数理解析研究所講究録
第 1775 巻 2012 年 94-107

コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対の Floer ホモロジー

東京電機大学・未来科学部　入江　博 (Hiroshi Iriyeh)
School of Science and Technology for Future Life,
Tokyo Denki University
首都大学東京大学院・理工学研究科　酒井高司 (Takashi Sakai)
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University
筑波大学大学院・数理物質科学研究科　田崎博之 (Hiroyuki Tasaki)
Graduate School of Pure and Applied Science,
Tsukuba University

概要

既約コンパクト型 Hermite 対称空間の一つの実形 L の Floer ホモロジーについては Y.-G.Oh 氏の結果 [14] があり、その帰結として、L とそれを Hamilton 変形したものとの交点数の評価に関する Arnold-Givental 不等式が知られている。本稿では、この Oh 氏による結果を一般化し、単調なコンパクト型 Hermite 対称空間 M の互いに合同とは限らない 2 つの実形 L_0, L_1 に対する $\mathbb{Z}_2$ 係数の Floer ホモロジー群 $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ に関して得られた結果 [9] を紹介する。また、その Hamilton 体積最小性問題への応用についても述べる。

1　主結果と関連事項

(M,ω) を閉シンプレクティック多様体とする。ω は M 上の非退化な閉 2 次微分形式である。M の部分多様体 L は、$\omega|_L = 0$ かつ $\dim L = \frac{1}{2}\dim M$ をみたすとき、**Lagrange 部分多様体**という。以下、埋め込まれた閉 Lagrange 部分多様体のみを考える。シンプレクティック多様体の例としては、古典力学の記述で用いられる滑らかな多様体の余接束、本稿で大切な Kähler 多様体 (M,J,ω) などが基本的である。また、Lagrange 部分多様体の例には、余接束の零切断、Kähler 多様体の対合的反正則等長変換の固定点集合などがある。

ω の非退化性より、$X \in TM \mapsto \iota_X\omega \in T^*M$ は接束と余接束の同型を与え、M 上のベクトル場と 1 次微分形式とは 1 対 1 に対応する。また、$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega)$ となるので、$\mathcal{L}_X\omega = 0$ をみたすベクトル場と閉 1 次微分形式が対応する。

関数 $H_t(p) := H(t,p) \in C^\infty([0,1]\times M)$ に対して、$\iota_{X_{H_t}}\omega = dH_t$ により、時間依存する **Hamilton ベクトル場** $\{X_{H_t}\}_{0\le t\le 1}$ が定まる。その flow$\{\phi_t^H\}_{0\le t\le 1}$ を Hamilton イソトピーという。M の微分同相写像 ϕ は、ある H により $\phi = \phi_1^H$ となるとき **Hamilton 微分同相写像**という。(M,ω) の Hamilton 微分同相写像の全体を $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ と表す。これは、シン

プレクティック微分同相写像の単位連結成分 $\mathrm{Symp}_0(M,\omega) := \{\phi \in \mathrm{Diff}_0(M) \mid \phi^*\omega = \omega\}$ の部分群である。

予想 1 (Arnold-Givental). (M,ω) をシンプレクティック多様体、L を M の反シンプレクティックな対合による固定点集合とする。L は空でなくコンパクトであると仮定する[1]。このとき、L と ϕL が横断的に交わるような M の任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ について、不等式

$$\#(L \cap \phi L) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。$SB(L,\mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の和を表す。 □

この予想は、Hofer, Givental, Y.-G.Oh 等の貢献の後に、深谷-Oh-太田-小野 [6] により完全な解決に肉薄する結果が得られている。ここでは、後の話に必要な Oh による結果を紹介する。

定理 2 (Oh [14]). (M, J_0, ω) を既約な[2]コンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の対合的反正則等長変換 σ の固定点集合 $L = \mathrm{Fix}(\sigma)$ について Arnold-Givental 予想は正しい。

Arnold-Givental 予想は、Lagrange 部分多様体 L とその Hamilton 同位による像 ϕL との交点数の評価に関するものだが、これを拡張して Lagrange 部分多様体 L_0 とそれと Hamilton 同位とは限らない Lagrange 部分多様体 L_1 に関して交叉 $L_0 \cap \phi L_1$ を考察することは自然な問題である。定理 2 を導く際に用いる Floer ホモロジーの理論はこの場合も扱えるように構成されている。ところが、L_0 と L_1 が Hamilton 同位でない場合の具体的な計算例はまだ少なく、その研究は始まったばかりと言える。

M がトーリック多様体の場合には、次の結果がある。

定理 3 (Alston [1]). 複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, J_0, \omega_{FS})$ の 2 つの Lagrange 部分多様体である実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と Clifford トーラス T^n を考える。$n = 2k-1$ とする。このとき、$\mathbb{R}P^n$ と ϕT^n が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ について、

$$\#(\mathbb{R}P^n \cap \phi T^n) \geq 2^k$$

が成り立つ。ここで、$T^n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid |z_0| = \cdots = |z_n|\}$ である。

最近、Alston-Amorim [2] により [1] の結果が拡張され、$n = 2k$ の場合の交点数の評価やトーリック Fano 多様体への一般化が得られている。一方、我々はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対に着目する。

(M, J_0, ω) をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の部分多様体 L は、ある対合的反正則等長変換 $\sigma : M \to M$ が存在して

$$L = \{x \in M \mid \sigma(x) = x\}$$

が成り立つとき、M の**実形**と呼ばれる。実形 L は M の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。M の正則等長変換の単位連結成分を $I_0(M)$ と表す。ここでは M の 2 つの部分集合

[1] L は、空集合でなければ Lagrange 部分多様体になる。
[2] [6] により、既約性の仮定は不要になった。

A と B が**合同である**とは、ある $g \in I_0(M)$ が存在して、$B = gA$ をみたすこととする。このとき、$I_0(M) \subset \mathrm{Ham}(M, \omega)$ である。M の実形 $L = \mathrm{Fix}(\sigma)$ の正則等長変換 g による像 $gL = \mathrm{Fix}(g\sigma g^{-1})$ も M の実形である。

コンパクト Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は、任意の 2 点 $x, y \in S$ に対して $s_x y = y$ が成り立つとき、**対蹠集合**という。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい、$\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-長野 [4] が導入した。例えば、球面 S^2 上の対蹠する 2 点 (北極と南極) は S^2 の大対蹠集合であり、$\#_2 S^2 = 2$ となる。竹内 [16] は、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形を分類し、それらは対称 R 空間であることを証明した。同じく竹内 [17] は、L が対称 R 空間ならば

$$\#_2 L = SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つことを証明した。したがって、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形 L については、$\#_2 L = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つ。

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の 2 つの実形 L_0, L_1 を考える。田中-田崎 [18, Theorem 1.1] により、L_0, L_1 が横断的に交わるならば $L_0 \cap L_1$ は M の対蹠集合になる。この事実から、対 (L_0, L_1) の Floer ホモロジーを具体的に計算することができる。

定理 4 (Main Theorem). (M, J_0, ω) を**単調な**[3]コンパクト型 Hermite 対称空間とする。L_0, L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形で、最小 Maslov 数はともに 3 以上と仮定する。このとき、

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p]$$

が成り立つ。つまり、交叉 $L_0 \cap L_1$ そのものが Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の生成元となる。

とくに、M が既約の場合には最小 Maslov 数についての仮定は自動的にみたされ (3 節参照)、また、田中-田崎 [18, Section 5] の結果を用いてより詳しい情報がわかる。

定理 5. M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0, L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形とする。このとき、

(1) $M = G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m}) (m \geq 2)$ であり、L_0 は $G^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_1 は $U(2m)$ と合同ならば、

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}.$$

ここで、$2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_0 < 2^{2m} = \#_2 L_1$ である。

(2) それ以外の場合には

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{\#_2 L_0, \#_2 L_1\}}$$

が成り立つ。

[3]後述の命題 9 により、この単調性の条件を Kähler-Einstein に置き換えてもよい。

前述の竹内の結果と $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の Hamilton 同位に関する不変性より、次がわかる。

系 6 (一般化された Arnold-Givental 不等式). 定理 5 の仮定の下で、L_0 と ϕL_1 が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について、

(1) $M = G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m})(m \geq 2)$ であり、L_0 は $G^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_1 は $U(2m)$ と合同ならば、

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq 2^m.$$

(2) それ以外の場合には

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \min\{SB(L_0, \mathbb{Z}_2), SB(L_1, \mathbb{Z}_2)\} \tag{1.1}$$

が成り立つ。

(1.1) は既約コンパクト型 Hermite 対称空間の Arnold-Givental 不等式 (定理 2) の一般化である。また、定理 4, 5 は [12, §6] の一つの問題のほぼ完全な解答になっている。

注意 7. 下の表は、既約の場合 (定理 5) の L_0 と L_1 が合同でないときの適用範囲を表す。

M	L_0	L_1	$\#(L_0 \cap \phi L_1)$
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$	$\geq 2k+2$
$G^{\mathbb{C}}_{2q}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G^{\mathbb{H}}_q(\mathbb{H}^{m+q})$	$G^{\mathbb{R}}_{2q}(\mathbb{R}^{2m+2q})$	$\geq \binom{m+q}{q}$
$G^{\mathbb{C}}_n(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G^{\mathbb{R}}_n(\mathbb{R}^{2n})$	$\geq 2^n$
$G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$	$G^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$	$\geq 2^m$
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$	$\geq 2^m$
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$	$\geq 2^m$
$E_6/T \cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G^{\mathbb{H}}_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$	≥ 3
$E_7/T \cdot E_6$	$T \cdot (E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$	≥ 8

ここで、$Q_n(\mathbb{C}) = SO(n+2)/(SO(2) \times SO(n))$ は複素 n 次元の複素 2 次超曲面を表し、$S^{k,n-k} = (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ である。また、$k \leq l$ としている。

2 単調 Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジー

この節では、Y.-G.Oh による単調な Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジーの構成 [12] を説明する。(M, ω) を閉シンプレクティック多様体、L_0 および L_1 を Hamilton 同位とは限らない (したがって合同とは限らない) M の Lagrange 部分多様体とし、これらは横断的に交わると仮定する。このとき、交叉 $L_0 \cap L_1$ の各要素を生成元とする自由 $\mathbb{Z}_2$-加群を $CF(L_0, L_1)$ と表す。これは、以下で示すようにチェイン複体の構造をもち、**Floer チェイン複体**と呼ばれる。

シンプレクティック多様体 M 上の概複素構造 J がシンプレクティック構造 ω と**整合的** (compatible) であるとは、$\omega(JV, JW) = \omega(V, W)$ かつ $\omega(V, JV) > 0$ が任意の 0 でないベクトル $V, W \in T_pM$ $(\forall p \in M)$ に対して成り立つことをいう。このとき、$g(V, W) = \omega(V, JW)$

は M 上の Hermite 計量を定める。M 上のシンプレクティック構造 ω と整合的な概複素構造の 1 パラメータ族 $J=\{J_t\}_{0\le t\le 1}$ をとる。**J-holomorphic strip** とは、写像

$$u:\mathbb{R}\times[0,1]\to M$$

で、条件

$$\begin{cases} \bar\partial_J u := \dfrac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(\cdot,0)\in L_0,\ u(\cdot,1)\in L_1, \\ u(-\infty,\cdot)\in L_0\cap L_1,\ u(+\infty,\cdot)\in L_0\cap L_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

をみたすものである。ここで、$\mathbb{R}\times[0,1]$ は $s+\sqrt{-1}t$ を座標系とする $\mathbb{C}$ の部分集合とみなしている。方程式 $\bar\partial_J u=0$ の解で (2.2) の 2 番目の境界条件をみたしているものについて、3 番目の漸近条件をみたすことと u の**エネルギー**

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times[0,1]}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)$$

が有限であることは同値である。

交点 $p\in L_0\cap L_1$ と $q\in L_0\cap L_1$ をつなぐ J-holomorphic strip 全体の空間を $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q)$ と表す。さらに、

$$\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1):=\bigcup_{p,q\in L_0\cap L_1}\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q)$$

とおく。概複素構造の 1 パラメータ族 J は、それが定める非線形 Cauchy-Riemann 作用素 $\bar\partial_J$ の線形化 $D_u\bar\partial_J$ がすべての $u\in\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1)$ について全射であるとき、**regular** であるという。regular な J について、各 $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q)$ は有限次元の滑らかな多様体になる。連結成分が違うと次元が異なる場合もある。regular な概複素構造全体の集合を $\mathcal{J}^{reg}$ と表す。集合 $\mathcal{J}^{reg}$ は、概複素構造の 1 パラメータ族の全体の集合 $\mathcal{J}$ の中の第 2 類集合である。今後、特に断らない限り $J\in\mathcal{J}^{reg}$ を仮定する。J-holomorphic strip $u\in\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q)$ については

$$\dim(T_u\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q))=\mathrm{Index}(D_u\bar\partial_J)$$

が成り立つ。ここで、右辺は線形化作用素 $D_u\bar\partial_J$ の Fredholm 指数を表す。この数はさらに u の Maslov 指数 $\mu(u)$ と等しいことが知られている。

J-holomorphic strip $u\in\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q)$ に対し、$u(\cdot+s_0,\cdot)$ も任意の $s_0\in\mathbb{R}$ について $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1;p,q)$ の要素になるので、$\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q)$ は自由な $\mathbb{R}$-作用をもつ。そこで、この作用で割ったモジュライ空間

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_J(L_0,L_1:p,q) &:= \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1:p,q)/\mathbb{R}, \\ \mathcal{M}_J(L_0,L_1) &:= \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1)/\mathbb{R} \end{aligned}$$

を定義する。J-holomorphic strip $u\in\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1)$ でその同値類 $[u]$ が $\mathcal{M}_J(L_0,L_1)$ の 0 次元連結成分の一つであるとき、u あるいはその同値類 $[u]$ は **isolated trajectory** と呼

ばれる。以上の準備の下で、境界作用素 $\partial : CF(L_0, L_1) \to CF(L_0, L_1)$ を

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q$$

($p \in L_0 \cap L_1$) により定義する。ここで、$n(p,q)$ は $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ 内の isolated trajectory の個数を mod-2 で数えたものである。このとき、$\partial \circ \partial = 0$ が示せれば、Floer チェイン複体 $(CF(L_0, L_1), \partial)$ が構成され、商加群

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial)$$

が定義できる。これを Lagrange 部分多様体の $\mathbb{Z}_2$ 係数の **Floer ホモロジー群**という。

Floer [5] は、$\pi_2(M, L_0) = 0$ でかつ L_1 が L_0 と Hamilton 同位の場合に $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を構成し、その後、Oh [12] により L_0 と L_1 が単調の場合に拡張された。この拡張はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形を扱うためには不可欠である。

シンプレクティック多様体 (M, ω) の閉 Lagrange 部分多様体 L について、2 つの準同型

$$I_{\mu,L} : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}, \quad I_\omega : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$$

が次のように定義される。$I_{\mu,L}$ は、各写像 $w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ に対して、単位円盤 D^2 上のシンプレクティックベクトル束 w^*TM と $\partial D^2 \cong S^1$ 上の Lagrange 部分ベクトル束 $(w|\partial D^2)^*TL$ との対 $(w^*TM, (w|\partial D^2)^*TL)$ の Maslov 指数 $I_{\mu,L}(w)$ を対応させる写像とする。I_ω は $I_\omega(w) = \int_{D^2} w^*\omega$ で定義する。閉 Lagrange 部分多様体 L は、ある定数 $\alpha > 0$ が存在して $I_\omega = \alpha I_{\mu,L}$ が成り立つとき、**単調** (monotone) [4]であるという。単調な閉 Lagrange 部分多様体 L について、部分群 $\mathrm{im}(I_{\mu,L}) \subset \mathbb{Z}$ の正の生成元を Σ_L と表し、L の**最小 Maslov 数** (minimal Maslov number) と呼ぶ。次が Oh の結果である。

定理 8 ([12] Theorems 4.4, 5.1). (L_0, L_1) を必ずしも Hamilton 同位とは限らない単調な閉 Lagrange 部分多様体の対で、横断的に交わっているとする。$\Sigma_{L_i} \geq 3$ $(i = 0, 1)$ および、$\mathrm{im}(\pi_1(L_i)) \subset \pi_1(M)$ は少なくとも一方の L_i でねじれ部分群になっていると仮定する[5]。このとき、稠密な部分集合 $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}^{reg}$ が存在し、$J \in \mathcal{J}'$ に対して、

(1) ∂ は well-defined である。
(2) $\partial^2 = 0$.
(3) $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ は $J \in \mathcal{J}'$ の取り方によらず、Hamilton 同位の下で不変である。

以下、単調なコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対 (L_0, L_1) に対して Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の計算を実行するが、定理 8 の条件に合わせて **L_0 および L_1 の最小 Maslov 数が 3 以上**の場合に絞って考える。L_0, L_1 のいずれかの最小 Maslov 数が 2 の場合には、$\partial \circ \partial = 0$ の証明の際に Maslov 指数 2 の正則円盤の分類が必要となる。

[4]Floer の条件 $\pi_2(M, L) = 0$ は、$\alpha = 0$ の場合に含まれる。
[5]コンパクト型 Hermite 対称空間 M は、$\pi_1(M) = 0$ をみたすのでこの条件は自動的にみたされる。

3 実形の単調性と最小 Maslov 数

コンパクト Kähler 多様体 (M,J,ω) の第 1 Chern 類を $c_1(M):=c_1(TM,J)$ と表す。2 つの準同型

$$I_c:\pi_2(M)\to\mathbb{Z},\quad I_\omega:\pi_2(M)\to\mathbb{R}$$

を次のように定義する。I_c は、$A\in\pi_2(M)$ の代表元の C^∞ 写像 $u:S^2\to M$ に対して、Chern 数 $c_1(A):=\langle c_1(M),[u]\rangle$ を対応させる写像とする。I_ω は $I_\omega(A)=\int_{S^2}u^*\omega$ で定義する。(M,J,ω) は、ある定数 $\alpha>0$ が存在して $I_\omega=\alpha I_c$ が成り立つとき、**単調** (monotone) であるという。単調なコンパクト Kähler 多様体 (M,J,ω) について、部分群 $I_c(\pi_2(M))\subset\mathbb{Z}$ の正の生成元を Γ_{c_1} と表し、M の**最小 Chern 数** (minimal Chern number) という。

既約コンパクト型 Hermite 対称空間は単調なシンプレクティック多様体の例であるが、さらに、コンパクト型 Hermite 対称空間 (M,J_0,ω) がいつ単調になるかを決定しておく。

$$(M,J_0,\omega)\cong(M_1,J_1,\omega_1)\times(M_2,J_2,\omega_2)\times\cdots\times(M_k,J_k,\omega_k)$$

と既約分解すると、M の Kähler 形式 ω と Ricci 形式 ρ は

$$\omega=\omega_1\oplus\omega_2\oplus\cdots\oplus\omega_k,\quad \rho=\rho_1\oplus\rho_2\oplus\cdots\oplus\rho_k$$

と表せる。

命題 9. コンパクト型 Hermite 対称空間 (M,J_0,ω) について、(M,ω) が単調であることと M が (Ricci 曲率正の) Kähler-Einstein 多様体であることは同値である。

証明　各既約因子 M_i が Kähler-Einstein であるから、定数 $c_i>0$ が存在して

$$\rho_i=c_i\omega_i,\quad i=1,\dots,k$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}
[\omega] &= [\omega_1]+[\omega_2]+\cdots+[\omega_k]\\
&= \frac{1}{c_1}[\rho_1]+\frac{1}{c_2}[\rho_2]+\cdots+\frac{1}{c_k}[\rho_k]\\
&= \frac{2\pi}{c_1}c_1(M_1)+\frac{2\pi}{c_2}c_1(M_2)+\cdots+\frac{2\pi}{c_k}c_1(M_k)
\end{aligned}$$

となる。ここで、M が Kähler-Einstein $(c_1=\cdots=c_k=:c>0)$ と仮定すると、

$$[\omega]=\frac{2\pi}{c}(c_1(M_1)+c_1(M_2)+\cdots+c_1(M_k))=\frac{2\pi}{c}c_1(M)$$

となり、M は単調であることがわかる。逆に、M が単調ならば、定数 $\alpha>0$ があって、

$$\frac{2\pi}{c_1}c_1(M_1)+\frac{2\pi}{c_2}c_1(M_2)+\cdots+\frac{2\pi}{c_k}c_1(M_k)=\alpha(c_1(M_1)+c_1(M_2)+\cdots+c_1(M_k))$$

が成り立たなければならない。この式から $2\pi/c_i=\alpha$ が導かれるので、

$$c_1=c_2=\cdots=c_k=\frac{2\pi}{\alpha}$$

となり、M は(リッチ曲率正の)Kähler-Einstein 多様体であることがわかる。 □

次に、M の実形の Lagrange 部分多様体としての単調性を考察する。次の公式は実形 L の単調性の確認および最小 Maslov 数 Σ_L の評価に有用である ([12, Lemma 2.1])。

補題 10 (Viterbo). 2つの C^∞ 写像 $w, w' : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ は $w|_{\partial D^2} = w'|_{\partial D^2}$ をみたすとする。このとき $S^2 = D^2 \cup \overline{D^2}$ から M への写像 u を

$$u(z) = \begin{cases} w(z), & z \in D^2 \\ w'(z), & z \in \overline{D^2} \end{cases}$$

のように定めると、

$$I_{\mu,L}(w) - I_{\mu,L}(w') = 2c_1([u])$$

が成り立つ。

系 11. 単調なコンパクト Kähler 多様体 (M, J, ω) の対合的反正則等長変換 σ の固定点集合 $L = \mathrm{Fix}(\sigma)$ は単調である。

証明 $A \in \pi_2(M, L)$ を任意にとる。C^∞ 写像 $w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ を A の代表元とする。このとき、C^∞ 写像 $w' = \sigma \circ w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ が定義できるが、補題 10 を用いると $I_{\mu,L}(w) = c_1([u])$ となる。M の単調性から定数 $\alpha > 0$ が存在して

$$\int_{S^2} u^*\omega = \alpha c_1([u])$$

であるから、

$$\int_{S^2} u^*\omega = \alpha I_{\mu,L}(w)$$

となる。左辺は $2I_\omega(A)$ と解釈できるので、$I_\omega(A) = (\alpha/2)I_{\mu,L}(A)$ が成り立ち、L は単調となる。 □

証明の途中で得られた等式 $I_{\mu,L}(w) = c_1([u])$、最小 Maslov 数および最小 Chern 数の定義からただちに次が得られる。

系 12. 単調なコンパクト Kähler 多様体 (M, J, ω) の最小 Chern 数 Γ_{c_1} および M の実形 L の最小 Maslov 数 Σ_L について、

$$\Sigma_L \geq \Gamma_{c_1}$$

が成り立つ。

以上の考察から、コンパクト型 Hermite 対称空間に Oh の Floer 理論を適用する際には、単調な (Kähler-Einstein である) コンパクト型 Hermite 対称空間 M を考え、その実形 L には $\Sigma_L \geq 3$ を仮定すればよい。とくに、M が既約の場合には次の Borel-Hirzebruch の結果 ([3, p. 521]) により、$M = \mathbb{C}P^1$ 以外の M の実形はこの仮定をみたす。

M	Γ_{c_1}
$U(m+n)/(U(m)\times U(n))$	$m+n$
$SO(2n)/U(n)$	$2n-2$
$Sp(n)/U(n)$	$n+1$
$SO(n+2)/(SO(2)\times SO(n))$	n
$E_6/T\cdot Spin(10)$	12
$E_7/T\cdot E_6$	18

既約でない場合の適用例は、5 節で述べる。

4 Floer ホモロジーの計算

(M, J_0, ω) を単調なコンパクト型 Hermite 対称空間とする。ここで、J_0 は M の標準的な複素構造、ω は標準的な Kähler 型式である。L_0, L_1 を横断的に交わる M の 2 つの実形で、最小 Maslov 数はともに 3 以上とする。定理 8 の (3) により、Floer ホモロジー群 $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ は $\mathcal{J}'$ に属する概複素構造の取り方によらないが、その計算を標準的な複素構造 J_0 で行えることを保障するのが次の結果である [15, Main Theorem] 。

定理 13 (Regularity [15]). (M, J, ω) を Kähler 多様体で、非負な正則双断面曲率 (holomorphic bisectional curvature) をもつとする。L_0, L_1 を M の全測地的な閉 Lagrange 部分多様体で、横断的に交わっているとする。このとき、J は *regular* すなわち、線形化

$$E_u = D\bar{\partial}_J(u) : T_u\mathcal{P} \to \mathcal{L}_u$$

は任意の $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)$ に対して全射である。

命題 14 (Compactness [13] [14]). 定理 13 の仮定に加え、L_0, L_1 は単調で $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$ とする。このとき、$\mathcal{M}_J(L_0, L_1)$ の 0 次元部分はコンパクトで、$\mathcal{M}_J(L_0, L_1)$ の 1 次元部分は 2 つの isolated trajectories への分裂を付け加えることによりコンパクト化できる。よって、$\partial_J^2 = 0$ である。

証明 $(L, \phi(L))$ の場合の証明は [13, Proposition 4.4], [14, Proposition 4.5] にある。(L_0, L_1) に対しては、定理 13 を用いてこれらの証明をたどればよい。 □

以下、$J = J_0$ とする。補題をひとつ準備する。

補題 15. M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0, L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形とする。$L_0 \cap L_1$ の元 p に対して[6]、M の p における点対称 s_p は正則等長変換になり、次の性質を持つ。

$$s_p(L_0) = L_0, \quad s_p(L_1) = L_1, \quad s_p(q) = q \quad (q \in L_0 \cap L_1).$$

[6] [19] の Lemma 3.1 により $L_0 \cap L_1$ は空ではない。

証明 M の実形は全測地的部分多様体だから、$L_i = \mathrm{Exp}_p(T_pL_i)$ $(i = 0, 1)$ が成り立つ。さらに $(ds_p)_p = -1$ より

$$s_p(L_i) = \mathrm{Exp}_p((ds_p)_pT_pL_i) = \mathrm{Exp}_p(T_pL_i) = L_i$$

を得る。田中-田崎 [18] の Theorem 1.1 より $L_0 \cap L_1$ は対蹠集合になり、任意の $x, y \in L_0 \cap L_1$ に対して $s_xy = y$ が成り立つ。よって、とくに

$$s_p(q) = q \quad (q \in L_0 \cap L_1).$$

が成り立つ。 □

以上の準備の下で、Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を計算する。仮定より、交叉 $L_0 \cap L_1$ は有限個の点であるので、この中から任意に 2 点 p, q を選ぶ。M の p における点対称 s_p は $s_p^2 = \mathrm{id_M}$ をみたす。また、補題 15 より、2 点 p, q は s_p-作用の固定点である。u を $\tilde{\mathcal{M}}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ に属する J_0-holomorphic strip とする。これは境界条件

$$u(s, 0) \in L_0,\ u(s, 1) \in L_1,\ u(-\infty, t) = p,\ u(+\infty, t) = q$$

をみたす。この u に対して、もう一つの正則写像 $\bar{u} : \mathbb{R} \times [0, 1] \to M$ を

$$\bar{u}(s, t) := s_p(u(s, t))$$

により定義する。補題 15 により、実形 L_0, L_1 は s_p-作用で不変であるから、正則写像 $\bar{u}$ は

$$\bar{u}(s, 0) = s_p(u(s, 0)) \in L_0,\ \bar{u}(s, 1) = s_p(u(s, 1)) \in L_1$$

および

$$\bar{u}(-\infty, t) = s_p(u(-\infty, t)) = s_p(p) = p,\ \bar{u}(+\infty, t) = s_p(u(+\infty, t)) = s_p(q) = q$$

をみたし、$\tilde{\mathcal{M}}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ の要素である。さらに、点対称 s_p の性質より $s_p \circ \bar{u} = u$ であり、また、$[\bar{u}] \neq [u] \in \mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ であることがわかるので、モジュライ空間 $\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ は s_p により誘導される自由な $\mathbb{Z}_2$-作用をもつ。とくに、$\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1 : p, q)$ の 0 次元部分は偶数個の要素をもつ。ゆえに、

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q = 0$$

が成り立つ。これは、任意の元 $p \in L_0 \cap L_1$ が Floer サイクルであり、交叉 $L_0 \cap L_1$ そのものが Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の生成元であることを示している。

以上により、定理 4 の証明が完成する。

5 既約でない場合の適用例

既約コンパクト型 Hermite 対称空間 M の積 $M \times M$ は Kähler-Einstein であるから、その実形の対に定理 4 が適用できる。$\sigma : M \to M$ を対合的反正則等長変換とすると、$(x, y) \mapsto (\sigma(y), \sigma(x))$ は $M \times M$ の対合的反正則等長変換になり、その固定点集合

$$D_\sigma(M) = \{(x, \sigma(x)) \mid x \in M\}$$

は $M\times M$ の実形である。一方、M の実形 L_0, L_1 に対して $L_0\times L_1$ も $M\times M$ の実形になり、

$$(L_0\times L_1)\cap D_\sigma(M)=\{(x,\sigma(x))\mid x\in L_0\cap\sigma^{-1}(L_1)\}$$

である。このとき、$M\times M$ の実形 $L_0\times L_1$ と $D_\sigma(M)$ が横断的に交わることと M の実形 L_0 と $\sigma^{-1}(L_1)$ が横断的に交わることは同値であり、

$$\#\{(L_0\times L_1)\cap D_\sigma(M)\}=\#\{L_0\cap\sigma^{-1}(L_1)\}$$

が成り立つ。

例 16. $M=\mathbb{C}P^n$ とすると、L_0, L_1 はともに $\mathbb{R}P^n$ と合同になる。このとき、

$$\#\{(L_0\times L_1)\cap D_\sigma(M)\}=\#\{L_0\cap\sigma^{-1}(L_1)\}=n+1.$$

また、[4, Lemma 1] より

$$\#_2(L_0\times L_1)=\#_2(L_0)\#_2(L_1)=(n+1)^2,\quad \#_2(D_\sigma(M))=\#_2M=n+1$$

となるので、この場合は 2 つの実形の交点数は 2-number の小さい方に一致する。

また、$D_\sigma(M)$ の最小 Maslov 数は $2(n+1)$、$n\geq 2$ のとき $L_0\times L_1$ の最小 Maslov 数は 3 以上であるから、定理 4 より

$$HF(L_0\times L_1, D_\sigma(M):\mathbb{Z}_2)\cong(\mathbb{Z}_2)^{n+1}\qquad(n\geq 2).$$

よって、不等式 (1.1) が成立する。

例 17. $M=Q_n(\mathbb{C})$ とし、L_0, L_1 はそれぞれ $S^{k,n-k}, S^{l,n-l}$ $(0\leq k\leq l\leq[n/2])$ に合同になっているとする。このとき、[19] の結果より

$$\#\{(L_0\times L_1)\cap D_\sigma(M)\}=\#\{L_0\cap\sigma^{-1}(L_1)\}=2(k+1).$$

$n\geq 3$ のとき、$D_\sigma(M)$ および $L_0\times L_1$ の最小 Maslov 数は 3 以上であるから、定理 4 より

$$HF(L_0\times L_1, D_\sigma(M):\mathbb{Z}_2)\cong(\mathbb{Z}_2)^{2(k+1)}.$$

ところが、

$$\begin{aligned}\#_2(L_0\times L_1)&=\#_2(L_0)\#_2(L_1)=4(k+1)(l+1),\\ \#_2(D_\sigma(M))&=\#_2M=2([n/2]+1)\end{aligned}$$

であるから、$k=l=[n/2]$ の場合に限り不等式 (1.1) が成り立ち、それ以外の場合には (1.1) は成立しない。

このように、既約でないコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対を考えると不等式 (1.1) が成立しない例を数多く構成できる。

6 複素2次超曲面の実形のHamilton変形の下での体積の評価

この節では、一般化されたArnold-Givental不等式(1.1)の応用として複素2次超曲面$Q_n(\mathbb{C})$の実形$S^{k,n-k}$のHamilton同位の下でのRiemann体積の評価を行う。

一般に、Kähler多様体(M,J,ω)のLagrange部分多様体Lは、任意のHamilton微分同相写像$\phi\in \mathrm{Ham}(M,\omega)$について

$$\mathrm{vol}(\phi L)\geq \mathrm{vol}(L)$$

が成り立つとき、**Hamilton体積最小**であるという。この概念は[11]で導入された。現在までに知られているHamilton体積最小なLagrange部分多様体の非自明な例は少なく、$\mathbb{R}P^n\subset\mathbb{C}P^n$ ([11]) と$S^1\times S^1\subset S^2\times S^2$ ([8]) のみである。$S^2\times S^2\cong Q_2(\mathbb{C})$であるから、高次元の$Q_n(\mathbb{C})$の実形の中でHamilton体積最小なものを発見することが期待される。ここでは、$Q_n(\mathbb{C})$のすべての実形に対し、Hamilton同位の下での体積の下限を与える。

一般化されたArnold-Givental不等式(1.1)より

$$\#(S^{0,n}\cap\phi S^{k,n-k})\geq \min\{SB(S^{0,n},\mathbb{Z}_2),SB(S^{k,n-k},\mathbb{Z}_2)\}=2 \tag{6.3}$$

である。ここで, $S^{k,n-k}=(S^k\times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$である。また、Lê Hông Vânにより次のCrofton型の公式が知られている。

定理 18 (Le [10]). 複素2次超曲面$Q_n(\mathbb{C})\cong\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+2})$内の実$n$次元部分多様体$N$に対して

$$\int_{SO(n+2)}\#(gS^n\cap N)d\mu_{SO(n+2)}(g)\leq 2\frac{\mathrm{vol}(SO(n+2))}{\mathrm{vol}(S^n)}\mathrm{vol}(N) \tag{6.4}$$

が成り立つ。

証明 [20]の定理4.4.2を参照。 □

任意の$\phi\in\mathrm{Ham}(Q_n(\mathbb{C}),\omega)$に対して、$N=\phi S^{k,n-k}$ $(k=0,1,\dots,[n/2])$とおくと、(6.4), (6.3)より

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\phi S^{k,n-k}) &\geq \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2\mathrm{vol}(SO(n+2))}\int_{SO(n+2)}\#(gS^n\cap\phi S^{k,n-k})d\mu_{SO(n+2)}(g)\\ &\geq \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2\mathrm{vol}(SO(n+2))}\int_{SO(n+2)}2d\mu_{SO(n+2)}(g)\\ &= \mathrm{vol}(S^n)\end{aligned} \tag{6.5}$$

が成立する。特に、実形$S^{k,n-k}$の中には体積汎関数の第二変分の意味でHamilton不安定なものもあり、それを体積が減るようにHamilton変形していっても体積が0になってしまうことはないことを主張している。さらに、不等式(6.5)は$k=0$のとき最良評価を与えている。実際、nが偶数の場合にはcalibrationを用いたより強い結果が知られている。

定理 19 (Gluck-Morgan-Ziller [7]). nが4以上の偶数のとき、$Q_n(\mathbb{C})$の実形$S^{0,n}=S^n$はそのホモロジー類の中で体積最小である。

一方、$Q_n(\mathbb{C})$ の奇数次のホモロジーはどの係数体についても消えているので、n が奇数の場合には、定理 19 に相当する結果は期待できない。しかし、(6.5) により次の結果が得られる。

系 20. $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^{0,n} = S^n$ は Hamilton 体積最小である。

参考文献

[1] G. Alston, *Lagrangian Floer homology of the Clifford torus and real projective space in odd dimensions*, arXiv:0902.0197v2.

[2] G. Alston and L. Amorim *Floer cohomology of torus fibers and real Lagrangians in Fano toric manifolds*, arXiv:1003.3651v1.

[3] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458–538.

[4] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[5] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differ. Geom. **28** (1988), 513–547.

[6] K. Fukaya, Y.-G.Oh, H. Ohta and K. Ono, *Floer theory of Lagrangian submanifolds over* $\mathbb{Z}$, preprint.

[7] H. Gluck, F. Morgan and W. Ziller, *Calibrated geometries in Grassmann manifolds*, Comm. Math. Helv. **64** (1989), 256–268.

[8] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, *Integral geometry and Hamiltonian volume minimizing property of a totally geodesic Lagrangian torus in* $S^2 \times S^2$, Proc. Japan Acad. **79** Ser. A (2003), 167–170.

[9] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, preprint.

[10] Lê Hông Vân, *Application of integral geometry to minimal surfaces*, Int. J. Math. **4** (1993), 89–111.

[11] Y.-G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Invent. Math. **101** (1990), 501-519.

[12] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993.

[13] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, II:* $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}P^n)$, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 995–1012.

[14] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

[15] Y.-G. Oh, *Fredholm-Regularity of Floer's Holomorphic Trajectories on Kähler Manifolds*, Kyungpook Math. J. **37** (1997), 153–164.

[16] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Math. J. **36** (1984), 293–314.

[17] M. Takeuchi, *Two-number of symmetric R-spaces*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.

[18] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, to appear in J. Math. Soc. of Japan.

[19] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.

[20] 田崎博之, 積分幾何学, 上智大学数学講究録 no. 37 (1994)