

### 変曲点を持たない平面閉曲線について

東京工業大学・情報理工学研究科 梅原 雅顕 (Masaaki Umehara)  
Department of Mathematical and Computing Sciences  
Tokyo Institute of Technology

本研究は、2年前に大阪大学の修士課程を卒業した大野俊太郎氏と、名城大学の小沢哲也氏との共同研究です。

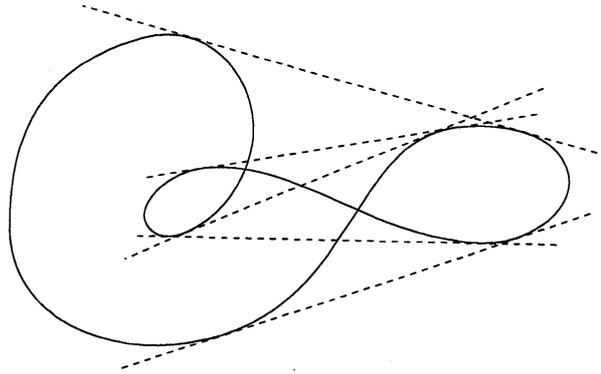


図 1. 交点数 2 で変曲点 2 個,  $d_1 = 4$  かつ  $d_2 = 1$  となる曲線.

#### 1. 導入

ここでは、平面閉曲線は、 $C^\infty$ -写像  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  で、

$$\gamma(t+1) = \gamma(t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

が成り立ち、さらに  $\dot{\gamma}(t) := d\gamma/dt$  がすべての  $t \in \mathbf{R}$  に対して消えないものとする。ここで扱う平面閉曲線  $\gamma(t)$  は、常に以下の「一般的」な条件を満たしているものと仮定する。

- (1) 交点数は高々 2 重点で、すべて横断的かつ
- (2) 変曲点の数は有限個で、
- (3) 平面上の直線はすべて高々 2 点でのみ曲線に接し、その接点となる点は曲線の変曲点ではなく、
- (4) さらに 2 点で接する直線の数有限個とする。

但し、**変曲点**とは行列式  $\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))$  の符号が変化する点とする。以上の約束のもと平面閉曲線に関しては、Fabricius-Bjerre の公式 ([3])

と呼ばれる以下の等式が成立する.

$$(1.1) \quad d_1(\gamma) - d_2(\gamma) = \#\gamma + \frac{i_\gamma}{2}.$$

ここで,  $d_1(\gamma)$  は同じ側に接点をもつ 2 重接線の数,  $d_2(\gamma)$  は曲線が直線の異なる側から接する 2 重接線の数を表し, また  $\#\gamma$  は, 曲線  $\gamma$  の交点数,  $i_\gamma$  は曲線  $\gamma$  の変曲点の個数を表す.  $i_\gamma$  は偶数なので右辺は, もちろん整数となる. 図 1 の平面閉曲線では  $d_1 = 4, d_2 = 1, \#\gamma = i_\gamma = 2$  であるから, (1.1) の成立が簡単に確かめられる.

しかし, 一般に関係式 (1.1) を満たす 4 つの非負整数を与えたからといって, かならずしも, それを実現する平面閉曲線が存在するとは限らない. 例えば変曲点を持たない平面閉曲線に関しては以下の不等式が成り立つ,

$$(1.2) \quad d_1(\gamma) + d_2(\gamma) \leq \#\gamma(2\#\gamma - 1).$$

これは Halpern[5] が予想し, 小沢氏 [7] によって解かれた結果である. ここでは, 変曲点を持たない平面閉曲線の位相型について論じたい. 但し, 2 つの平面閉曲線が, 同じ位相型をもつとは, 一方の平面閉曲線の像を  $\mathbf{R}^2$  の微分同相写像によって他方の平面閉曲線の像に重ね合わせることができることを意味するものとする.  $I(\gamma)$  で, 与えられた閉

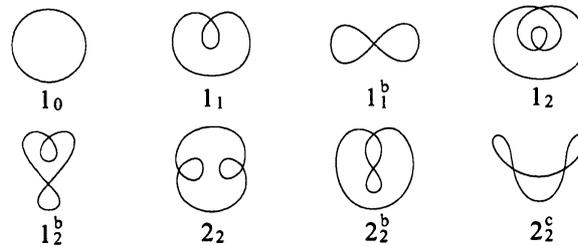


図 2. 交点数 2 以下の閉曲線.

曲線  $\gamma$  と同じ位相型をもつ閉曲線の中で, 変曲点の個数の最小値を表すものとする. 「変曲点を持たない平面閉曲線の位相型を決定せよ」という問題は「 $I(\gamma) = 0$  となる平面閉曲線の特徴づけよ」という問題と同じ意味である. 図 2 は, 2 交点以下の平面閉曲線の位相型の分類表である. この中で変曲点なしで実現できるのは 4 種類のみである.

本講演では, 平面閉曲線  $\gamma$  に対して, その位相型だけから決まる組み合わせ的な不変量  $\mu(\gamma)$  を定義し, 不等式

$$I(\gamma) \geq \mu(\gamma)$$

を示す. この不等式を利用して, 以下の手順で, 5 交点以下の  $I(\gamma) = 0$  となる平面閉曲線の分類を行う:

- (1) 5 交点以下の平面閉曲線は分類されている (cf. [4],[1],[2],[6]).  
ここでは論文 [6] の付録の分類表を用いた. その結果を用いて,  $\mu(\gamma) = 0$  となる平面閉曲線の位相型で 5 交点以下のものをすべてリストアップする.
- (2) 次に, リストアップされた閉曲線が実際に変曲点なしに描けるかどうか, 絵に描いて調べてみる. この手順がもっとも大変で, 実際, 変曲点なしに閉曲線を描くには忍耐, 気力, ひらめきを要する. (この部分は共同研究者の大野氏の多大なる貢献があったことを記しておきます.)

結果的に,  $\mu(\gamma) = 0$  である曲線はすべて変曲点なしで描けて, 5 交点までの閉曲線については  $\mu(\gamma) = 0$  であることと  $I(\gamma) = 0$  であることが同値であることがわかり, この冊子の末尾のような 5 交点以下の変曲点を持たない平面閉曲線の位相型の分類が得られた. 以下, この分類に用いられた不変量  $\mu(\gamma)$  の構成と性質, および, 今後の課題などについて解説する.

## 2. 不変量 $\mu(\gamma)$ の構成

まず, 不変量  $\mu(\gamma)$  を定義する. 単純閉曲線  $\gamma_0$  については

$$\mu(\gamma_0) := 0$$

と約束する. 実際, 単純閉曲線を変曲点をもたない形で平面に実現した曲線が「卵形線」であるから, この場合には, 等式

$$I(\gamma_0) = \mu(\gamma_0) = 0$$

が成り立っている. 以下, 自己交差をもつ閉曲線  $\gamma$  を考える.



図 3. 1 角形

閉曲線  $\gamma$  の部分弧で, 端点が  $\gamma$  の交点となるものを辺とよぶ. また有限個の辺から作られる単純閉曲線を, 閉曲線  $\gamma$  上の多角形とよぶことにする. (多角形の定義では辺の向きは考慮していない.) 上の図 3 は

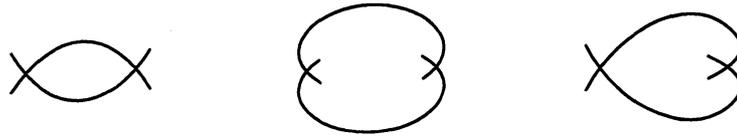


図 4. 2 角形.

1 角形の例であり，図 4 は 2 角形の例である．閉曲線を描くと，様々な多角形をその部分集合として見いだすことができる．



図 5. 許容的三角形.

**定義 1.** 与えられた自己交叉をもつ閉曲線  $\gamma$  上の多角形は，自身の囲む有界領域を**内部** といい，多くても高々 2 つの内角しか  $\pi$  より小さくならないとき，**許容的な多角形**とよぶ．

1 角形と 2 角形はすべて許容的である．図 5 は許容的な三角形の例であり，図 6 は許容的でない三角形の例である．図 6 には，あとで述べる別な事項の説明のために，曲線の向きが矢印で記されているが，曲線上の多角形を考えると，曲線の向きは必要はないことを再度強調しておく．

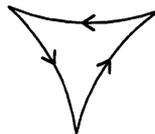


図 6. 許容的でない三角形.

許容的な多角形は以下のような大事な性質を有する．

**補題 2.** 許容的な多角形上には，少なくとも 1 つ曲率が正になる点が存在する．但し，多角形には，自身の囲む有界領域を左手に見る向きをつける．

(証明) 向きづけられた曲面上の測地三角形  $\triangle ABC$  のガウス・ボンネの定理は

$$\int_{\partial\triangle ABC} \kappa_g ds + \int_{\triangle ABC} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

で与えられる。ここで  $K$  は曲面のガウス曲率,  $\kappa_g$  は, 各辺に三角形領域を左手に囲む向きをつけた場合の測地的曲率,  $\angle A, \angle B, \angle C$  は各頂点における内角とする。この証明では, この公式を, 平面上の三角形に適用する。平面上の閉曲線  $\gamma$  から作られる  $G$  を  $n$ -角形とする ( $n \geq 3$ )。  $G$  は  $n-2$  個の三角形に分割することができるので,  $G$  に内部を左手に見る向きをつけると

$$\int_G \kappa_g ds = \left( \sum_{i=1}^n \angle A_i \right) - (n-2)\pi$$

が成り立つ。但し  $\angle A_i$  は  $G$  の  $i$  番目の頂点  $A_i$  に対応する内角を表すものとする。多角形  $G$  は許容的なので

$$\left( \sum_{i=1}^n \angle A_i \right) > (n-2)\pi$$

であるから  $\int_G \kappa_g ds > 0$  となり, 曲率が正となる点の存在がわかる。  $n \leq 2$  のときは, どれかの辺上に内角  $\pi$  の頂点を追加し 3 角形にすれば, 上記の証明はこの場合にも有効である。  $\square$

図 6 のように, 許容的でない多角形は, 負曲率の曲線で囲むことができる。したがって, 許容的であることは, この補題の成立には不可欠である。論文 [9] には定義されていないが, 以下, 「許容的な荷電列」という概念を用いて論文 [9] で導入した  $\mu(\gamma)$  を定義する。

**定義 3** (許容的な荷電列).  $N$  を自然数とし,  $P_1, \dots, P_N$  を, 閉曲線  $\gamma$  上の相異なる点で,  $\gamma$  の交点以外の点からなるものとする。いま, 符号列

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \{\pm 1\}$$

を与えて

$$X := P_1^{\varepsilon_1} \dots, P_N^{\varepsilon_N}$$

と積の因子の形に並べたものを **荷電列** という。このように書いたときには, 積について可環である表示にしたいので必ずしも  $P_1, \dots, P_N$  は曲線の向きの順に並んでいなくてもよいものとする。

いま,  $\gamma$  の多角形  $G$  を構成する各辺について  $\gamma$  の向きから誘導される辺の向きと, 内部を左手に見る  $G$  の向きから誘導される辺の向きが同調するとき, その辺の符号は正である, と約束し, そうでないとき辺の符号は負であると約束する。辺の符号は, 与えられた辺に関して絶対的なものではなく, その辺が属する多角形に依存することに注意する。

**定義 4** (許容的荷電列). 与えられた閉曲線  $\gamma$  の荷電列

$$X := P_1^{\varepsilon_1} \dots, P_N^{\varepsilon_N}$$

が許容的であるとは, 各  $P_j$  に対して  $P_j$  の属す辺  $E_j$  を構成要素とする許容的な多角形  $G_j$  が存在し,  $E_j$  の符号が  $\varepsilon_j$  の符号に一致するときをいう.

各許容的荷電列  $X$  に対して,  $P_1, \dots, P_N$  が  $\gamma$  の誘導する (サイクリックな) 向きに関して順番に並んでいるとして

$$\mu(X) := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \varepsilon_1) \text{ の符号変化の数.}$$

と定める. さらに, すべての許容的荷電列に対する  $\mu(X)$  の最小値として

$$\mu(\gamma) := \min_{X:\text{許容的}} \mu(X)$$

と定義する.

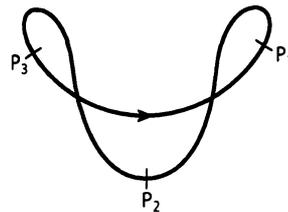


図 7. 1 角形 2 つと 2 角形からなる 3 交点曲線

**例 1.** 図 7 の 3 交点曲線上の 3 点  $P_1, P_2, P_3$  において, 荷電列  $X = P_1^+ P_2^- P_3^+$  は許容的である. 実際, 曲線上には, 互いに素な正の辺をもつ 1 角形と負の二辺をもつ 2 角形が存在するので  $\mu(\gamma) \geq 2$  がわかる. 一方  $\gamma$  は変曲点 2 個で実現できるので, 不等式  $I(\gamma) \geq \mu(\gamma)$  を認めれば

$$I(\gamma) = \mu(\gamma) = 2$$

がわかる.

実際, 以下の主張が成り立つ.

**定理 1.** ([9]) 与えられた閉曲線  $\gamma$  に対して, 常に

$$i_\gamma \geq I(\gamma) \geq \mu(\gamma)$$

が成り立つ.

(証明)  $i_\gamma \geq I(\gamma)$  は定義から明らかである. 後半の不等式  $I(\gamma) \geq \mu(\gamma)$  を示す.  $\gamma$  が単純閉曲線のときは, 定義から明らかなので  $\gamma$  は自己交叉をもつとしてよい. 閉曲線  $\gamma$  上の許容的な多角形  $G$  を一つ任意にとり, 内部を左手に見る向きを  $G$  につけたとき,  $G$  の曲率が正になる点  $P_G$  を1つ選ぶ.  $P_G$  の属する  $G$  の辺の符号を  $\varepsilon_{P_G}$  とすると

$$X := \{P_G^{\varepsilon_{P_G}}\}_{G \in \{\text{許容的な多角形}\}}$$

は許容的な荷電列となる. ここで点  $P_G$  での  $\gamma$  の曲率は  $\gamma$  の辺の正負に一致するので

$$\varepsilon_{P_G} = \text{点 } P_G \text{ における } \gamma \text{ の曲率の符号}$$

が成り立つ. 曲率の符号変化数が  $i_\gamma$  に等しいことに注意すると

$$i_\gamma \geq \mu(X) \geq \mu(\gamma)$$

となるが, 右辺は位相型のみ依存するので

$$I(\gamma) \geq \mu(\gamma)$$

が示された. □

不変量  $\mu(\gamma)$  は原理的に計算可能である. 具体的には以下の事実が示せる ([9, Lemma 2.7]).

**事実 5.** 交点数が  $n$  の閉曲線の各辺 (合計  $2n$  個) に相異なる点を2個ずつとり, これら  $4n$  個の点上に  $0, -1, 1$  の電荷をおく. この電荷配置のみから生成される許容的な荷電列  $X$  の符号変化数  $\mu(X)$  の最小値は  $\mu(\gamma)$  に一致する.

以下, いくつか重要な例を紹介する.

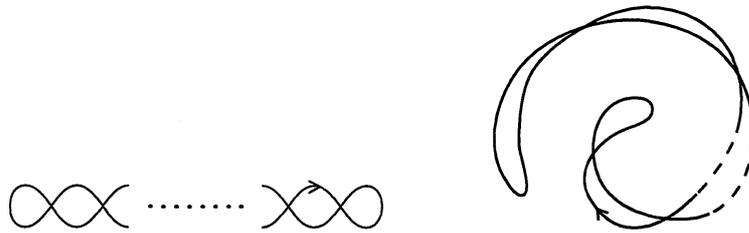


図 8. 鎖型曲線を  $i_\gamma = 2$  で描く方法.

**例 2.** 図8 (左) のような鎖状の閉曲線は, 図8 (右) のように, うずまき状に曲線を描くことにより, 変曲点2個で曲線を描くことができる.

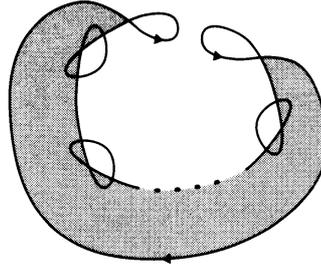


図 9. 変曲点 2 個で描ける曲線の例.

例 3. 図 9 のような形状の閉曲線は、変曲点 2 個で曲線を描くことができる。灰色の多角形は許容的であり、 $\mu(\gamma)$  の計算に有効である。この例は 3 角形以上の多角形が  $\mu(\gamma)$  の計算に真に有効であることを物語っている。

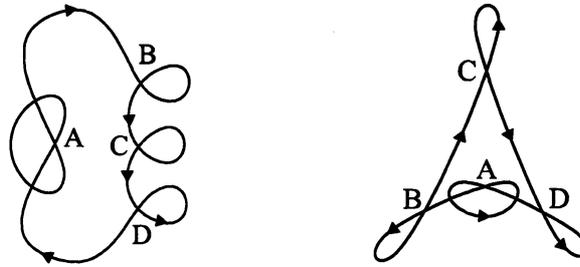


図 10. かろうじて変曲点なしで描ける曲線.

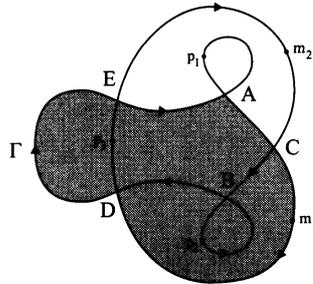


図 11. A curve satisfying  $i_\gamma = 4$  and  $\#\gamma = 5$ .

例 4. 図 10 (左) のような閉曲線は、計算すると  $\mu(\gamma) = 0$  であることがわかるが、これを変曲点なしで描き直すには図 10 (右) のように、とがった形に描かなければならない。このように、変曲点なしに閉曲線を描くには、時としてかなり工夫が必要になる。

例 5. 図 11 の閉曲線は、定義にしたがって計算すると  $\mu(\gamma) = 4$  であることがわかるが、それには多角形の向きと曲線の向きが同調しない辺

を考慮に入れないといけない例を与えている。この例は筆者等が  $\mu(\gamma)$  の定義を模索している段階で、大変重要な役割を果たした。図の記号や色づけの意味については論文 [9] に詳しい説明が書かれている。

### 3. 2重接線の個数と変曲点

今度は、与えられた閉曲線の2重接線の総和

$$d(\gamma) := d_1(\gamma) + d_2(\gamma)$$

の最小値

$$\delta(\gamma) := \min_{\sigma \in [\sigma]} d(\gamma)$$

を考える。

$$d(\gamma) = \delta(\gamma)$$

となる閉曲線を  $g$ -tight (正式には geotopically tight) であるという。単純閉曲線については  $g$ -tight であることは卵形線を意味する。

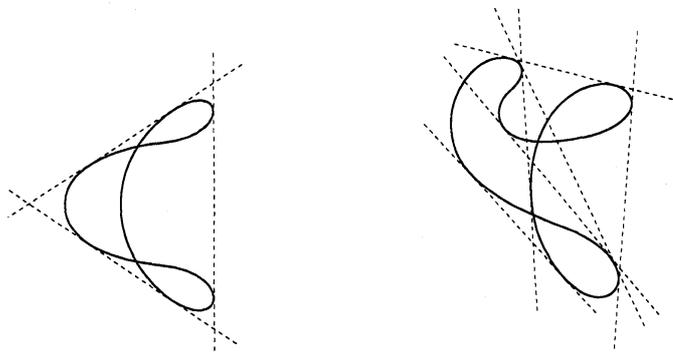


図 12. 2重接線数が違うが位相型と  $i_\gamma$  の等しい2曲線。

変曲点の個数を最小に描いても、 $g$ -tight かどうかは一般に不明である。図12の2つの同じ位相型をもつ2交点曲線は共に変曲点の数は2である。しかし右側の曲線は  $g$ -tight であり、左側はそうならない。

**命題 6.** Fabricius-Bjerre の公式から以下が成り立つ。

$$\delta_\gamma \geq \#\gamma + \frac{I(\gamma)}{2}$$

特に  $d_2(\gamma) = 0$  なる曲線は  $g$ -tight である。

(証明) 実際、以下の式変形から主張は明らか

$$d(\gamma) \geq d_1(\gamma) + d_2(\gamma) \geq d_1(\gamma) - d_2(\gamma) = \#\gamma + \frac{i\gamma}{2}.$$

□

この不等式から特に、図2の8つの曲線のうち  $1_2^b$  と  $2_2$  以外は  $g$ -tight であることがわかる。図13はこの2つの曲線を描いたものである。両者ともに、 $g$ -tight であると思われるが、証明は今のところできていない。

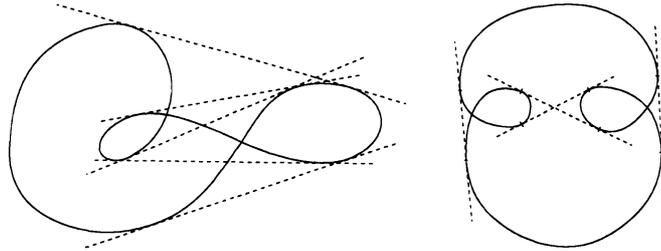


図 13.  $\delta(\gamma)$  が決まらない位相型.

筆者等はこのに関して、以下の予想を立てている。

(予想) 変曲点を持たない閉曲線は  $g$ -tight か？

これが正しいければ図13の右側のダルマ型曲線は  $g$ -tight となる、関連する結果として現段階では、以下のことを筆者等は示している。

**事実 7.** ([9]) 変曲点を持たない閉曲線については、2重接線の数は  $\gamma$  の位相型のみで定まる。

実際、2重接線の数を具体的に数え上げる公式が存在する。詳しくは論文[9]を参照されたい。上の事実から予想が従わない理由は、変曲点をもつように同じ位相型の閉曲線を描いたときに、変曲点がない場合よりも2重接線の数が下がる可能性が排除できないためである。最後に、これ以外に重要と思われる残された問題を記します。

問1.  $\mu(\gamma) = 0$  と  $I(\gamma) = 0$  は同値か？

問2.  $I(\gamma) > \mu(\gamma)$  を満たす例は存在するか？

問3.  $g$ -tight 性に関する有効な判定条件を与えよ。

4. 3 交点以上 5 交点以下の変曲点のない曲線の位相型

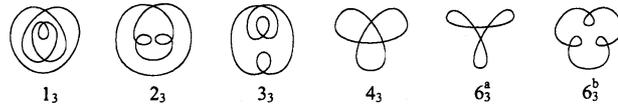


図 14. 変曲点のない 3 交点曲線 (全部で 6 個).

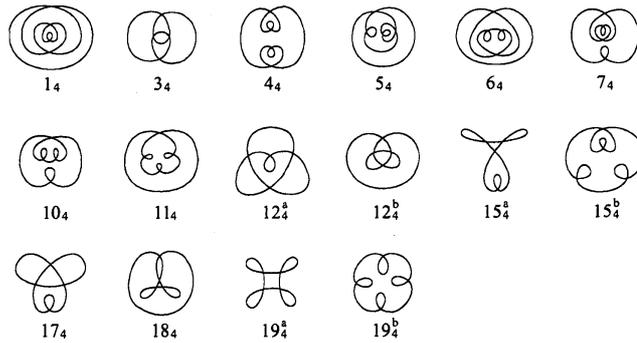


図 15. 変曲点のない 4 交点曲線 (全部で 16 個).

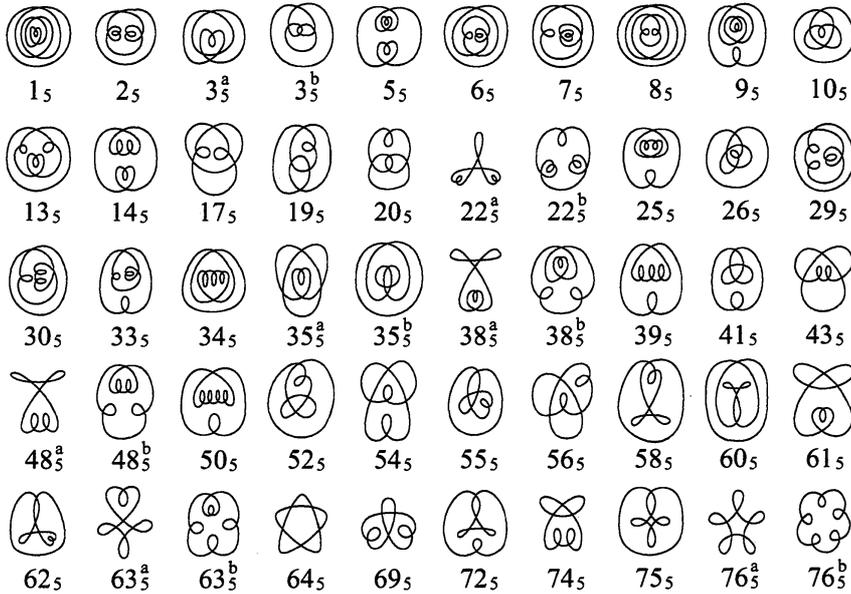


図 16. 変曲点のない 5 交点曲線 (全部で 50 個).

## REFERENCES

- [1] V. I. Arnold, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*, University Lecture Series 5, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994.
- [2] G. Cairns and D. M. Elton, *The planarity problem for signed Gauss words*, *J. Knot Theory Ramifications* 2 (1993), 359–367.
- [3] Fr. Fabricius-Bjerre, *On the double tangents of plane closed curves*, *Math. Scand.* 11 (1962), 113–116.
- [4] J. S. Carter, *Classifying immersed curves*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 111 (1991), 281–287.
- [5] B. Halpern, *An inequality for double tangents*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 76 (1979), 133–139.
- [6] O. Kobayashi and M. Umehara, *Geometry of Scrolls*, *Osaka J. Math.* 33 (1996), 441–473.
- [7] T. Ozawa, *On Halpern's conjecture for closed plane curves*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 92 (1984), 554–560.
- [8] 小沢哲也著, 平面図形の位相幾何, 数学レクチャーノート 9, 培風館 (1997) .
- [9] S. Ohno, T. Ozawa and M. Umehara, *Closed planar curves without inflections*, to appear in *Proc. of Amer. Math. Soc.* (arXiv:1103.3343).