数理解析研究所講究録
第 1774 巻 2012 年 35-56

分数幕微分方程式と discrete delta potential

浅田　明　（元信州大学）
ASADA Akira (Former: Sinsyu University)
3-6-21, Nogami Takarazuka, E-mail asada-a@poporo.ne.jp

[3] で　積分変換 $\mathcal{R}$;$\mathcal{R}[f(s)](x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{s}}{\Gamma(1+s)}f(s)ds$ によって平行移動が分数幕微分に移されること;

$$\frac{d^{a}}{dx^{a}}\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}[\tau_{a}f(s)](x), \quad \tau_{a}f(s)=f(s+a),$$

となることを示した。この式は $f(s)$ が関数でない discrete delta potential $\sum_{n}c_{n}\delta_{a_{n}}$, $\delta_{c}=\delta(c-s)$, であっても成立する。　また $\mathcal{R}[\delta_{c}]$ は（拡張された）Borel 変換 $\mathcal{B}$ ([1]) によって

$$\mathcal{R}[\delta_{c}]=\mathcal{B}[x^{c}]$$

と表される。ただし c が負の整数であれば $\mathcal{R}[\delta_{c}]$ には問題がある。そのため　$\mathcal{R}$, $\mathcal{B}$ を修正した $\mathcal{R}_{+}$, $\mathcal{B}_{+}$ も導入する。

この報告では、これらの変換を定数係数分数幕微分方程式に適用し　解と $\mathbb{Z}$ の　discrete delta potential の空間での表現との関係をしめす。また Schwartz 超関数の枠を超えたところでの $\mathcal{R}_{+}$ の定義についても述べる。

1　分数幕微分と積分変換 $\mathcal{R}$

$f(x)$ が $f(x)=\sum_{n}C_{n}x^{c_{n}}$ と $\mathbb{R}_{+}=\{x|x\geq 0\}$ または $\mathbb{C}\setminus\{x|x<0\}$ で C^{∞}-収束する級数であらわされるとき

$$\frac{d^{a}}{dx^{a}}f(x)=\sum_{n}C_{n}\frac{d^{a}x^{c_{n}}}{dx^{a}}, \quad \frac{d^{a}}{dx^{a}}x^{c}=\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a}$$

で定義する。ただし $c-a,.c$ は負の整数ではないとする。a は実数でなくても良いが正の実数のときは

$$\frac{d^{-a}}{dx^{-a}}f(x)=I_{a}f(x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_{0}^{x}(x=t)^{a-1}f(t)dt$$

である。

定義1。積分変換$\mathcal{R}$を

$$\mathcal{R}[f(s)](x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds$$

で定義する。

両側 Laplace 変換$\mathcal{L}[f(s)](t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{st}f(s)ds$を使えば$\mathcal{R}$は

$$\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{L}[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}](\log x),\quad x=e^t$$

と書ける。この形ではxは正だが　xを複素数として$\mathbb{C}\backslash\{x|\Re x<0\}$を定義域とみるか$\mathbb{C}^{\times}$での多価関数とみる事も出来る。また$\mathcal{R}[f]$を超関数（または Miksinski の演算子）とみる事もあり　その場合$x\geq 0$で定義された台がコンパクトな関数の空間の上の超関数（演算子）とみるのが便利である。

変換$\mathcal{R}$で$\dfrac{d^a}{dx^a}$と積分が交換すれば（aが実数のとき）

$$\begin{aligned}&\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}\frac{x^{s-a}}{\Gamma(1+s)}f(s)ds\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^t}{\Gamma(1+t)}f(t+a)dt,\quad t=s-a,\end{aligned}$$

だから

定理1　$A>0,\ c>0$があって$|f(s)|\leq\dfrac{Ae^{c|s|}}{\Gamma(1+s)}$であれば

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}[f(s+a)](x)\tag{1}$$

である。

注意。aが複素数$b+ci$であれば

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x)=\int_{-\infty-ci}^{\infty+ci}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s+a)ds$$

だが　$f(s)$が$g(s)e^{-ts^2},\ t>0$と書けて$g(s)$が有限指数型であれば Cauchy の積分定理から (1) が成り立つ。

(1) から $\mathcal{R}$ の定義域では $\{\frac{d^a}{dx^a}|a \in \mathbb{R}\}$ は 1 経数群である。その生成作用素

$$\log(\frac{d}{dx}) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a}(\frac{d^a}{dx^a} - I)$$

([2],[5]), については

$$\log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{df(s)}{ds}](x) \tag{2}$$

が成り立つ。(2) から

$$(\log(\frac{d}{dx}))^a\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{d^a}{ds^a}f(s)](x)$$

となるはずだが $a = -1$ のときは

$$(\log(\frac{d}{dx}))^{-1}\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\int_{-\infty}^{s} f(t)dt](x)$$

である。

さらに $f(s)$ が $s \geq c$ で連続 $s > c$ で微分可能 $s < c$ で 0 の時

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s+h)ds - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds) \\
=&\frac{1}{h}\int_{c-h}^{c} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s+h)ds+ \\
&+\int_{c}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)}\frac{f(s+h)-f(s)}{h}ds
\end{aligned}$$

だから

$$\log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[f'(s)](x) + \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}f(c) \tag{3}$$

となる。$f(s)$ の超関数の意味での微分は
$f'(s) + f(c)\delta(s-c)$ だから (2) は f が微分可能でなくても $\frac{df}{dx}$ を超関数の意味での微分とすればなりたつ。なお定義から以下で役立つ次の補題が成り立つ。

補題 1。$\delta_c = \delta(s-c)$ とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_c](x) = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)} \tag{4}$$

である。この式は c が複素数でも成り立つ。

(4) によれば $\mathcal{R}[\delta_{-n}] = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ だから $n - a$ が自然数でなければ

$$\frac{d^a}{dx^a}\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{R}[\delta] = 0 \neq \frac{d^{n+a}}{dx^{n+a}}\mathcal{R}[\delta]$$

である。このため　分数冪微分の定義は Riemann-Liouville と Caputo(-Riesz) の2種ある。しかし超関数を使い定義域を Mikusinski の演算子の空間とすればこの問題は解消する。これに対応するのが以下に定義する $\mathcal{R}_+$ である。

定義2。 $g_+(x)$ を

$$g_+(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

と定義し変換 $\mathcal{R}_+$ を

$$\mathcal{R}_+[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^s)_+}{\Gamma(1+s)} f(s) ds \tag{5}$$

で定義する。

定義から $\mathcal{R}_+[f(s)](x)$ は $\mathbb{R}_+ = \{x | x \geq 0\}$ の（超）関数で

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon)} g(x) dx = -\int_0^{\infty} \frac{x^{\epsilon}}{\epsilon\Gamma(\epsilon)} g'(x) dx$$

だから $\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{R}_+[\delta_{\epsilon-1}] = \delta$ である。よって $\mathcal{R}_+$ については

$$\mathcal{R}_+[\delta_{-n-1}] = \delta^{(n)} (= \frac{d^n}{dx^n}\delta) \tag{6}$$

である。定義と (6) から

命題1。 $\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}_+[f(s)](x)$, $x > 0$ であり

$$\frac{d^a}{dx^a}\left(\frac{d^b}{dx^b}\mathcal{R}_+[f(s)](x)\right) = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}\mathcal{R}_+[f(s)](x),$$

が成り立つ。

2　$\mathcal{R}$ と Borel 変換

$\mathcal{B}[\zeta^n](z) = \dfrac{z^n}{n!}$ を線形に拡張した変換を Borel 変換と言う。$\phi(\zeta)$ が原点の近傍での正則関数のとき

$$\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{\zeta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

である。定義から $\mathcal{B}[\phi]$ は有限指数型の整関数で

$$\frac{d}{dz}\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \mathcal{B}[\zeta^{-1}\phi(\zeta)](z),$$
$$\mathcal{B}[\phi(\zeta)\psi(\zeta)](z) = \mathcal{B}[\phi(\zeta)]\sharp\mathcal{B}[\psi(\zeta)](z),$$
$$u(x)\sharp v(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty u(x-t)v(t)dt$$

である。代数的には $\mathcal{O}$ を原点での正則関数の芽の環、$\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ を全平面上の有限指数型関数の $\sharp$-積で作る環としたとき Borel 変換は

$$\mathcal{B} : \mathcal{O} \cong \mathrm{Exp}(\mathbb{C}),$$

の同型を与える。

またBorel 変換の積分表示から

$$\mathcal{B}[\zeta^{-n}](z) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{7}$$

となる。これから Borel 変換は　原点での有理型関数の芽の体 $\mathcal{M}$ からの写像に拡張できるがこの場合は（準）同型ではない。

Borel 変換の逆変換は

$$\mathcal{B}^{-1}[g(t)](x) = \int_0^\infty e^{-t}g(tx)dt$$

だが　この式は g が有限指数型でなくても定義できる。特に

$$\mathcal{B}^{-1}[t^c](x) = \Gamma(1+c)x^c, \quad \mathcal{B}^{-1}[\log t] = \log x - \gamma$$

である。

定義 3 ([1])。x^c と $\log x$ の Borel 変換を

$$\mathcal{B}[t^c] = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \mathcal{B}[\log t] = \log x + \gamma \tag{8}$$

と定義する。

公式

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}(\log x)^{\sharp n} = \frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(1+t)}x^t$$

が成立するから([1]), この定義はBorel 変換の主な性質を保存する。また右半平面では広義一様に

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{B}[(t+\epsilon)^c](x)=\frac{x^c}{\Gamma(1+c)},$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{B}[\log(t+\epsilon)](x)=\log x+\gamma$$

となる。代数的には $\mathsf{F}\langle X\rangle$ を関数環 F と全平面で収束する冪級数環（整関数の環, 変数 X）から生成された環としたとき拡張されたBorel 変換は

$$\mathcal{O}\langle X\rangle/(e^X-x)\cong \mathrm{Exp}(\mathbb{C})\langle X\rangle/(e^X-e^{-\gamma}x),$$

の同型を $\mathcal{M}\langle X\rangle/(e^X-x)$ から $\mathrm{Exp}(\mathbb{C})/(e^X-e^{-\gamma}x)$ を微分で閉じるように拡張した環への写像（準同型ではない）に拡張したものである。

一方 $\mathcal{B}_+[f]=\mathcal{B}[f]_+$ とすれば

$$\int_0^\infty e^{-xt}\delta(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-s}\delta(s)ds=\frac{1}{x}$$

だから $\mathcal{B}_+[\frac{1}{t}]=\delta$, 一般に

$$\mathcal{B}_+[t^{-n-1}]=\delta^{(n)} \tag{9}$$

である。代数的には

$$\mathcal{B}_+;\mathcal{M}\cong \mathrm{Exp}(\mathbb{C})[\delta],$$

の同型を与え これを

$$\mathcal{M}\langle X\rangle/(e^X-x)\to(\mathrm{Exp}(\mathbb{C})\langle X\rangle/(e^X-e^{-\gamma}x)[\delta],$$

の写像に拡張したものが拡張された $\mathcal{B}_+$ である。$\mathcal{M}\langle X\rangle/(e^X-x)$ には $1\in\mathbb{Z}$ が $1\cdot X=X+2\pi i$ で働き この作用で不変な部分環が $\mathcal{M}$ だから Galois 群 $\mathbb{Z}$ の Galois 拡大的な拡大環である。ただし拡大体では無い。

(9) から

定理2。次の式が成り立つ。

$$\mathcal{R}[\delta_c]=\mathcal{B}[x^c],\quad \mathcal{R}_+[\delta_c]=\mathcal{B}_+[x^c] \tag{10}$$

また $\mathcal{R}[\delta_c^{(n)}]$ は $\log x$ の n-次多項式と x^c の積である。

命題2。拡張された Borel 変換については

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{B}[f(t)](x) = \mathcal{B}[t^{-a}f(t)](x), \tag{11}$$

$$\log(\frac{d}{dx})\mathcal{B}[f(t)](x) = -\mathcal{B}[\log t f(t)](x) \tag{12}$$

が成り立つ。

(8) と (11) から

$$\mathcal{R}[\delta_c^{(n)}] = (\log(\frac{d}{dx}))^n\mathcal{B}[t^c] = (-1)^n\mathcal{B}[(\log t)^n t^c]$$

などが得られる。

注意。(10) から δ_c, $c \in \mathbb{C}$ で張られる空間は $\mathcal{R}$ によって x^c, $c \in \mathbb{C}$ で張られる空間に移される。δ_c で生成される空間の元

$$\sum_n V(c_n)\delta_{c_n}$$

は（$\{c_n\}$ が離散なとき)discrete delta potential と呼ばれている。

定理 2 から $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ と Taylor 展開されていれば

$$f(x) = \mathcal{R}[\sum_{n=0}^{\infty} n! c_n \delta_n](x)$$

である。たとえば

$$e^x = \mathcal{R}[\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n],\ \sin x = \mathcal{R}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta_{2n+1}]$$

などである。これらの例は　$\mathcal{R}$ の定義域としては関数の空間よりも discretre delta potential の空間が適切であることを示してるようである（７節参照)。連続な世界での微分は discrete な世界での差分だが定理 1 はそのことの反映とも解釈できる。

また　δ_c で張られる空間に微分 $\dfrac{d}{dx}$ を作用させて出来る空間は x^c と $\log x$ から和と積で生成される空間に移される。$\log x = t$ とすれば　移った先は t と e^{ct}, $c \in \mathbb{C}$ から生成された空間である。ただし無限次元 vector 空間として　どのような空間を使うのが

適切かは　問題である。また discrete delta potential の $\mathcal{R}$ による像は解析関数になる。解析的でない関数が像に含まれるよう適当な位相をいれ discrete delta potential の空間を完備化するのもこれからの課題である。

Borel 変換は原点での関数の芽に対し定義されたが

$$\frac{1}{1-x} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, & |x| < 1, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}, & |x| > 1 \end{cases}$$

のように ∞ の近傍での展開があれば　それから形式的に

$$\mathcal{B}_+[-\sum_{n=1}^{\infty} t^{-n}] = -\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}$$

という変換ができる。この右辺は Schwartz の意味での超関数ではないが作用が意味のある関数空間は存在する。一般に f が ∞ の近傍で Puiseaux 展開できれば　それを使って形式的に Borel 変換が計算できる。これを $\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_{\infty,+}$ と書くが以下では使わない。

3　Borel 変換と定数係数分数冪微分方程式

(7) を利用すれば定数係数分数冪微分方程式の解を作ることができる。最初に良く知られている定数係数微分方程式の解について説明する。

$$P(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n, \quad P(\frac{d}{dx}) = \frac{d^n}{dx^n} + c_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots\ ; c_n$$

とする。

$$P(\frac{d}{dx})\mathcal{B}[\phi] = \mathcal{B}[P(\zeta^{-1})\phi]$$

だから $P(X) = \prod_i (X-\lambda_i)^{n_i}$ と因数分解されていれば $X^{-1} - \lambda = X^{-1}(1-\lambda X)$ により

$$P(\frac{d}{dx})\mathcal{B}[(1-\lambda_i\zeta)^{-k}] = 0, \quad k \le n_i \tag{13}$$

である。$\mathcal{B}[(1-\lambda\zeta)^{-1}](x)=e^{\lambda x}$ である。また $k\geq 2$ の時 $(1-\lambda X)^{-k}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k-1)\cdots(n+1)X^n$ であり

$$\begin{aligned}&\frac{(n+k-1)\cdots(n+1)}{n!}\\ =&\frac{c_{k,1}}{n!}+\cdots+\frac{c_{k,k-2}}{(n-k+2)!}+\frac{1}{(n-k+1)!}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}[(1-\lambda\zeta)^{-k}](x)\\ =&\frac{1}{(k-1)!}\left(c_{k,1}e^x+\cdots+c_{k,k-2}x^{k-2}e^x+x^{k-1}e^x\right)\end{aligned} \tag{14}$$

である。$y=\mathcal{B}[\zeta^{-m}(1-\lambda)^{-k}](x)$ も $P(\frac{d}{dx})y=0$ をみたすが これは (12) のかたちの関数の 1 次結合であらわされる。これが Borel 変換による　方程式 $P(\frac{d}{dx})y=0$ の解法である。以下ではこの解法を分数冪微分方程式 $P(\frac{d^a}{dx^a})y=0$ に適用する。

Borel 変換を使うと $\frac{d^a}{dx^a}\frac{d^b}{dx^b}=\frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}$ は必ずしも成り立たないので

$$P(\frac{d^a}{dx^a})=(\frac{d^a}{dx^a})^n+c_1(\frac{d^a}{dx^a})^{n-1}+\cdots+c_n \tag{15}$$

とする。こうすれば $\frac{d}{dx}+c^2$ と $(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}+c)(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}-c)$ は別の作用素になる。$P(X)=\prod_i(X-\lambda_i)^{n_i}$ により

$$P(\frac{d^a}{dx^a})=\prod_i(\frac{d^a}{dx^a}-\lambda_i)^{n_i}$$

である。

定理３。 $\Re a>0$ として

$$y=\mathcal{B}[\zeta^{ka-m}(1-\lambda_i\zeta^a)^{-k}](x),\quad k\leq n_i$$

とすれば $P(\frac{d^a}{dx^a})y=0$ である。

証明。 $P(X)=(\prod_{i\neq j}(X-\lambda_j)^{n_j})(x-\lambda)^{n_i-k}$ だから

$$P(\frac{d^a}{dx^a})y=\prod_{j\neq i}(\frac{d^a}{dx^a}-\lambda_j)^{n_j}(\frac{d^a}{dx^a}-\lambda_i)^{n_i-k}\mathcal{B}[\zeta^{-m}](x)=0$$

となり定理が成立する。

特に $k=1$ なら $\eta^{a-m}(1-\lambda\zeta^a)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\zeta^{a(n+1)-m}$ だから

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}[\zeta^{a-m}(1-\lambda\zeta^a)^{-1}](x)\\&=\sum_{n-0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(a+1-m+an)}x^{a(n+1)-m}\end{aligned}$$

である。拡張された Mittag-Leffler 関数
$E_{a,b}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{\Gamma(na+b)}$ を使えば

$$\mathcal{B}[\zeta^{a-m}(1-\lambda\zeta^a)^{-1}](x)=x^{a-m}E_{a,a-m+1}(\lambda x^a) \tag{16}$$

と書ける。よって

系。$P(\dfrac{d^a}{dx^a})(x^{a-m}E_{a,a-m+1}(\lambda x^a)=0$ である。

a が無理数なら　$\mathcal{B}[\zeta^{ka-m}(1-\lambda_i\zeta^a)^{-k}](x)$, $m\in\mathbb{N}$, は総ての自然数 m について 1 次独立だが a が有理数 $\dfrac{q}{p}$ であれば 1 次独立なものは $m=1,\ldots,q$ だけである (§6)。

なお $\{0<x<\infty\}$ では　広義一様に

$$\lim_{a\to 1}x^{a-m}E_{a,a-m+1}(\lambda x^a)=e^{\lambda x}$$

となる。また原点の近傍で可積分という条件をつければ $m=1$ 以外の解は排除される。

$k\geq 2$ であれば

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}[\zeta^{ka-m}(1-\lambda\zeta^a)^{-k}](x)\\=&\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)\cdots(n+1)}{\Gamma(1-m+(n-k)a)}\lambda^n x^{na}\end{aligned}$$

が a が整数でないとき Mittag-Leffler 関数などで書けるかは　問題である。

なお §6 でこれらの解と discretre delta potential との関係　および $\dfrac{d^a}{dx^a}$ を Hilbert 空間の作用素として扱う問題を取り上げる。

4 $\mathcal{R}$と定数係数分数冪微分方程式

$\Re\alpha_1 > 0, \ldots, \Re\alpha_n > 0$とする。

$$Ly = \sum_{n=0}^{m} c_n \frac{d^{a_n}}{dx^{a_n}} y \tag{17}$$

を定数係数分数冪微分作用素とする。$y = \mathcal{R}[f(s)]$とし(1)が成り立つとすれば

$$Ly = \mathcal{R}[\sum_{n=0}^{m} c_n f(s + a_n)] \tag{18}$$

である。$a_0, \ldots, a_m$から$\mathbb{C}$の中で加法で生成される群を$G(L) = G(a_0, \ldots, a_m)$とする。次の事は良く知られているが以下の便宜のため補題とする。

補題2。 $G(L)$が$\mathbb{C}$の中で離散群になるのは

1. $G(L) = \mathbb{Z}\alpha$,
2. $G(L) = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\psi$.

の2種にかぎる。ただし2の場合ω, ψはある楕円関数の基本周期である。また$\mathbb{R}$の中の離散群になるのは　1の場合 だけである。

これらの場合Lは

$$L = P(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}),\ P(X) = \sum_{k=0}^{m} c_k X^k,\ G(L) = \mathbb{Z}\alpha, \tag{19}$$

$$L = Q(\frac{d^\omega}{dx^\omega}, \frac{d^\psi}{dx^\psi}), \tag{20}$$
$$Q(X, Y) = \sum_{j+k \le m} c_{j,k} X^j Y^k,\ G(L) = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\psi,$$

の形になる。ただし$\Re\alpha > 0$, $\Re\omega > 0$, $\Re\psi > 0$とする。また$\mathcal{R}$, $\mathcal{B}$を使うときは

$$\frac{d^{n\alpha}}{dx^{n\alpha}} \to (\frac{d^\alpha}{dx^\alpha})^n$$

などの置き換えを行う。$\mathcal{R}_+$, $\mathcal{B}_+$を使うときはこの必要はない。なお(20)の形の意味のある方程式があるかを探るのは今後の課題である。

(19), (20) から

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} u_{\alpha;\lambda} = \lambda u_{\alpha;\lambda}, \tag{21}$$

$$\frac{d^\omega}{dx^\omega} v_{\omega,\psi;\mu,\nu} = \mu v_{\omega,\psi;\mu,\nu}, \ \frac{d^\psi}{dx^\psi} v_{\omega,\psi;\mu,\nu} = \nu v_{\omega,\psi;\mu,\nu} \tag{22}$$

となる $u_{\alpha;\lambda}$, $v_{\omega,\psi;\mu,\nu}$ が存在すれば

$$P(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}) u_{\alpha;\lambda} = P(\lambda) u_{\alpha;\lambda},$$

$$Q(\frac{d^\omega}{dx^\omega}, \frac{d^\psi}{dx^\psi}) v_{\omega,\psi;\mu,\nu} = Q(\mu,\nu) v_{\omega,\psi;\mu,\nu}$$

だから方程式 $Ly = Cy$ は λ を $P(\lambda) = C$, あるいは μ, ν を $Q(\mu,\nu) = C$ と選ぶことにより解ける。

$y = \mathcal{R}[h(s)]$ であれば $\dfrac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[h(s+a)]$ だから $u_{\alpha;\lambda} = \mathcal{R}[h_{\alpha;\lambda}]$, $v_{\omega,\psi;\mu,\nu} = \mathcal{R}[h_{\omega,\psi;\mu,\nu}]$ であり

$$h_{\alpha,\lambda}(s+\alpha) = \lambda h_{\alpha,\lambda}(s), \tag{23}$$

$$h_{\omega,\psi;\mu,\nu}(s+\omega) = \mu h_{\omega,\psi;\mu,\nu}(s), \tag{24}$$

$$h_{\omega,\psi;\mu,\nu}(s+\psi) = \nu h_{\omega,\psi;\mu,\nu}(s) \tag{25}$$

であれば (21), (22) が満たされる。

(23) をみたす関数は

$$h_{\alpha;\lambda}(s) = e^{cs} h(s); \quad e^{c\alpha} = \lambda, \ h(s+\alpha) = h(s),$$

であり (24) と (25) を同時に満たす関数は　乗法関数と楕円関数の積 ; $e^{\zeta(s)}\wp(s)$、$\zeta(s)$ は Weierstrass の ζ-関数、など、である。しかしこれらの関数には $\mathcal{R}$ や $\mathcal{R}_+$ は定義できない。 仮に $\mathcal{R}[e^{cs}]$ が関数（または　Schwartz　の超関数）として定義できれば　方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$ が独立な無限の解をもつことになって解の一意性に矛盾する。しかし　適当な空間の上の一般化関数としては意味づけ可能である。次節で　これについて簡単に説明する。

一方　$h(s)$ が discrete delta potential であれば 例えば

$$\tau_a(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_{na}) = \lambda(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_{na}),$$

$\tau_a f(s) = f(s+a)$, であり a が正の整数なら

$$\mathcal{R}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_{na}] = e^{\lambda x}$$

だから意味のある解がえられる場合がある。一般に

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_{n\alpha+\beta}$$

に対し $\mathcal{R}_+$ が定義できれば (23) をみたす。また

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu^n \nu^m \delta_{n\omega+m\psi+\kappa}$$

に対し $\mathcal{R}_+$ が定義できれば (24),(25) を同時にみたす。しかし (23) の場合でも形式的な級数

$$\mathcal{R}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_{n\alpha+\beta}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \frac{x^{n\alpha+\beta}}{\Gamma(1+n\alpha+\beta)}$$

は発散するので α が整数でないときは　簡単ではない。これについては6節以下で述べる。

5　一般化関数としての $\mathcal{R}_+[e^{cs}]$ の定義

$\mathcal{R}_+ : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ と見たとき $f(s)$, $g(x)$ の台がコンパクトなら

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{R}_+[f(s)](x)g(x)dx &= \int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^\infty \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds\Big) g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\Gamma(1+s)}\Big(\int_0^\infty x^s g(x)dx\Big) f(s)ds\end{aligned}$$

だから

$$\mathcal{R}_+^\dagger[g(x)](s) = \frac{1}{\Gamma(1+s)} \mathcal{M}[xg(x)](s),$$

である。ただし $\mathcal{M}[h(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1}h(x)dx$ は Mellin 変換である。Mellin 変換の逆は

$$\mathcal{M}^{-1}[g(s)](x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} g(s)ds$$

だから $\mathcal{M}^{-1}[e^{-ts^2}]$ は定義できないが $\mathcal{M}^{-1}[e^{-ts^4}]$ は定義できる。この事は $\mathcal{R}_+[e^{cs}]$ などの定義（意味づけ）には「Gauss 越え」が要る事を暗示している ([4])。

ある $A, B > 0$ があって $|h(s)| \leq Ae^{B|s|^3}$ となる整関数の空間を H_3 とする。$\{h_n\} \subset \mathsf{H}_3$ が　すべての n について $|h_n(s)| \leq Ae^{B|s|^3}$ とある $A, B > 0$ で抑えられ全平面 $\mathbb{C}$ で h に広義一様収束するとき $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ と定義して H_3 に位相をいれる。

定義３。関数空間 F_4 を

$$\mathsf{F}_4 = \{h(s)e^{-as^4} | h(s) \in \mathsf{H}_3, \text{for some } a > 0\}$$

で定義する。

F_4 は $e^{-as^4} \to \log a$ で $\{e^{-as^4}\} \cong \mathbb{R}$ とみて

$$\mathsf{F}_4 \cong \mathsf{H}_3 \times \mathbb{R}$$

となるから積空間の位相を入れる。

さらに $\tilde{\mathsf{F}}_4 = \dfrac{1}{\Gamma(1+s)}\mathsf{F}_4$ と置く。また

$$\mathsf{G}_4 = \{g(x) | xg(x) \in \mathcal{M}^{-1}(\mathsf{F}_4)\}$$

とする。

定義４。$T : \tilde{\mathsf{F}}_4 \to \mathbb{C}$ を線形汎関数とする。$\mathcal{R}_+[T]$ を

$$\mathcal{R}_+[T](g(x)) = T(\mathcal{R}^\dagger[g]) \tag{26}$$

で定義する。

定義から $\mathcal{R}_+[T]$ は G_4 の上の一般化関数である。

定義５。$\mathbb{R}$ 上の関数 u に対し $T_u(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)f(s)ds$ としこれが $\tilde{\mathsf{F}}_4$ の汎関数になるとき

$$\mathcal{R}_+[u] = \mathcal{R}_+[T_u]$$

と定義する。

$|u(s)| \leq Me^{C|s|^3}$ と評価されれば T_u が定義できるから $u = e^{cs}$ や周期関数は　この意味では $\mathcal{R}_+$ が定義できる。

$|u(s)| \leq Me^{C|s|}$ であれば　$u(s)e^{-ts^2}$, $t > 0$ には関数として $\mathcal{R}_+$ が定義され (1) が成り立つ。また G_4 の上の一般化関数として

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{R}_+[u(s)e^{-ts^2}] = \mathcal{R}_+[u(s)]$$

である。よって $|u(s)| \leq Me^{C|s|}$ であれば　(1) が成り立つ（正しくは（1）の右辺で $\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}_+[u]$ を定義する：$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}_+[u(s)] = \mathcal{R}_+[u(s+a)]$）。

注意。 分数冪微分の積公式は

$$\frac{d^a}{dx^a}(fg) = \frac{d^a f}{dx^a}g + a\frac{d^{a-1}f}{dx^{a-1}}\frac{dg}{dx} + \frac{a(a=1)}{2}\frac{d^{a-2}f}{dx^{a-2}}\frac{d^2g}{dx^2} + \cdots$$

([2]), だから $T_{\frac{d^a f}{dx^a}}(g) = -T_f[\frac{dg}{dx}]$ のような式は成り立たない。

この定義に従えば (23) をみたす無限の独立な一般化関数が G_4 の上の線形汎関数として存在する。また (24), (25) を同時に満たす一般化関数も基本周期 ω, ψ の楕円関数と　与えられた周期（表現）を持つ乗法関数がともに実軸の上で特異点を持たなければ G_4 の上の一般化関数として存在する。この場合　解の moduli は

$$\{x|P(x) = 0\} \times C^\infty(\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}),$$

(方程式 (19)),

$$\{(x,y)|Q(x,y) = 0\} \times F(\mathbb{C}/(\omega\mathbb{Z} \oplus \psi\mathbb{Z}))$$

(方程式 (20)) となる。ただし $F(\mathbb{C}/(\omega\mathbb{Z} \oplus \psi\mathbb{Z}))$ は実軸上で正則な楕円関数の空間である。

これらの一般化関数解がどのような意味があるかは今後の課題である。

注意。 Borel 変換は解析関数に対してだけ定義されている。しかし $\mathcal{B}[e^{as}](x) = J_0(i\sqrt{2ax})$, J_0 は 0-字 Bessel 関数、から

$$\mathcal{B}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\sqrt{-4\pi i x s}\mathcal{F}[f](s)ds,$$

$\mathcal{F}[f(t)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t}f(t)dt$, と Hnakel 変換と Fourier 変換の合成に分解される。このことから必ずしも解析的でない（超）関数にたいしても Borel 変換が定義が出来る。たとえば $\mathcal{B}[\delta] = -\delta_{i\infty}$,

$\delta_{i\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(ix)$, である。しかしその値は $\mathcal{G}_4$ と似た関数空間の上の一般化関数になる ([1])。この Borel 変換の拡張と本節で述べた $\mathcal{R}_+$ の拡張との関係を調べるのは今後の課題である。

6 Discrete delta porential から得られる関数解

$\dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}\mathcal{R}[\delta_{n\alpha+m}] = \mathcal{R}[\delta_{(n-1)\alpha+m}]$ だから m が負の整数なら

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\mathcal{R}[\delta_{\alpha+m}] = 0$$

である。また $\mathcal{R}[\delta_{-\alpha+m}]$ を $\dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}\mathcal{R}[\delta_m] = 0$ と計算すれば $(\dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha})^n \neq \dfrac{d^{n\alpha}}{dx^{n\alpha}}$ となっている場合

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\mathcal{R}[\delta_{-n\alpha+m}] = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\Big(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\Big)^n\mathcal{R}[\delta_m] = 0$$

となる。

注意。 $\{\mathcal{R}[\delta_c] | c \in \mathbb{C}\}$ では $\dfrac{d^a}{dx^a} = \dfrac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}$ は必ずしも成立しないので $\dfrac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[\delta_c]$ の計算では $\dfrac{d^a}{dx^a}$ をどう解釈して計算しているかはっきりさせる必要がある。

上記の解釈に従えば

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n\mathcal{R}[\delta_{n\alpha+m}]\Big) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathcal{R}[\delta_{n\alpha+m}]\Big)$$
$$= \lambda\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathcal{R}[\delta_{n\alpha+m}]\Big)$$

と計算してよい。これから定理3、系の言い換えだが

命題3。 $\alpha n + m$, $N = 1, 2, \ldots$ が負の整数でないとき

$$e_{\alpha,m;\lambda}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n\alpha+m)}x^{n\alpha+m} \tag{27}$$

が方程式

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}y = \lambda y \tag{28}$$

をみたす。

一般化された Mittag-Leffler 関数 $E_{a,b}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{\Gamma(ka+b)}$ を使うと

$$e_{\alpha,m;\lambda}(x)=\lambda x^{\alpha+m}E_{\alpha,\alpha+m}(\lambda x^{\alpha})$$

である。よって §3 の議論は dsicrete delts potential の $\mathcal{R}$ による変換として見直せる。なお $\dfrac{d^{n\alpha}}{dx^{n\alpha}}\neq(\dfrac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}})^n$ なので

$$e_{\alpha,\lambda;m}\neq e_{n\alpha,\lambda^n;m}$$

である。

α が自然数のときは $n\alpha+m\geq 0,\ n=1,2,\ldots$ となるには $m=-1,\ldots,-\alpha$ であれば良い。$e_{\alpha,m,\lambda}(x),\ m=-1,\ldots,-\alpha$ は (22) の独立な α 個の解を与える。これらは指数関数の有限和として表されるから複素変数の関数として整関数である。

同様に α が有理数 $\dfrac{q}{p}$, $(p,q)=1$ であれば $m=-1,\ldots,-q$ で (22) の独立な解が与えられる。複素変数の関数として　これらは 1 価でないが　変数変換 $t^p=x$ で一価になる。t の関数として全平面で有理型だが原点に高々 $(qp-)1$ 位の極を持つ。

一方 α が無理数なら　総ての m について $e_{\alpha,m;\lambda}(x)$ は独立な (22) の解である。よって (22) は境界条件などがなければ無限の独立な解をもつ。どのような境界条件が適切か　探るのは今後の課題であり次節で　この問題に関連して分数冪微分の働く Hilbert 空間について述べる。

。特に α が 1 に近いとき $e_{\alpha,m;\lambda}(x)$ が原点の近傍で可積分になるためには $m=1$ が必要である。したがって分数冪発展方程式

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial^{\alpha}t}U(t,x)=D_xU(t,x)$$

を Fourier の方法で解く時は $e_{\alpha,1;\lambda}(t)$ だけを考えれば良い。

$v_{\alpha,m;\lambda,+}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\delta_{n\alpha+m}$, $v_{\alpha,m;\lambda}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n\delta_{n\alpha+m}$ とすれば $\mathcal{R}[v_{\alpha,m;\lambda,+}]=e_{\alpha,m;\lambda}$ であり $\tau_\alpha v_{\alpha,m;\lambda}=\lambda v_{\alpha,m;\lambda}$ である。また

$$\tau_\alpha v_{\alpha,m;\lambda,+}=\lambda v_{\alpha,m;\lambda,+}+\lambda\delta_m$$

だから極限の意味を適当にとれば

$$v_{\alpha,m;\lambda}=\lim_{k\to\infty}\left(\lambda^{-1}\tau_\alpha\right)^k\delta_{\alpha,m;\lambda,+}$$

が成立する。$\mathcal{R}[v_{\alpha,m;\lambda,+}] = \lambda\mathcal{R}[v_{\alpha,m;\lambda,+}]$ だから $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}e_{\alpha,m;\lambda} = \lambda e_{\alpha,m;\lambda}$ は $\tau_\alpha v_{\alpha,m;\lambda} = \lambda v_{\alpha,m;\lambda}$ から従う。$v_{\alpha,m;\lambda}$ から生成される空間 $\mathrm{V}_{\alpha,m;\lambda}$ は作用 $1\cdot v = \tau_\alpha v$, $1 \in \mathbb{Z}$ で $\mathbb{Z}$ の表現空間だから (21) の解と $\mathbb{Z}$ の discrete delta potential の空間での表現は関係がある。

同様に $v_{\alpha,m;\lambda:k,+} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+1)\lambda^n\delta_{(n+k)\alpha-m}$ とおけば

$$\mathcal{R}[v_{\alpha,m;\lambda:k,+}] = (k-1)!\mathcal{B}[s^{k\alpha-m}(1-\lambda s^\alpha)^{-k}]$$

である。$v_{\alpha,m;\lambda:k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+k)\cdots(n+1)\lambda^n\delta_{(n+k)\alpha-m}$ とおけば $k=1$ の場合と同様に

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\mathcal{R}[v_{\alpha,m;\lambda:k}](x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\mathcal{R}[v_{\alpha,m;\lambda:k,+}](x)$$

となる。これから $v_{\alpha,m;\lambda}, v_{\alpha,m;\lambda:2}, \cdots, v_{\alpha,m;\lambda:k}$ で張られる空間を $V_{\alpha,m;\lambda:k}$ とすれば 作用 $1\cdot v = \tau_\alpha v$ により $V_{\alpha,m;\lambda:k}$ は $\mathbb{Z}$ の表現空間で　作用 $1\cdot v$ はただ一つの Jordan block を持つ行列で表現される。よって

観察。 3 節で得られた　定数係数分数冪微分方程式の解は discrete delta potential の空間での $\mathbb{Z}$ の表現と関係している。

7　分数冪微分の働く Hilbert 空間

定義 6。 Hilbert 空間 $\mathrm{H}_{\alpha,m}$ を

$$\mathrm{H}_{\alpha,m} = \{\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n\alpha-m} | \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 < \infty\}$$

で定義する。

$\mathsf{H}_{\alpha,m} = \{\sum_{n=1}^{\infty} c_n\delta_{n\alpha,m} | \sum_n |\frac{c_n}{\Gamma(1-m+n\alpha)}|^2 < \infty\}$ とおけば $\mathcal{R}: \mathsf{H}_{\alpha,m} \cong \mathrm{H}_{\alpha,m}$ である。

$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ をこの空間の上の作用素として扱える。具体的には

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{n\alpha-m} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1-m+n\alpha)}{\Gamma(1-m+(n-1)\alpha)}x^{(n-1)\alpha-m} & n>1, \\ 0, & n=1. \end{cases}$$

である。m は α が有理数 $\frac{q}{p}$ であれば　$1, \ldots q$ のいずれか, 無理数（実数でなくても良い）なら任意の自然数である。

$\mathrm{H}_{\alpha,m}$ の定義から $\Re\alpha > 0$ であれば $\mathcal{B}[s^{k\alpha-m}(1-\lambda s^{\alpha})^{-1}](x) \in \mathrm{H}_{\alpha,m}$ である。しかし $m \neq m'$ であれば $\mathcal{B}[s^{k\alpha-m}(1-\lambda s^{\alpha})^{-1}](x) \notin \mathrm{H}_{\alpha,m'}$ である。

補題3。α が実数のとき $\mathrm{H}_{\alpha,m}$ での内積は

$$(f(x), g(x)) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} f(e^{2\pi i\theta})g(e^{-2\pi i\theta})d\theta$$

であたえられる。

この内積の定義から方程式 (21) の境界条件としては

$$y(e^{-\frac{-\pi i}{\alpha}}) = y(e^{\frac{\pi i}{\alpha}}),\ \text{or}\ y(1) = y(e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}),$$

が適切である。$y = e_{\alpha,m;\lambda}(x)$ とすれば　この条件は

$$E_{\alpha,\alpha+m}(\lambda) = e^{\frac{2m\pi i}{\alpha}}E_{\alpha,\alpha+m}(1),$$

となり m に関係した条件になる。

定義7。$\mathrm{H}_{\alpha,m}$ の対角作用素 $A_{\pm}$ を

$$A_+ x^{n\alpha-m} = \frac{\Gamma((n+1)\alpha - m + 1)}{\Gamma(n\alpha - m + 1)}x^{n\alpha-m},$$
$$A_- x^{n\alpha-m} = \frac{\Gamma(n\alpha - m + 1)}{\Gamma((n-1)\alpha - m + 1)}x^{n\alpha-m}$$

で定義する。

また $x^{\alpha} \notin \mathrm{H}_{\alpha,m}$ だが作用素 $x^{\pm\alpha}$ は

$$x^{\alpha}(x^{n\alpha-m}) = x^{(n+1)\alpha-m},$$

$$\begin{cases} x^{-\alpha}x^{n\alpha-m} = x^{(n-1)\alpha-m},\ n \geq 2, \\ x^{-\alpha}x^{\alpha-m} = 0. \end{cases}$$

で定義される。これらを使えば

命題4。$\mathrm{H}_{m,\alpha}$ の作用素として $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ は次のように表される。

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = A_+x^{-\alpha} = x^{-\alpha}A_-. \tag{29}$$

命題4から　αが実数であれば$x^{\alpha\dagger} = x^{-\alpha}$であり$A_\pm$は対称だから

$$(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha})^\dagger = x^\alpha A_+ = A_- x^\alpha$$

である。x^α, $\dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}$を変形生成消滅作用素とみれば　交換関係は

$$[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}, x^\alpha] = A_+ x^{-\alpha} \cdot x^\alpha - x^\alpha \cdot x^{-\alpha} A_- = A_+ - A_-$$

となる。

なお$\dfrac{d^{n\alpha}}{dx^{n\alpha}}$も$H_{\alpha,m}$で定義できるが　$\dfrac{d^{n\alpha}}{dx^{n\alpha}} \neq (\dfrac{dx^\alpha}{dx^\alpha})^n$である。

注意。$\Re\alpha > 0$だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\lambda^n}{\Gamma(n\alpha - m)}|^2 < \infty$$

となって$e_{\alpha,-m;\lambda} \in \mathrm{H}_{\alpha,m}$である。したがって$H_\alpha = \sum_m H_{\alpha,m}$は$\dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}$を扱うのに適切な空間だろう。

8　Discrete delta potential から得られる仮想解

Discrete delta potential $P = \sum_n c_n \delta_{a_n}$が$\tau_\alpha P = \lambda P$であればPは

$$P_{\alpha;\beta:\lambda} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_{n\alpha+\beta}$$

の加算個の和になる。総ての$n \in \mathbb{Z}$で$n\alpha + \beta$が負の整数にならなければ　形式的に

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_+[P_{\alpha;\beta:\lambda}]\\ =&\mathcal{B}_+[\sum_{\Re(n\alpha+\beta)>-1} \lambda^n x^{n\alpha+\beta}] + \mathcal{B}_+[\sum_{\Re(n\alpha+\beta)\leq -1} \lambda^n x^{n\alpha+\beta}]\end{aligned}$$

と書く。この右辺第1項は収束して関数になる。

$\Re(n\alpha+\beta) \le -1$ のとき $[-\Re(n\alpha+\beta)] = m$ とすれば
$\int_0^\infty x^{n\alpha+\beta} f(x)dx$ の有限部分は

$$\begin{aligned}
&\text{p.f.} \int_0^\infty x^{n\alpha+\beta} f(x)dx \\
=&\frac{(-1)^m}{(n\alpha+\beta+1)\cdots(n\alpha+\beta+m)} \int_0^\infty x^{n\alpha+\beta+m} \frac{d^m f(x)}{dx^m} dx,
\end{aligned}$$

となる。また $\dfrac{1}{\Gamma(1-s)} = \dfrac{\sin(\pi s)\Gamma(s)}{\pi}$ だから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+n\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\pi(n\alpha+\beta))\Gamma(-(n\alpha+\beta))}{\pi} \\
=&\frac{\sin(\pi(n\alpha+\beta))\Gamma(-(n\alpha+\beta+m))}{\pi} \times \\
&\times (-1)^m (n\alpha+\beta+1)\cdots(n\alpha+\beta+m),
\end{aligned}$$

である。よって

$$\text{p.f.} \int_0^\infty x^{n\alpha+\beta} f(x)dx = \frac{C_n}{\pi} \int_0^\infty x^{n\alpha+\beta+m} \frac{d^m f(x)}{dx^m} dx \tag{30}$$

$$C_n = (-1)^m \sin(\pi(n\alpha+\beta))\Gamma(-(n\alpha+\beta+m)), \tag{31}$$

である。$|C_n|$ は n について有界だから

$$\mathsf{F}_{C,M} = \{f(x) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}} | |\frac{d^n f(x)}{dx^n}| \le MC^n\}$$

とすれば　λ を適当に選べば $\mathcal{R}_+[P_{\alpha;\beta:\lambda}]$ が $\mathsf{F}_{C,M}$ の上の一般化関数として意味をもつ。ただしこのような解は $\dfrac{d^a}{dx^a}Y = \lambda Y$ の一意性を破るから Schwartz の意味での超関数ではない。、

$\mathcal{R}_+[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu^n \nu^m \delta_{n\omega+m\psi+\kappa}]$ についても同様に意味づけできれば (21) の仮想解がえられる。

注意一例。 $P_\lambda = \sum_{n=-\infty}^\infty \lambda^n \delta_n$ とすれば

$$\mathcal{R}_+[P_\lambda] = e_+^{\lambda x} + \sum_{n=1}^\infty \lambda^{-n} \delta^{(1-n)}$$

である。$\sum_{n=1}^\infty \lambda^{-n}\delta^{1-n}$ は $|\dfrac{d^n f}{dx^n}(0)| < Ca|^n$, $a < |\lambda|$ となる関数にたいしては作用できる。D を x-空間の正値楕円形方程式で固

有値 λ_n, 固有関数 $\phi_{\lambda_n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$、と Geen 作用素 G をもつとすれば発展方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + DU(t,x) = 0,$$

の初期値 $f(x) = \sum_n c_n\phi_n(x)$ をみたす解として $U(t,x) = \sum_n c_n\phi_n(x)e^{-\lambda_n t}$ のほかに $\mathcal{R}_+[P_{\lambda_n}]$ を使った

$$U(t,x)_+ + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{-m}(\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x))\delta^{1-m} = U(t,x)_+ + \sum_{m=1}^{\infty}G^m\phi(x)\delta^{1-m}$$

が適当な test 空間上の一般化関数解として存在する。ここで $\sum_{m=1}^{\infty}G^m\phi(x)\delta^{1-m}$ は t と x-空間の関数との相互作用が始まった「瞬間」の影響を表すが「非局所的」である。この意味を探るのは今後の課題である。

参考文献

[1] Asada,A.: Some extension of Borel transformation, J.Fac. Sci. Shinshu Univ.9(1974), 71-89, Borel transformation in non-analytic category, J. Fac. Sci. Shinshu Univ.12(1977), 1-35

[2] Asada,A.:Fractional calculus and infinite order differential operator, Yokohama J. Math.55(2010), 129-147. Fractional calculus and Gamma function, 幾何学的力学系理論とその周辺 (eds. Iwai,T. Tanimura,S. Yamaguchi,Y.) 17-38, 数理研講究録 1692(2010).

[3] Asada,A.: Lie algebra generated by logarithm of differentiation and logarithm, Balkan J. Geom. and Its Appl. 16(2011), 1-11. 関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する。藤井一幸編「数理の玉手箱」、９０－１３１。遊星社、2010.

[4] Fujii,K.: Beyond the Gausisian, I. SIGMA 7(2011), 022. 12pp. II. arXiv. 1103.4428v1.

[5] Nakanishi,N.: Logarithm type functions of the differential operator, Yokohama, J. Math. 55(2010),149-163.