数理解析研究所講究録
第 1775 巻 2012 年 45-51

ケーラー・アインシュタイン計量の存在への障害的因子について
(Obstructive divisors to the existence of Kähler-Einstein metrics)

佐野　友二　(熊本大学大学院自然科学研究科)[*1]
Yuji SANO　(Kumamoto University)

本稿の目的は，トーリック・ファノ多様体においてケーラー・リッチフローから得られる乗数イデアル層の性質について紹介することである.

1. Introduction

X を n 次元ファノ多様体，つまりコンパクト・ケーラー多様体で第一チャーン類 $c_1(X)$ が正と仮定する．$c_1(X)$ をケーラー類としたとき，ケーラー形式 ω がケーラー・アインシュタイン計量（以下，KE 計量）であるとは $\mathrm{Ric}(\omega)=\omega$ が成り立つときをいう．ただし，$\mathrm{Ric}(\omega)$ を ω のリッチ形式とする．$c_1(X)$ が負または零の場合と異なり，正の場合には必ずしも KE 計量が存在するとは限らない（松島の障害 [7]，二木不変量の消滅 [3]）．よって，KE 計量がいかなる条件のもとで存在するかという問題は解決すべき問題の一つである.

KE 計量を求める方法には 2 つある．モンジェ・アンペール方程式に対して連続法を用いる方法と次の（正規化された）ケーラー・リッチフロー（以下，KR フロー）を用いる方法である.

$$\frac{d}{dt}\omega_t = -\mathrm{Ric}(\omega_t)+\omega_t, \quad \omega_0=\omega, \quad t\in\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

$\omega_t=\omega+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi_t$ と表すと (1) は φ_t に関する方程式に帰着される.

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = \log\left(\frac{\det(g_{i\bar{j}}+\varphi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})}\right)+\varphi_t-h_{\omega_0}, \quad \varphi_0=\text{constant}. \tag{1}$$

ただし h_{ω_0} は

$$\mathrm{Ric}(\omega_0)-\omega_0=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}h_{\omega_0}, \quad \int_X e^{h_{\omega_0}}\omega_0^n=\int_X \omega_0^n \tag{2}$$

を満たす関数とする．(1) は大域解を持つ．もし $t\to\infty$ で φ_t が C^∞ の意味で収束するならば極限は KE 計量（のポテンシャル関数）となる．しかし，上で述べた通り一般には収束するとは限らない．そこで (1) の解 φ_t が $t\to\infty$ で発散すると仮定する．このとき適当な部分列 $\{t_i\}$ をとることで $\varphi_{t_i}-\sup\varphi_{t_i}$ は特異性を

本研究は科研費 (若手 B, 課題番号:22740041) の助成を受けたものである.
[*1] e-mail: sano@sci.kumamoto-u.ac.jp

持った概多重劣調和関数 φ_∞ に収束する．その特異性を調べるために，$\gamma \in (0,1)$ と φ_∞ に対して乗数イデアル層を $\mathcal{I}(\gamma\varphi_\infty)$ を考える．$\mathcal{I}(\gamma\varphi_\infty)$ は

$$\Gamma(U, \mathcal{I}(\gamma\varphi_\infty)) = \{f \in \mathcal{O}_U \mid \int_U |f|^2 e^{-\gamma\varphi_\infty} < +\infty\} \tag{3}$$

を前層に持つ連接イデアル層である．$\mathcal{I}(\gamma\varphi_\infty)$ が切り取る X の部分概形を $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ とする．$\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ について，次のことが知られている[1]．

事実 1 ([9]) X を n 次元ファノ多様体とする．G を正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ のコンパクト部分群とする．G-不変なケーラー形式として $\omega_0 \in c_1(X)$ を固定する．X が KE 計量を持たないとすると，任意の $\gamma \in (n/(n+1), 1)$ に対して $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ は $G^{\mathbb{C}}$-不変かつ固有（i.e., $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty) \neq 0, \mathcal{O}_X$）である．ただし，$G^{\mathbb{C}}$ は G の複素化とする．

上の事実は $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ の存在が KE 計量の存在への障害になっていることを意味している．一方で，事実 1 を代数幾何的に言い換えた結果が次である．

事実 2 ([4]) 事実 1 と同じ仮定とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きい $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ と G-不変な線形系 $\Sigma \subset |-mK_X|$ が存在して次を満たす；ある有効因子 $D \in \Sigma$ が存在して，対 $(X, \frac{n+\varepsilon}{(n+1)m}D)$ は KLT（川又ログ端末的）ではない．

(X, D) は正規代数多様体 X とその上の有効 $\mathbb{Q}$-因子 D の対と呼ばれ，KLT という条件は対 (X, D) の特異性が mild であることを意味している．特に X が滑らかな場合には因子 D の特異性の mildness を表す．事実 2 は特異性が高い因子 D の存在が KE 計量の存在への障害になっていることを意味している．次の結果は事実 2 と事実 1 を結びつける；$D = \sum a_i D_i$，$D_i = \{g_i = 0\}$（ただし g_i は局所的に定義された正則関数）とすると，(X, D) が KLT であることは多重劣調和関数 $\varphi_D = \sum a_i \log |g_i|$ の乗数イデアル層 $\mathcal{I}(\varphi_D)$ が $\mathcal{O}_X$ と等しいことと同値である．事実 2 は事実 1 の φ_∞ を φ_D で近似することで得られる．本稿では事実 1, 2 を比較して，次の問題を考える．

問題 1 **(A)** 事実 1 の $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ は因子だろうか？

(B) もし (A) の答えが肯定的ならば，$\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ と事実 2 の因子 D との共通点・相違点を調べよ．

(C) $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ または D は X の安定性への障害になりうるか？

本稿では上記の問題をトーリック・ファノ多様体の場合で考え，部分解を与える．

2. 動機

主結果を述べる前に問題 1 の動機について説明する．現在ではKE 計量（より一般に偏極多様体上の定スカラー曲率計量）の存在性は幾何学的不変式論の意味での多様体の安定性と同値であると予想されている．問題1 もこの予想を動機とし

[1] 同様の結果は連続法の場合に Demailly-Kollár [1] により知られていた．

ている．多様体の安定性にはいくつかの候補があるが，計量との対応が最も期待されるものとして Tian [12]，Donaldson [2] により導入された K-安定性がある．

予想 3 偏極多様体 (X, L) が定スカラー曲率計量 $\omega_{\mathrm{csc}} \in c_1(L)$ を持つことと (X, L) が K-poly 安定であることは同値である．

一方で K-安定性をより判定しやすくするために Ross-Thomas [8] はベクトル束の安定性の類似として多様体の部分概形に対してスロープを導入しスロープ安定性を定義した．ベクトル束の小林–Hitchin 対応の類似を KE 計量の場合にも期待するならば，乗数イデアル層の部分概形 $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ がスロープ安定性（よって K-安定性）を崩すことが期待される．このことを確かめるためには $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ の幾何学的性質を調べる必要があり，問題 1 はその一環である．

3. 主結果

X を n 次元トーリック・ファノ多様体とする．$(\mathbb{C}^\times)^n$ に関する $\mathrm{Aut}(X)$ のワイル群 を $W(X)$ とする[2]．G を $(S^1)^n$ と $W(X)$ から生成される $\mathrm{Aut}(X)$ のコンパクト部分群とする．

定理 4 ([11]) X が KE 計量を持たないとする．このとき任意の $\gamma \in (1/2, 1)$ に対して $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ のサポート（以下，$\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty))$）に集合論的な意味で含まれる $(S^1)^n$-不変な因子が存在する．

これはトーリック・ファノ多様体の場合において問題 1 の (A) へ肯定的な部分解を与えている．以下，証明の流れを説明する．

Step 1. ケーラー・リッチソリトン（以下，KR ソリトン）が存在するときには KR フローの漸近的挙動は捉えやすくなる．ケーラー形式 ω_{RS} が KR ソリトンとは，ある正則ベクトル場 v_{RS} に対して

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\mathrm{RS}}) - \omega_{\mathrm{RS}} = \mathcal{L}_{v_{\mathrm{RS}}}\omega_{\mathrm{RS}} \tag{4}$$

が成り立つことである．ただし (4) の右辺は v_{RS} に沿った ω_{RS} のリー微分とする．KR ソリトン ω_{RS} が存在するとき，ω_{RS} の引き戻し $\exp(-tv_{\mathrm{RS}})^*\omega_{\mathrm{RS}}$ は KR フローの方程式を満たす．X がトーリック・ファノ多様体の場合には [13] により常に KR ソリトンが存在することが知られている．さらに [14] により，KR ソリトンが存在しているときの KR フローの漸近的挙動は $\exp(-tv_{\mathrm{RS}})^*\omega_0$ とほぼ同じになることが分かる（cf. [10][3]）．これより φ_∞ の代わりに $\psi_\infty := \lim_{t\to\infty}\psi_t$ の乗数イデアル層 $\mathcal{V}(\gamma\psi_\infty)$ を求めれば良いことになる．ここで ψ_t は次で定義される関数である；

$$\exp(-tv_{\mathrm{RS}})^*\omega_0 = \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\psi_t, \quad \sup\psi_t = 0.$$

[2] $W(X)$ はモーメント多面体を保つような $\mathrm{GL}(n.\mathbb{Z})$ の有限群と等しい

[3] [10] では X のモーメン多面体の対称性に関する技術的な仮定がなされているが本質的ではない．一般のトーリック・ファノ多様体の場合でも成り立つ．

Step 2. $\mathcal{V}(\gamma\psi_\infty)$ を求めるために，概多重劣調和関数の複素特異指数（complex singularity exponent）を用いる．概多重劣調和関数 ψ とコンパクト部分集合 $Y \subset X$ に対して，ψ の Y に沿った複素特異指数 $c_Y(\psi)$ は

$$c_Y(\psi) = \sup\{c \in \mathbb{R}_{>0} \mid e^{-c\psi} \in L^1 \quad \text{around } Y\}$$

で定義される．定義より $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\psi)) = \{p \in X \mid c_p(\psi) < \gamma\}$ である．トーリックの場合，ψ が $(S^1)^n$-不変ならば D の内点 p に対して $c_{\{p\}}(\psi)$ が一定であることに注意する．よって D の内点 p に対する $c_{\{p\}}(\psi)$ を $c_D(\psi)$ と書くことにする．$c_D(\psi_\infty)$ は多面体の情報から具体的に計算できる．ここでは結果のみ述べる．K を $\mathrm{Aut}(X)$ の極大コンパクト部分群とする．K の複素化のリー環を $\mathfrak{k}$ とする．ω_{RS} を K-不変になるようにとれば，$v_{\mathrm{RS}} \in \mathfrak{k}$ となる．よって v_{RS} は $N_{\mathbb{R}} = J\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ のベクトルを定める．それを β とおく．ただし $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ を $T_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^\times)^n \subset \mathrm{Aut}(X)$ の実トーラスとし，J を $T_{\mathbb{C}}$ の複素構造とする．β に対して，(境界を含めた) X のモーメント多面体 P に含まれる整数点全体の部分集合 A を次のように定義する；P の整数点 $\mathbf{p}$ が A に含まれるとは次の条件を満たすときを言う；

$$\langle \mathbf{p}, -\beta \rangle = \max_{\mathbf{p}_i} \langle \mathbf{p}_i, -\beta \rangle. \tag{5}$$

ただし (5) の右辺において $\mathbf{p}_i$ は P に含まれる整数点全体を走るものとする．さらに $(S^1)^n$-不変な因子 D は X のモーメント多面体 P の双対多面体 Q（ファノ多面体）の頂点に対応しているので，それを $\mathbf{q}_D \in N_{\mathbb{R}}$ とする．

補題 5 ([10]) $(S^1)^n$-不変な因子 D に対して，次のいずれかが成り立つ．

(i) $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}_D \rangle \geq 0$ を満たす $\mathbf{p} \in A$ が存在するならば $c_D(\psi_\infty) \geq 1$ である．特に D は任意の $\gamma \in (0,1)$ に対して $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\psi_\infty))$ に含まれない．

(ii) すべての $\mathbf{p} \in A$ に対して $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}_D \rangle < 0$ とする．A の元で $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}_D \rangle$ の最大値を与えるものを $\mathbf{p}_0$ とする．このとき

$$c_D(\psi_\infty) = \frac{1}{1 - \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_D \rangle} \leq \frac{1}{2} \tag{6}$$

が成り立つ．特に D は任意の $\gamma \in (1/2, 1)$ に対して $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\psi_\infty))$ に含まれる．

Step 3. ある $\gamma \in (1/2, 1)$ に対して $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\psi_\infty))$ が $(S^1)^n$-不変な因子を含まないとする．補題 5 より，ファノ多面体 Q の任意の頂点 $\mathbf{q}$ に対して，ある $\mathbf{p} \in A$ が存在し，$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \geq 0$ を満たす．ここでモーメント多面体 P の重心を $b(P)$ とおく．このとき次のことが成り立つ．

補題 6 ([11]) 各記号は上で説明したものと同じとする．Q の任意の頂点 $\mathbf{q}$ に対して，ある $\mathbf{p} \in A$ が存在し，$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \geq 0$ を満たすと仮定する．このとき $\langle b(P), \beta \rangle \geq 0$ が成り立つ．

モーメント多面体の重心 $b(P)$ は二木不変量 $F : \mathfrak{h}(X) \to \mathbb{C}$ ([3])

$$F(v) := \int_X v h_\omega \omega^n$$

に対応していることが知られている([6]). ただし, $\mathfrak{h}(X)$ は X の正則ベクトル場全体がなすリー環, h_ω は (2) で定義される関数とする. 特に $\langle b(P), \beta \rangle \geq 0$ は $F(v_{\mathrm{RS}}) \geq 0$ を意味している. しかし, KR ソリトンの定義 (4) より, $v_{\mathrm{RS}} \neq 0$ (i.e., KR ソリトンが非自明なとき) ならば $F(v_{\mathrm{RS}}) < 0$ である. よって, 背理法により補題 6 の仮定は成り立たない. 以上のことより, 任意の $\gamma \in (1/2, 1)$ に対して $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\psi_\infty))$ (つまり $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty))$) に含まれる $(S^1)^n$-不変な因子の存在が示された.

4. 障害的因子

定理 4 より, 任意の $\gamma \in (1/2, 1)$ に対して $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty))$ は $(S^1)^n$-不変な因子を含むことがわかった. しかし, $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ そのものを計算することはまだ出来ていない. そこで, 任意の $\gamma \in (1/2, 1)$ に対して $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty))$ に含まれる因子を用いて KE 計量の存在性への障害となる因子 D_∞ を以下のように定義することにする. $\{D_i\}_i$ をすべての $\gamma \in (1/2, 1)$ に関する $\mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty))$ に含まれる $(S^1)^n$-不変な因子全体の集合とする. つまり

$$\{D_i : (S^1)^n\text{-inv divisor} \mid D_i \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)) \text{ for any } \gamma \in (1/2, 1)\}$$

とする. 各 D_i に関して, 複素特異指数 $c_{D_i}(\psi_\infty)$ を d_i^{-1} とおく. (6) より

$$d_i^{-1} = \frac{1}{1 - \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{D_i} \rangle}$$

である. ただし $\mathbf{p}_i$ は $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{D_i} \rangle$ が最大になる A の元である. (6) の仮定より $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{D_i} \rangle$ は負の整数なので $d_i \geq 2$ かつ $d_i \in \mathbb{Z}$ となる. そこで,

$$D_\infty = \sum_i d_i D_i \tag{7}$$

と定義する. この因子は φ_∞ から得られる KE 計量の存在性への障害的因子とみなすことが出来る. $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ は γ に依存しているのに対して D_∞ は φ_∞ から一意的に定まる. 誤解を恐れずに述べると, D_∞ は γ が 1 に十分近い $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ の余次元 1 の部分を抽出したものと言える. D_∞ は KE 計量への障害として $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ よりも情報量は少なくなっているが, 因子であるという点で $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ よりも扱いやすい.

以下 $\mathcal{V}(\gamma\varphi_\infty)$ の代わりに D_∞ の性質を調べていく. まず D_∞ と事実 2 の因子 $\frac{1}{m}D$ を比較する(問題 1 (B)). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(X, \frac{n+\varepsilon}{(n+1)m}D)$ も $(X, \frac{n+\varepsilon}{(n+1)}D_\infty)$ も KLT ではないという点では同じである. しかし, 前者では $\frac{1}{m}D$ が常に $-K_X$ と数値的同値であるのに対して D_∞ は一般に同値であるとは限らない.

例 7 X を $\mathbb{CP}^2$ の 1 点ブローアップとする．D_∞ は $2E$ である（cf. [10]）．一方，事実 2 の $\frac{1}{m}D$ の一つとして $2E+\frac{3}{2}(F_1+F_2)$ がとれる[4]．ただし E をブローアップの例外因子とし，F_1, F_2 を E と交わる自己交点数 0 の曲線とする．

5. 安定性との関係

最後に安定性との関係について触れる（問題 1（C））．まず Ross-Thomas のスロープ安定性の観点から考える．一般に Ross-Thomas のスロープは，対応する部分概形が因子 D の場合，D，標準因子 K_X と偏極を与える直線束が定める因子 D_L に関する交点数を用いて表される．よって数値的同値な二つの因子に関するスロープは等しい．X がファノ多様体で偏極が反標準束で与えられている場合，$-K_X$ と数値的同値の因子は X を脱スロープ安定化しないことが知られている．これは事実 2 に現れる因子 $\frac{1}{m}D$ はスロープ安定性への障害にはならないことを意味している．実際に例 7 において $2E+\frac{3}{2}(F_1+F_2)$ は脱スロープ安定化しないが $2E$ は脱スロープ安定化する．よってスロープ安定性に対しては D_∞ の方が障害になりうると期待できる．しかし，次の事実はその期待が成り立たないことを示している．

事実 8 (X, K_X^{-1}) を反標準束で偏極された $\mathbb{CP}^2$ の 2 点ブローアップで得られる曲面とする．

(i) (X, K_X^{-1}) はスロープ安定である．つまり，X の任意の部分概形は (X, K_X^{-1}) を脱スロープ安定化しない（[5]）．

(ii) X は KE 計量を持たない（[7, 3]）．

(iii) (X, K_X^{-1}) は K-不安定である．

上の (i) より 一般には D_∞ もスロープ安定性の障害にはなり得ない．しかし (ii) より，問題は D_∞ よりもスロープ安定性の定義にあると言える．つまりスロープ安定性は KE 計量の障害にはなっていない．上の (iii) や予想 3 との関連も含めると，考えるべき安定性はスロープ安定性ではなく K-安定性であると言える．この場合の新たな問題は K-安定性はスロープ安定性のように部分概形と直接結びついていない点である．この点について簡単に説明する．K-安定性は，テスト配位と呼ばれる偏極多様体 (X, L) の変形 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ と，その極限である退化した偏極概形 $(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0)$ の上での Donaldson-二木不変量の符号により定義される（cf. 正確な定義については原論文 [2] 参照）．部分概形 $Y \subset X$ に関する (X, L) のスロープ安定性は，テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ として $X \times \mathbb{C}$ の $Y \times \{0\}$ に沿ったブローアップという非常に特殊なテスト配位に関する K-安定性と同値である．事実 8 は $X \times \mathbb{C}$ のブローアップから得られる特別なテスト配位だけでは任意のテスト配位に関する K-安定性を確かめるには不十分であることを示唆している．よって，D_∞ が K-安定性への障害になりうるかどうかを調べるためには，より精密

[4] このとき $m=2$ である．また $\frac{1}{m}D$ の取り方は一意ではない．

なテスト配位の構成が必要となる．この点についてはトーリック・ファノ多様体の場合でもまだ分かっていない．部分的な結果として Ross-Thomas の手法の拡張[5]を考えることで，具体的に計算できる例（例えば $\mathbb{CP}^2$ の 2 点ブローアップなど）では D_∞ から K-安定性を崩す脱 K-安定化テスト配位を構成することができる．

参考文献

[1] J.P. Demailly and J. Kollár, Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34, no.4 (2001)525–556.

[2] S.K. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. 62, no.2 (2002)289–349.

[3] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. 73, no. 3 (1983)437–443.

[4] J. Kollár, Einstein metrics on connected sums of $S^2 \times S^3$, J. Differential Geom. 75, no.2 (2007) 259–272.

[5] D. Panov and J. Ross, Slope stability and exceptional divisors of high genus, Math. Ann. 343, no.1 (2009)79–101.

[6] T. Mabuchi, Einstein-Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties, Osaka J. Math. 24, no.4 (1987)705–737.

[7] Y. Matsushima, Sur la structure du group d'homémomorphismes analytiques d'une certaine variété kählériennes, Nagoya Math. J. 11 (1957)145–150.

[8] J. Ross and R.P. Thomas, An obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics, J. Differential Geom. 72, no.3 (2006) 429–466.

[9] Y.A. Rubinstein, On the construction of Nadel multiplier ideal sheaves and the limiting behavior of the Ricci flow, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 11, 5839–5850.

[10] Y. Sano, Multiplier ideal sheaves and the Kähler-Ricci flow on toric Fano manifolds with large symmetry, arXiv:0811.1455 (2008).

[11] Y. Sano, Obstructive divisors to Kähler-Einstein metrics, preprint.

[12] G. Tian, Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math. 130 (1997), no. 1, 1–37.

[13] X.J. Wang and X. Zhu, Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, Adv. Math. 188, no.1 (2004)87–103.

[14] X. Zhu, Kähler-Ricci flow on a toric manifold with positive first Chern class, arXiv:math.DG/0703486 (2007).

[5] Ross-Thomas の手法は尾高悠志氏により K-安定性の場合に拡張され，現在も発展している．