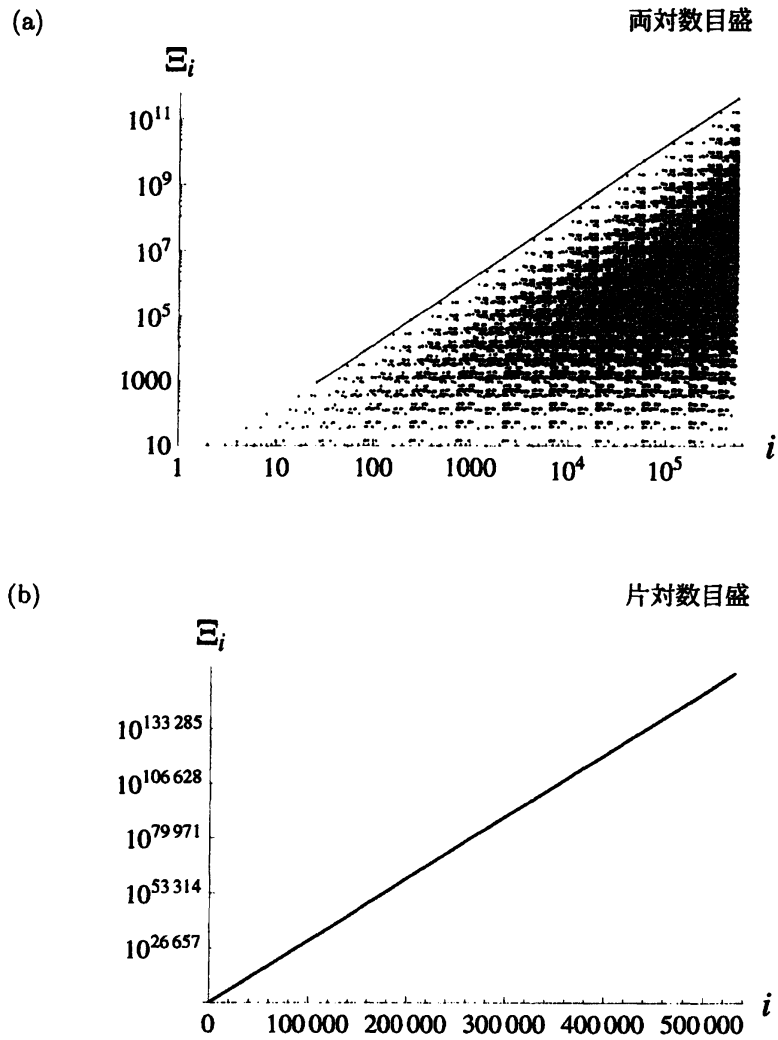


図 3:  $3^{12}$  SSPO と  $3^{12}$  USPO の累積軌道拡大率  $\Xi_i$ 。(a)  $3^{12}$  SSPO の累積拡大率を両対数目盛で示す。時刻  $i = 3^k$  における累積軌道拡大率は冪的に増大する (実線が  $\Xi_i \sim i^{2.01}$  である)。(b) 充分発達したカオス状態 ( $\mu = 2$ ) における  $3^{12}$  USPO の累積拡大率を片対数目盛で示す。累積軌道拡大率は指数的に増大する ( $\Xi_i \sim 2^i$ )。

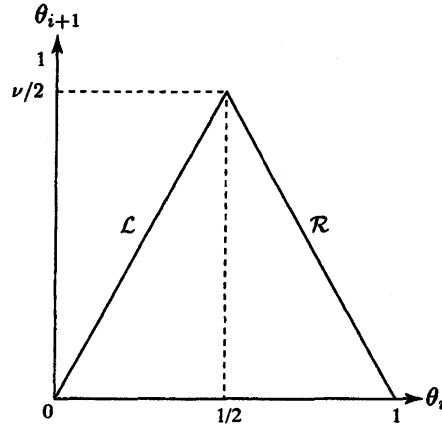


図 4: テント写像  $\theta_{i+1} = T(\nu, \theta_i)$ 。記号力学における文字  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{R}$  の領域が示されている。

#### 4.1.1 テント写像と記号力学

テント写像  $T(\nu, \theta)$  は

$$T(\nu, \theta) = \begin{cases} T_{\mathcal{L}}(\nu, \theta) = \nu\theta & (0 \leq \theta \leq 1/2) \\ T_{\mathcal{R}}(\nu, \theta) = \nu(1 - \theta) & (1/2 < \theta \leq 1) \end{cases}$$

で定義される。パラメータ  $\nu$  の範囲は  $1 < \nu \leq 2$  とする。軌道  $\{\theta_i\}$  は  $\theta_{i+1} = T(\nu, \theta_i)$  で決まる。テント写像の軌道の記号化は、 $[0, 1/2)$  の領域内の軌道点には文字  $\mathcal{L}$ 、 $(1/2, 1]$  の領域内の軌道点には文字  $\mathcal{R}$  を対応させる (図 4)。 $\theta = 1/2$  の軌道点には文字  $\mathcal{C}$  を割り当てる。軌道  $\{\theta_i\}$  は、 $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{R}$  (と  $\mathcal{C}$ ) の文字列に置き換わる。 $\delta^k$  周期軌道を記号化すると、 $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{R}$  で書かれた長さ  $\delta^k$  の文字列が繰り返される。 $\delta^k$  個の軌道点の一番右 (最大の  $\theta_i$ ) の点を出発点として作成した長さ  $\delta^k$  の文字列で軌道の特徴付ける。

1 周期軌道を表す文字列は、 $\mathcal{L}$  または  $\mathcal{R}$  である。文字列  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{R}$ ) に対応する軌道は、 $T_{\mathcal{L}}(\nu, \theta) = \theta$  ( $T_{\mathcal{R}}(\nu, \theta) = \theta$ ) の解  $\theta = 0$  ( $\theta = \nu/(1 + \nu)$ ) で与えられる。

2 周期軌道は文字列  $\mathcal{R}\mathcal{L}$  と表される。 $\mathcal{R}\mathcal{L}$  に対応する周期軌道は、 $T_{\mathcal{L}} \circ T_{\mathcal{R}}(\nu, \theta) = \nu^2(1 - \theta) = \theta$  を解くことで、 $\theta_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L})} = \nu^2/(1 + \nu^2)$  を得る。もう一つの軌道点は  $\theta_2^{(\mathcal{R}\mathcal{L})} = T_{\mathcal{R}}(\nu, \theta_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L})}) = \nu/(1 + \nu^2)$  となる。

3 周期軌道は文字列  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L}$  または  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}$  と表される。 $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L}$  に対する周期軌道は

$$T_{\mathcal{L}} \circ T_{\mathcal{L}} \circ T_{\mathcal{R}}(\nu, \theta) = \nu^3(1 - \theta) = \theta \quad (15)$$

を解いて、 $\theta_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})} = \nu^3/(1 + \nu^3)$  を得る。残り二つの軌道点は、 $T(\nu, \theta)$  で写像することで、

$$\begin{aligned} \theta_2^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})} &= T_{\mathcal{R}}(\nu, \theta_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})}) = \frac{\nu}{1 + \nu^3}, \\ \theta_3^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})} &= T_{\mathcal{L}}(\nu, \theta_2^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})}) = \frac{\nu^2}{1 + \nu^3} \end{aligned} \quad (16)$$

である。 $\nu = 2$  における  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L}$  の軌道の一筆書きを図 5(a) 破線に、 $1 < \nu \leq 2$  での三つの軌道点  $\{\theta_i^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})}\}_{i=1}^3$  の  $\nu$  依存性を図 5(b) に示す。軌道点  $\theta_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})}$  ( $\theta_2^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})}$ ) は、 $1 < \nu \leq 2$  において、それぞれ文字  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{L}$ ) に対応するための条件  $1/2 < \theta_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})} \leq 1$  ( $0 \leq \theta_2^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})} < 1/2$ ) を常に満たしている。軌道点  $\theta_3^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L})}$  が文字  $\mathcal{L}$  の領域に存在するための条件  $0 \leq \nu^2/(1 + \nu^3) \leq 1/2$  より、3 周期軌道  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L}$  は  $\nu \geq (1 + \sqrt{5})/2$  の領域にしか存在しないことがわかる。

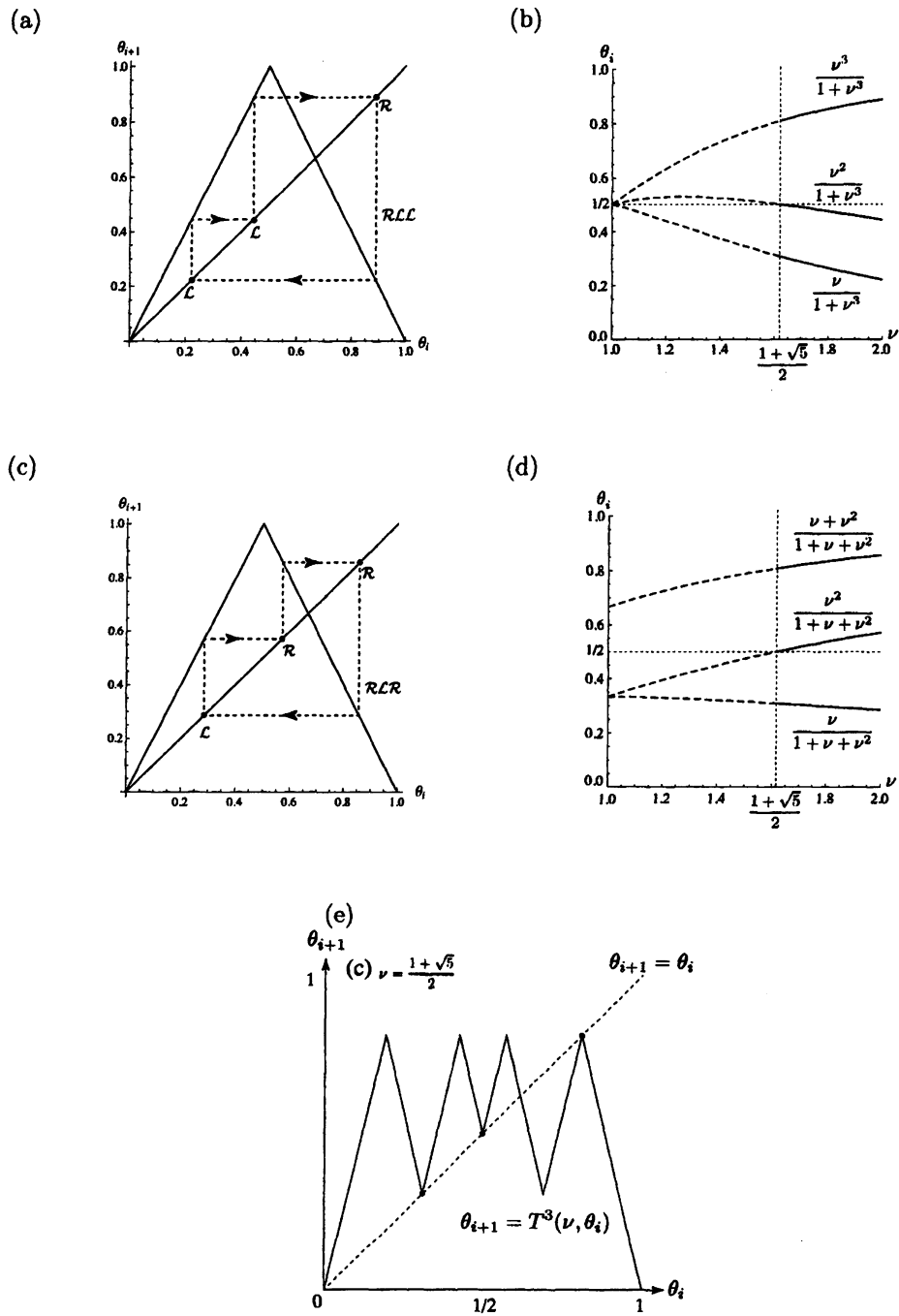


図 5: テント写像の 3 周期軌道。(a) 軌道  $RLL$  の一筆書軌道図 ( $\nu = 2$ )。 (b) 軌道  $RLL$  の  $\nu$  依存性。 $\nu < (1 + \sqrt{5})/2$  では、文字列が  $RLR$  に変化することに注意 (破線部分)。(c) 軌道  $RLR$  の一筆書軌道図 ( $\nu = 2$ )。 (d) 軌道  $RLR$  の  $\nu$  依存性。 $\nu < (1 + \sqrt{5})/2$  では、文字列が  $RLL$  に変化することに注意 (破線部分)。(e)  $\nu = (1 + \sqrt{5})/2$  における  $\theta_{i+1} = T^3(\nu, \theta_i)$  とその SSPO 軌道点 (黒丸)。このとき、軌道  $RLL$  と  $RLR$  は一致している。

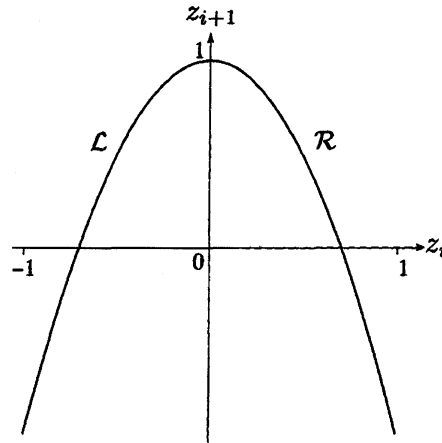


図 6: ロジスティック写像  $z_{i+1} = L(\mu, z_i)$ 。記号力学における文字  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{R}$  の領域が示されている。

同様に  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}$  に対応する軌道点は,  $T$  で写像することで,

$$T_{\mathcal{R}} \circ T_{\mathcal{L}} \circ T_{\mathcal{R}}(\nu, \theta) = \nu(1 - \nu^2(1 - \theta)) = \theta \quad (17)$$

を解いて,  $\{\theta_i^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R})}\}_{i=1}^3 = \{\nu/(1 + \nu + \nu^2), \nu^2/(1 + \nu + \nu^2), (\nu + \nu^2)/(1 + \nu + \nu^2)\}$  を得る。  $\nu = 2$  における  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}$  の軌道の一筆書きを図 5(c) 破線で,  $1 < \nu \leq 2$  での三つの軌道点  $\{\theta_i^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R})}\}_{i=1}^3$  の  $\nu$  依存性を図 5(d) に示す。軌道点  $\theta_3^{(\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R})}$  が文字  $\mathcal{R}$  の領域に存在することから, 3 周期軌道  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}$  も  $\nu \geq (1 + \sqrt{5})/2$  の領域にしか存在しない (図 5(d))。  $\nu = (1 + \sqrt{5})/2$  において, 文字列  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L}$  と  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}$  に対する 3 周期軌道は, 写像の  $T^3(\nu, \theta)$  の三つの頂点に一致している (図 5(d))。この二つの軌道は, ロジスティック写像における 3 周期の窓の始りに存在する  $3^1$  安定周期軌道と  $3^1$  USPO の対に対応している。

#### 4.1.2 ロジスティック写像と記号力学

ロジスティック写像  $L(\mu, z)$  等の非線形写像の場合, 周期軌道は数値解法で求める。この場合, 数値解の収束性などの理由から, 方程式 (12) の両辺に逆写像  $L_{\mathcal{L}/\mathcal{R}}^{-1}(\mu, z)$  を  $\delta^k$  回作用させた方程式

$$z = F_{s_1}^{-1} \circ F_{s_2}^{-1} \circ \dots \circ F_{s_k}^{-1}(\mu, z) \quad (18)$$

を解くべき方程式とする。

ロジスティック写像  $L(\mu, z)$  について (18) 式を用いて周期軌道を求めてみる。ロジスティック写像の軌道の記号化は, テント写像と同様に, 負の値の軌道点には  $\mathcal{L}$ , 正の値の軌道点には  $\mathcal{R}$  という文字を対応させる (図 6)。  $z = 0$  の軌道点には文字  $\mathcal{C}$  を割り当てる。

1 周期軌道に対する文字列として  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{R}$  の二つがある。  $L_{\mathcal{L}}^{-1}$ ,  $L_{\mathcal{R}}^{-1}$  は,

$$L_{\mathcal{L}}^{-1}(\mu, z) = -\sqrt{\frac{1-z}{\mu}}, \quad L_{\mathcal{R}}^{-1}(\mu, z) = \sqrt{\frac{1-z}{\mu}} \quad (19)$$

で与えられる。文字列  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{R}$ ) に対応する軌道点は,  $L_{\mathcal{L}}^{-1}(\mu, z) = z$  ( $L_{\mathcal{R}}^{-1}(\mu, z) = z$ ) を解くことで,  $z_1^{(\mathcal{L})} = (-1 - \sqrt{1+4\mu})/2\mu$  ( $z_1^{(\mathcal{R})} = (-1 + \sqrt{1+4\mu})/2\mu$ ) と求まる。

2 周期軌道を表す文字列  $\mathcal{R}\mathcal{L}$  に対応する軌道点は,  $L_{\mathcal{L}}^{-1} \circ L_{\mathcal{R}}^{-1}(\mu, z) = z$  を解くことで,  $z_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L})} = (1 + \sqrt{-3+4\mu})/2\mu$  と求まる。もう一つの軌道点は,  $z_2^{(\mathcal{R}\mathcal{L})} = L_{\mathcal{R}}(\mu, z_1^{(\mathcal{R}\mathcal{L})}) = (1 - \sqrt{-3+4\mu})/2\mu$  で与えられ



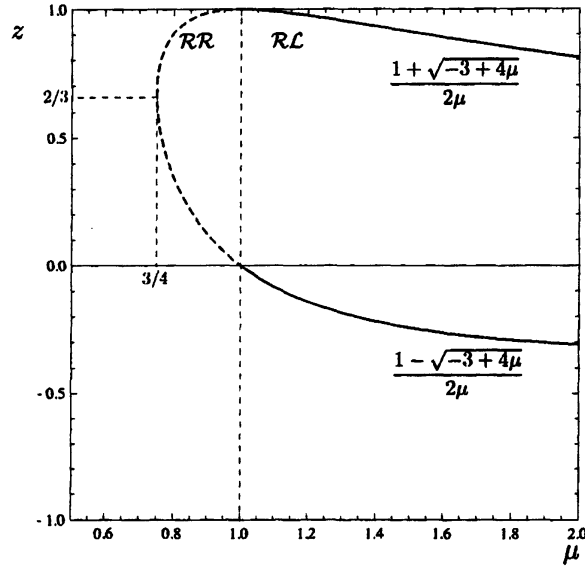


図 7: ロジスティック写像の 2 周期軌道  $RL$  の  $L$  に対応した軌道点と  $R$  に対応した軌道点の  $\mu$  依存性 (実線部分)。枝  $L$  の軌道は,  $\mu < 1$  で文字  $R$  に変化することに注意 (破線部分)。

る。  $z_2^{(RL)}$  が文字  $L$  に対応する条件  $z_2^{(RL)} < 0$  より, 2 周期軌道は,  $1 \leq \mu \leq 2$  の領域で存在する (図 7 中の実線)。なお,  $3/4 \leq \mu < 1$  における,  $z_i^{(RL)}$  は, 文字列  $\{RR\}$  に対応する 2 周期軌道となっている (図 7 中の破線)。(18) を用いて文字列から周期軌道を求める方法は, SSPO ( $\mu = \hat{\mu}$ ) および  $\mu > \hat{\mu}$  の周期軌道について有効な方法である。

## 4.2 充分発達したカオス状態における USPO の同定

$\mu = 2$  のロジスティック写像  $L(2, z)$  と,  $\nu = 2$  のテント写像  $T(2, \theta)$  は,  $z = h(\theta) = -\cos(\pi\theta)$  を通して

$$L(2, z) = h \circ T|_{\nu=2} \circ h^{-1}(z) \quad (20)$$

という共役な関係を持つ。これより,

$$L^i(2, z) = h \circ (T|_{\nu=2})^i \circ h^{-1}(z) \quad (21)$$

となる。従って, 時刻  $i = 1$  においてロジスティック写像の初期値  $z_1$  とテント写像の初期値  $\theta_1$  が  $z_1 = h(\theta_1)$  と対応すれば,  $i > 1$  において  $z_i = h(\theta_i)$  となるので, 4.1.1 節の方法で求めたテント写像  $T(2, \theta)$  の  $\delta^k$  周期軌道  $\{\theta_i^{[k]}\}_{i=1}^{\delta^k}$  より,  $z_i^{[k]} = h(\theta_i^{[k]})$  を用いてロジスティック写像  $L(2, z)$  の  $\delta^k$  周期軌道  $\{z_i^{[k]}\}_{i=1}^{\delta^k}$  が求まる。

$\mu = 2$  以外では, ロジスティック写像  $L(\mu, z)$  と共役関係となるテント写像  $T(\nu, \theta)$  は存在しない。テント写像の軌道からロジスティック写像の軌道を求めることはできない。例えば, テント写像の 3 周期軌道の  $\nu$  依存性 (図 5 (b) と (d)) は, ロジスティック写像の 3 周期の窓の開始点における 3 周期サドル・ノード分岐 (図 1) の定性的な特徴と一致している。このように, 二つの写像間に共役関係がなくとも, 同じ記号列で表される軌道は, 分岐構造の定性的な性質, 軌道点の位相空間上の順序, 分岐図の制御パラメータ軸に沿って軌道が出現する順序などは, 良く一致している。

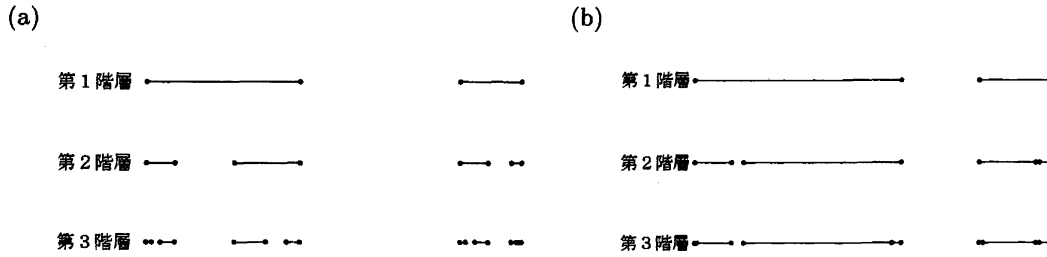


図 8: (a)  $2^{12}$  SSPO での島の構造。各層が進む毎の島の分割比が一定の  $\delta$  スケール Cantor 集合が構成される。(b)  $2^{12}$  USPO での島の構造。階層が進む毎に島の分割比が一定とならず、極端に拡大化する島が存在し、そのため他の島は極端に縮小化してしまい、見た目の異なる不完全  $\delta$  スケール Cantor 集合が構成される (島の吹き寄せ効果)。この効果は深い階層ほど顕著である。なお、 $\delta$  スケール Cantor 集合と不完全  $\delta$  スケール Cantor 集合のトポロジカルな構造は同一である。

## 5 $\delta^\infty$ USPO と Cantor 集合

パラメータ  $\mu$  ( $0 < \mu \leq 2$ ) を増加させて行くと、ロジスティック写像系では、生成可能なすべての周期軌道が不安定化し、カオス軌道と共存している充分発達したカオス状態 ( $\mu = 2$ ) へ至る。この節では、パラメータ  $\mu$  が、 $\delta^\infty$  SSPO を与える  $\tilde{\mu}$  ( $= \tilde{\mu}_\infty^{(\delta)}$ ) から充分発達したカオス状態を与える  $\bar{\mu}$  ( $= \bar{\mu}_\infty^{(\delta)} = 2$ ) に至る領域において、周期軌道が構成する島構造の変化を調べる (実際の解析には、 $\delta^K$  周期軌道 ( $K \gg 1$ ) を用いる)。

$\delta^K$  SSPO から  $\delta$  スケール Cantor 集合を構成する方法は確立され、その構造が持つ特徴が詳細に調べられている [7, 8]<sup>1</sup>。 $\delta^K$  USPO から同じ手法により階層構造を構成すると、不完全  $\delta$  スケール Cantor 集合 (SSPO が呈する  $\delta$  スケール Cantor 集合とトポロジカルには同一であるが、見た目が異なるので、この名称で呼ぶことにする) が得られる。

### 5.1 充分発達したカオス状態における島の構造

$\delta^K$  SSPO から作られる島の構造の  $\delta$  スケール Cantor 集合と、充分発達したカオス状態における島構造が呈する不完全  $\delta$  スケール Cantor 集合を、図 8 に掲げた。 $\delta$  スケール Cantor 集合と異なり不完全  $\delta$  スケール Cantor 集合では、階層が深くなるときに分割される島の大きさの比率が階層  $k$  によって異なり、深い階層ほど大きな島と小さな島の幅の差は広がっていくことが見て取れる。ある程度深い階層では最大の島の分割比が極端に大きく、分割前の島の幅のほぼ全ての領域を埋め尽くす (島の吹き寄せ)。周期軌道が呈する階層構造が、SSPO の  $\delta$  スケール Cantor 集合であるか、あるいは USPO の不完全  $\delta$  スケール Cantor 集合であるかの違いは、累積軌道拡大率  $\Xi_i$  の時刻 (ステップ数  $i$ ) 依存性が、冪的であるのか、あるいは指数的であるのかの違いとして現れる (図 3 参照)。

充分発達したカオス状態 ( $\mu = \bar{\mu} = 2$ ) において、各階層毎の最小の島の幅  $I_1^{(k)}$  に注目し、階層  $k$  に対する依存性を調べてみる。 $2^{20}$  周期軌道から作られる島の幅  $I_1^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq 19$ ) の  $k$  依存性を、図 9 と図 10 に示す。図 9 (a) には、SSPO における  $I_1^{(k)}$  を描いてある。 $2^{20}$  SSPO における  $\delta$  スケール Cantor 集合の構造を反映して、 $I_1^{(k)}$  は指数的に減少している。図 9 (b) には、USPO における  $I_1^{(k)}$  を描いてある。 $I_1^{(k)}$  は、SSPO の指数的減少に比べて急激な変化をしていることが分かる。そこで図 10 に、SSPO と USPO に対す

<sup>1</sup> $2^K$  SSPO から Cantor 集合を生成する手法については、Halsey らにより 1986 年に確立された。

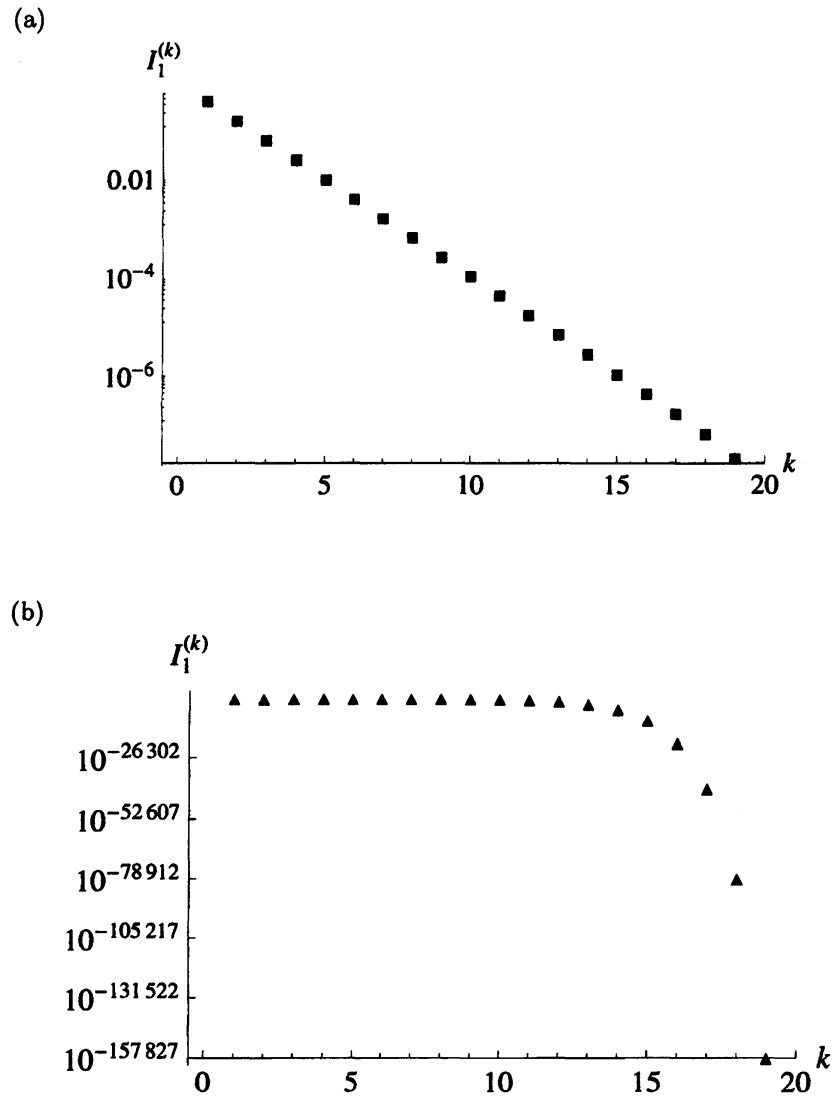


図 9:  $2^{20}$  周期軌道から作られる島の幅  $I_1^{(k)}$  の片対数プロット。(a)  $2^{20}$  SSPO における  $I_1^{(k)}$  の  $k$  依存性 (■), (b) 充分発達したカオス状態の  $2^{20}$  USPO における  $I_1^{(k)}$  の  $k$  依存性 (▲)。

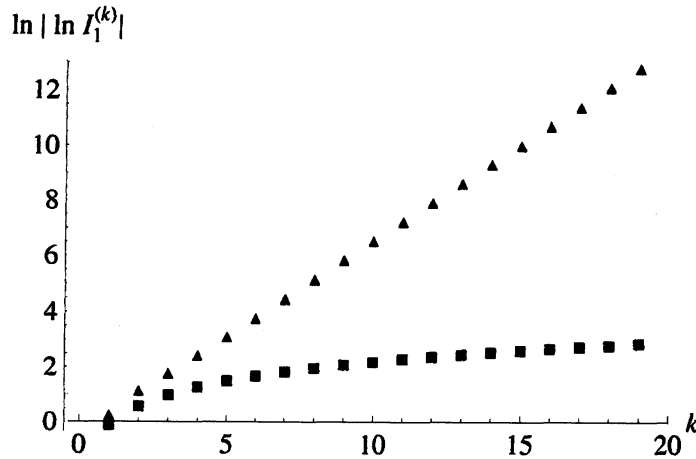


図 10:  $2^{20}$  周期軌道から作られる島の幅  $\ln |\ln I_1^{(k)}|$  のプロット。充分発達したカオス状態での島 (▲) は, SSPO の島 (■) の指数的減少より急激に変化している ( $I_1^{(k)}$  は減少しているが,  $\ln I_1^{(k)}$  の絶対値をとっているため, 図の上では右上がりになっている)。

る  $\ln |\ln I_1^{(k)}|$  の  $k$  依存性を描いた。これより, USPO における  $I_1^{(k)}$  の  $k$  依存性が二重指数的に減少していることが判明した。 $I_1^{(k)}$  の二重指数的  $k$  依存性を

$$I_1^{(k)} = \sigma^{-\gamma^k} \quad (22)$$

の試行関数で解析してみる。様々な  $\delta$  の値に対する  $\gamma, \sigma$  を最小二乗法で求め, それぞれの値を表 1 に示した。その結果は,  $\gamma \simeq \delta, \sigma \simeq 2$  であることを強く示唆している。これらの値を (22) に代入すると,

$$I_1^{(k)} = 2^{-\delta^k} \quad (23)$$

を得る。

ところで, 累積軌道拡大率  $\Xi_i$  と島の幅  $I_1^{(k)}$  は, それぞれの定義より,

$$\Xi_{\delta^{k+1}} \sim [I_1^{(k)}]^{-1} \quad (24)$$

の関係で結ばれていることが分かる。従って, Ljapunov 指数は, 島の幅  $I_1^{(k)}$  を用いると,

$$\lambda = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta^k} \ln I_1^{(k)} \quad (25)$$

となる。(23) に (25) を代入すると,  $\lambda = \ln 2$  を得る。これは, 充分発達したカオス状態における Ljapunov 指数そのものである。

## 5.2 島の幅の $\mu$ 依存性

次に, パラメータ  $\mu$  を変化させて, SSPO ( $\mu = \hat{\mu}$ ) と充分発達したカオス状態 ( $\mu = \tilde{\mu}$ ) の中間の領域で, 島構造がどのように変化するのかを調べた。ここでは,  $\delta^K = 2^{12}, 3^8, 4^7$  に対する  $I_1^{(k)}(\mu)$  の  $\mu$  依存性の結果を示す。 $\mu$  の変化に伴ない島構造は変化するが,  $I_1^{(k)}(\mu)$  が二重指数的に減少する様子は変わらない。ただし, SSPO のごく近傍においてのみ二重指数的減少の様子が崩れる。充分発達したカオス状態の場

表 1: 充分発達したカオス状態における  $\delta^K$  周期軌道 ( $\delta^K = 2^{20}, 3^{14}, 4^{11}, 5^{10}, 6^9$ ) の島の幅  $I_1^{(k)}$ 。階層  $k$  における島の幅  $I_1^{(k)}$  を  $I_1^{(k)} = \sigma \cdot \gamma^k$  として、最小二乗法により  $\gamma$  と  $\sigma$  の値を求めた。

$\delta^K$	$\gamma$	$\sigma$
$2^{20}$	1.9999954	2.0000623
$3^{14}$	2.9999511	2.0002771
$4^{11}$	3.9998883	2.0003924
$5^{10}$	4.9991103	2.0019965
$6^9$	5.9970976	2.0047473

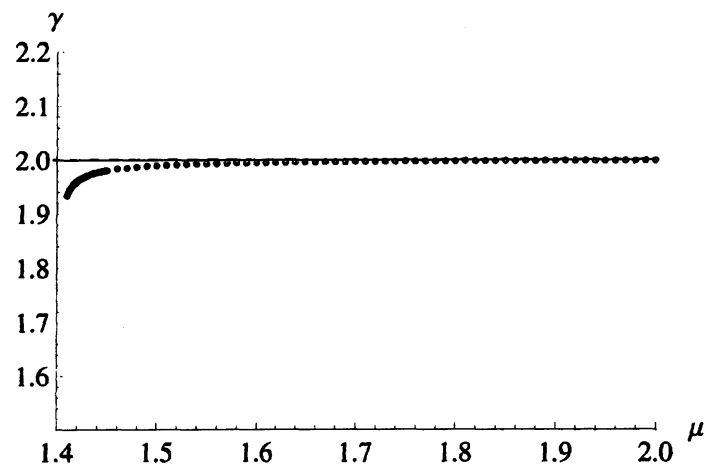


図 11:  $2^{12}$  USPO ( $\delta = 2, K = 12$ ) における  $\gamma$  の  $\mu$  依存性。黒丸がデータ点、実線は  $\gamma = 2$  の補助線である。

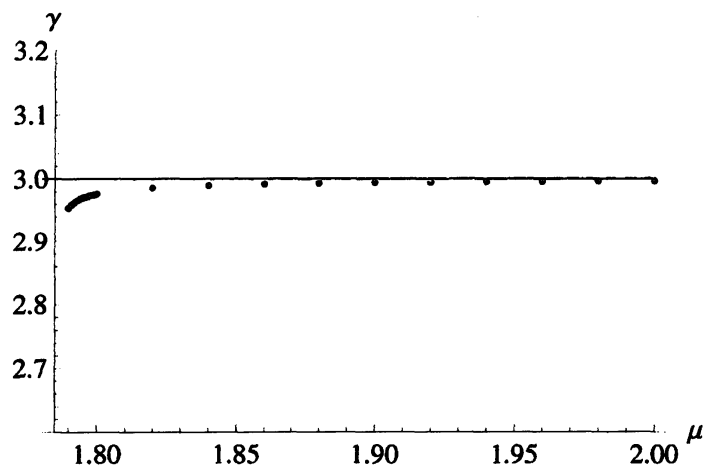


図 12:  $3^9$  USPO ( $\delta = 3, K = 8$ ) における  $\gamma$  の  $\mu$  依存性。黒丸がデータ点、実線は  $\gamma = 3$  の補助線である。

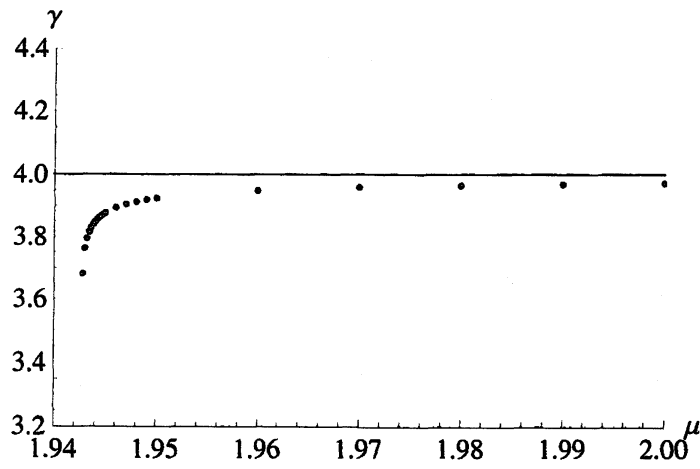


図 13:  $4^7$  USPO ( $\delta = 4, K = 7$ ) における  $\gamma$  の  $\mu$  依存性。黒丸がデータ点, 実線は  $\gamma = 4$  の補助線である。

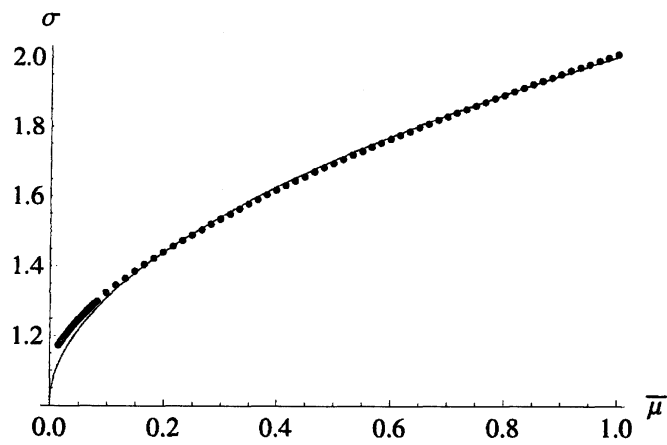


図 14:  $2^{12}$  USPO ( $\delta = 2, K = 12$ ) における  $\sigma$  の  $\bar{\mu}$  依存性。黒丸がデータ点, 実線は (27) 式  $\sigma(2, \bar{\mu}) = 1 + 1.00035 \times (\bar{\mu}_{12}^{(2)})^{0.51436}$  である。

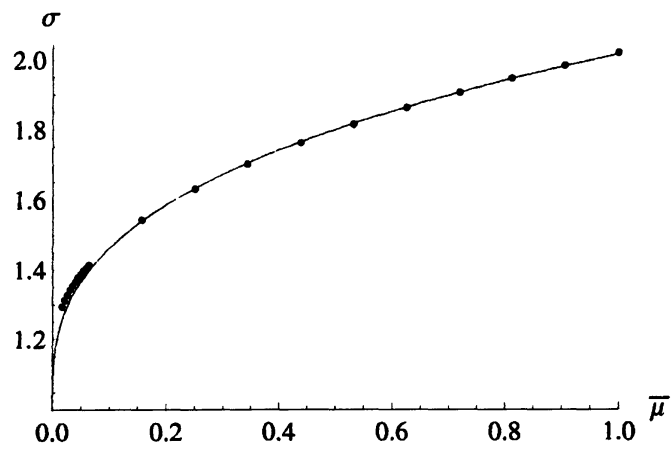


図 15:  $3^9$  USPO ( $\delta = 3, K = 8$ )  $\sigma$  の  $\bar{\mu}$  依存性。黒丸がデータ点, 実線は (29) 式  $\sigma(3, \bar{\mu}) = 1 + 1.01093 \times (\bar{\mu}_8^{(3)})^{0.339921}$  である。

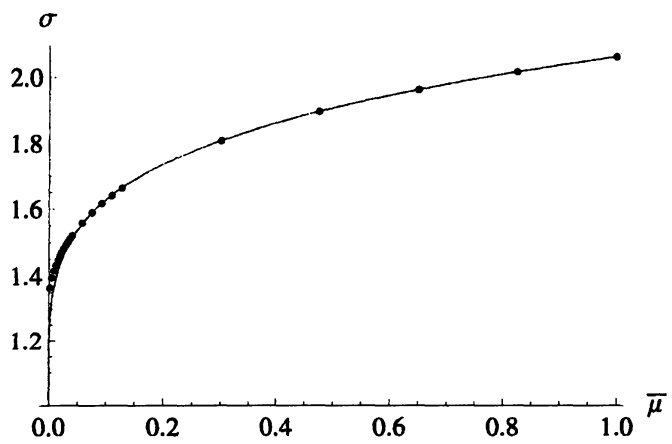


図 16:  $4^7$  USPO ( $\delta = 4, K = 7$ )  $\sigma$  の  $\bar{\mu}$  依存性。黒丸がデータ点, 実線は (31) 式  $\sigma(4, \bar{\mu}) = 1 + 1.06084 \times (\bar{\mu}_7^{(4)})^{0.227483}$  である。

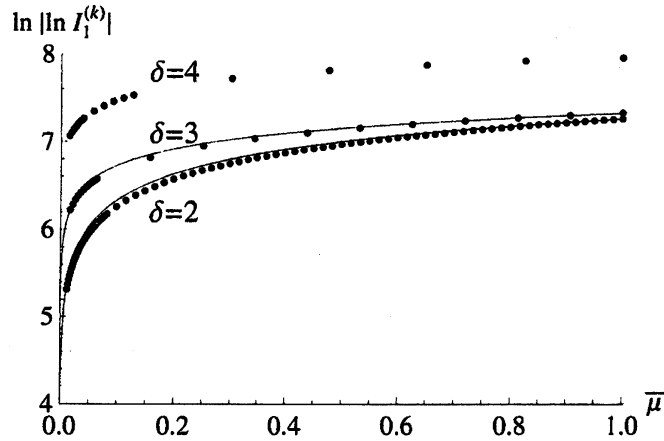


図 17:  $\delta = 2, \delta = 3, \delta = 4$  における  $\ln|\ln I_1^{(k)}|$  の  $\bar{\mu}$  依存性。黒丸がデータ点，実線は (33)，(34) 式  $I_1^{(k)}(\bar{\mu}) = (1 + \bar{\mu}^{1/\delta})^{-\delta^k}$  である。

合と同様に， $I_1^{(k)}(\mu) = \sigma(\mu)^{-\gamma(\mu)^k}$  として， $\sigma(\mu)$  および  $\gamma(\mu)$  の値を求めた。図 11，図 12，図 13 から分かるように， $\gamma(\mu)$  の値は， $\delta^k$  SSPO 近傍を除く広い領域 ( $\hat{\mu}_K^{(\delta)} \lesssim \mu \leq \bar{\mu}_K^{(\delta)}$ ) で， $\delta$  の値に一致している。

一方， $\sigma(\mu)$  の値を調べた結果が，図 14，図 15，図 16 である。ここでは，周期  $\delta^k$  の値によって SSPO を与えるパラメータ  $\hat{\mu}_K^{(\delta)}$  は異なるため，パラメータ  $\mu$  を規格化し

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_K^{(\delta)} = \frac{\mu - \hat{\mu}_K^{(\delta)}}{\bar{\mu}_K^{(\delta)} - \hat{\mu}_K^{(\delta)}} \quad (26)$$

を導入している。 $\bar{\mu}$  の定義域は， $0 \leq \bar{\mu} \leq 1$  である。SSPO のとき  $\bar{\mu} = 0$ ，充分発達したカオス状態のとき  $\bar{\mu} = 1$  となる。この解析により， $\sigma(\delta, \bar{\mu})$  の  $\bar{\mu}$  依存性が明らかになった：

$$\sigma(2, \bar{\mu}) = 1 + 1.00035 \times (\bar{\mu}_{12}^{(2)})^{0.51436} \quad (27)$$

$$\simeq 1 + \bar{\mu}^{1/2}, \quad (28)$$

$$\sigma(3, \bar{\mu}) = 1 + 1.01093 \times (\bar{\mu}_8^{(3)})^{0.339921} \quad (29)$$

$$\simeq 1 + \bar{\mu}^{1/3}, \quad (30)$$

$$\sigma(4, \bar{\mu}) = 1 + 1.06084 \times (\bar{\mu}_7^{(4)})^{0.227483} \quad (31)$$

$$\simeq 1 + \bar{\mu}^{1/4}. \quad (32)$$

(28)，(30)，(32) より， $\delta^k$  USPO の島の幅  $I_1^{(k)}(\bar{\mu})$  は，広いパラメータ範囲 ( $\hat{\mu}_K^{(\delta)} \lesssim \mu \leq \bar{\mu}_K^{(\delta)}$ ) で

$$I_1^{(k)}(\bar{\mu}) = \sigma(\delta, \bar{\mu})^{-\delta^k}, \quad (33)$$

$$\sigma(\delta, \bar{\mu}) = 1 + \bar{\mu}^{1/\delta} \quad (34)$$

と表されることが見出された。



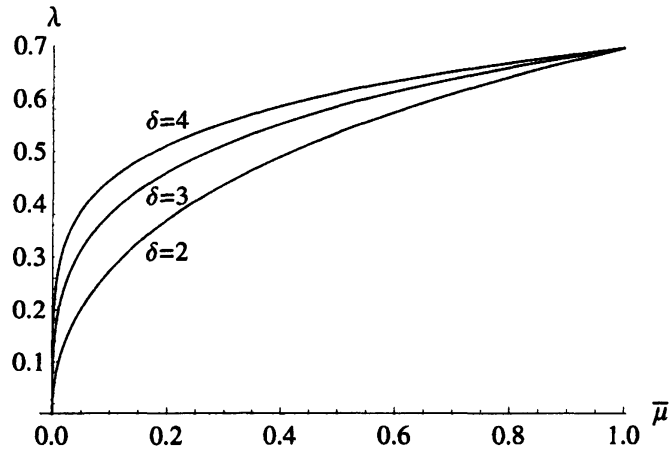


図 18:  $\delta = 2, \delta = 3, \delta = 4$  における Ljapunov 指数  $\lambda$  の  $\bar{\mu}$  依存性。

## 6 まとめ

充分発達したカオス状態での  $\delta^\infty$  USPO は、「吹き寄せ」のため、 $\delta^\infty$  SSPO が持つ  $\delta$  スケール Cantor 集合とは見た目が異なるが、そのトポロジカルな構造は同一の階層構造であることが判明した。第  $k$  階層の最小の島の長さ  $I_1^{(k)}$  は、吹き寄せにより、充分発達したカオス状態から SSPO の近傍までの広い範囲で激しい  $k$  依存性を示すことが分かった ( $\mu = 2$  における  $k$  依存性は、図 9 (b) 参照)。詳しい解析の結果、 $I_1^{(k)}$  が、コンパクトな表式 (33), (34) で与えられることを見出した (その  $\bar{\mu}$  依存性の実測値との比較は、図 17 参照)。(33) を (25) に代入すると、SSPO ( $\bar{\mu} = 0$ ) と充分発達したカオス状態 ( $\bar{\mu} = 1$ ) のかなり広い範囲の USPO に対して、Ljapunov 指数の表式

$$\lambda(\delta, \bar{\mu}) = \ln(1 + \bar{\mu}^{1/\delta}) \quad (35)$$

の成立していることが分かる。図 18 に、 $\delta = 2, 3, 4$  での Ljapunov 指数  $\lambda(\delta, \bar{\mu})$  の表式 (35) を掲げる。これより、充分発達したカオス状態になると、あらゆる  $\delta$  値に対して、共通の Ljapunov 指数が得られる機構が見える。このことは、「充分発達したカオス状態では、あらゆる  $\delta^\infty$  USPO が、共通の  $\alpha_\pm$  (マルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  の零点) を有するであろう」という推測を強く支持するものである。この解析的表式が得られたのは、記号力学を駆使して、 $\delta^k$  USPO の軌道の高精度同定の実現に成功したからである [7, 8]。なお、Ljapunov 指数の表式 (35) を解析的に導出することは、今後の興味深い研究課題である。

現在、SSPO 近傍 ( $\bar{\mu} \gtrsim 1$ ) での島の長さ  $I_1^{(k)}$  の解析を進めている。それが明らかになると、 $\delta^\infty$  SSPO が持つマルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  ( $\delta$  によって異なる) の関数形や零点の値 ( $f(\alpha) = 0$  の解  $\alpha_\pm$ ) が、 $\mu$  の増加と共にどのように推移するかが分かるであろう。それと共に、 $\delta^\infty$  SSPO が有するスケールリング関係式の  $1/\delta$  の補正項 [7, 8] が、消失して行くのか否かを検証できるはずである。

## 参考文献

- [1] T. Arimitsu and N. Arimitsu, “Analysis of fully developed turbulence in terms of Tsallis statistics”, Phys. Rev. E **61** (2000) 3237–3240.

- [2] T. Arimitsu and N. Arimitsu, “Tsallis statistics and fully developed turbulence”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) L235–L241. [CORRIGENDUM: **34** (2001) 673–674.]
- [3] N. Arimitsu and T. Arimitsu, “Multifractal Analysis of Turbulence by Statistics based on Non-Extensive Tsallis’ or Extensive Renyi’s Entropy”, *J. Korean Phys. Soc.* **40** (2002) 1032–1036, and the references therein.
- [4] T. Arimitsu and N. Arimitsu, “Analysis of PDFs for energy transfer rates from  $4096^3$  DNS — Verification of the scaling relation within MPDFT,” *J. Turbulence* **12** (2011) 1–25.
- [5] N. Arimitsu and T. Arimitsu, “Verification of the scaling relation within MPDFT by analyzing PDFs for energy dissipation rates out of  $4096^3$  DNS,” *Physica A* **390** (2011) 161–176.
- [6] N. Arimitsu and T. Arimitsu, “マルチフラクタル確率密度関数理論による乱流 PDF の解析”, 本数理研講究録, (2011).
- [7] T. Motoike and T. Arimitsu, “力学系における  $\delta^\infty$  周期構造と乱流マルチフラクタル構造”, 本数理研講究録, (2011).
- [8] T. Motoike and T. Arimitsu (2011) in preparation to submit.