

多重連結領域の点渦力学

Point vortex dynamics in multiply connected domains

坂上 貴之 (Takashi Sakajo)
北海道大学大学院理学研究院, JST CREST
E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp

1 はじめに

二次元空間における多重連結領域中の非粘性・非圧縮流体の運動を考える。このような流れの数学的研究は応用上も重要なものである。例えば、湖沼・港湾・河川などは多くの砂州や島を含むので、こうした流れ領域は多重連結領域として数学的には記述される。また、流体中にある複数の物体が能動的にあるいは流れに沿って動く場合、高速で泳ぐ魚群や空中を舞う葉の数学モデルと見なすことができる。その他、風力発電のプロペラの運動、スキージャンプの飛行に対する数理モデルなど、これらの理論の適用範囲は広い。

こうした多重連結領域における流体運動に共通する問題意識は大きく見て二つある。まずは領域内にある内部境界の配置や形状によって流れがどのように変化するかを調べることであろう。問題に応じて、それに適合するよりよい境界形状や効率的配置の問題を考えることは、海上や河川での建造物設計に理論的基礎を与える。もう一つの問題意識は、境界と渦の相互作用を調べることにある。これは、昆虫や魚などが、自らの体（境界）を動かして渦構造を生成し、その生成渦と境界の相互作用により効果的な移動を実現しているという事実を踏まえたものである。こうした問題意識に答えられる解析可能な数理モデルを構築することが本稿の目的である。

さて、二次元全平面や単連結領域、また球面における非粘性・非圧縮流体の研究では、これまで多くの研究成果がある。特に完全流体の理論は古くから複素速度ポテンシャルと複素関数論の理論として整備され、翼理論構築のための数学的基礎として用いられたことはよく知られている [12]。この理論を多重連結領域に拡張する試みは当然なされており、多重連結領域における複素速度ポテンシャルの存在自身は早い時期から知られていたが [15]、与えられた任意の多重連結領域における複素速度ポテンシャルを具体的な関数として構成することはこれまでできなかった。これに対して、近年 D. Crowdy と J. Marshall [5] により、ある特別な多重連結領域上の完全流体の理論が構築され、これに基いて多重連結領域における流れの数学的理論展開が可能になった。

このような背景を踏まえて我々は多重連結領域における流れに対する数理モデルの構成について解説し、さらにこの完全流体理論を発展させることによって点渦力学理論 (Point Vortex Dynamics) を構築したい。完全流体は渦なしの流れであるが、我々は δ 関数の渦度に対応する

点渦を導入して理論を拡張することができる。この点渦の相互作用運動を研究するのが点渦力学である。特に二次元の非粘性・非圧縮流体では、渦度はスカラー量であり、流体粒子の軌道に沿って保存される Lagrange 保存量となっているため、この点渦はあたかも実在する質点であるかのように振る舞い、また後述するように点渦運動はハミルトン力学系として定式化されるので、非線形力学系理論などの手法を適用することが可能である。

平面や球面といった境界のない二次元領域での点渦力学については、ここ30年の間にハミルトン力学系理論の立場から理論的な研究が進んでおり、また現在でも多くの研究がなされている分野である [18]。しかし、多重連結領域における点渦力学についての理論的な成果はこれまでにほとんどなく、そもそも点渦が従う基礎方程式すら与えられていなかったが、その方程式の導出が論文 [24] で与えられた。その定式化について解説し、その応用の一つを示す。

2 二次元非粘性・非圧縮流体の数理（点渦力学）

二次元空間における非粘性・非圧縮流体の運動は Euler 方程式として知られる以下の偏微分方程式に従う。これは二次元領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ において、速度場 $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u(t, x, y), v(t, x, y))$ 、流体の圧力 $p(t, x, y)$ とすると次で与えられる。

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{in } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \text{in } \mathcal{D}, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } [0, T] \times \partial \mathcal{D}. \end{cases}$$

今、速度場に関する非圧縮条件が満足されるように、以下のように関数 $\psi(x, y)$ を導入する。

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \iff u_x + v_y = 0 \iff u = \psi_y, \quad v = -\psi_x. \quad (1)$$

この時、 $\nabla \psi \cdot \mathbf{u} = 0$ なので、 ψ の等高線と速度場は接する。この事実から関数 $\psi(x, y)$ は流れ関数と呼ばれる。

さらに、二次元の渦度を $\omega = v_x - u_y$ によって定義すると、Euler 方程式から次の渦度方程式が得られる。

$$\omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0. \quad (2)$$

また、これと流れ関数を組み合わせると、流れ関数 ψ と渦度 ω は、次のポアソン方程式によって関係づけられる。

$$\omega = v_x - u_y = -\psi_{xx} - \psi_{yy} = -\Delta \psi. \quad (3)$$

速度場 \mathbf{u} は流れ関数 ψ を微分して得られるので、上の二つの式 (2) と (3) は流れ関数 ψ と渦度 ω に関する閉じた方程式となっており、これを Euler 方程式の流れ関数-渦度表示という。

複素関数と完全流体 二次元非粘性・非圧縮流体に対して、渦度が0となる「渦無し」流れを考える。ここで関数 $\phi(x, y)$ を導入して、 $u = \phi_x, v = \phi_y$ となるように u, v を定めると自動的に $\omega = 0$ の条件を満たす。この関数 ϕ と先ほどの流れ関数 ψ の満たす関係式 (1) をあわせると以下を得る。

$$u = \phi_x = \psi_y, \quad v = \phi_y = -\psi_x.$$

二次元空間の点 $\mathbf{x} = (x, y)$ と複素数 z を $z = x + iy$ によって同一視すれば、これは関数 $F(z) = \phi(z) + i\psi(z)$ に対する Cauchy-Riemann の関係式を与えているので、 $F(z)$ は解析関数である。さらに、この関数の複素微分は速度場 (u, v) を複素数と同一視した時の複素共役を与える。

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{2}(\phi_x + \psi_y) + \frac{i}{2}(\psi_x - \phi_y) = u - iv. \quad (4)$$

このような解析関数を複素速度ポテンシャルと呼び、解析関数と二次元完全流体を結びつける重要な関数である。

点渦力学の導出 渦度方程式 (2) から

$$\frac{d}{dt}\omega(t, \mathbf{x}(t)) = \omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = 0$$

となることがわかるので、二次元流体において渦度は、時刻 t において $\mathbf{x}(t)$ にある流体粒子の軌道に沿って保存される量である。このような流体粒子の軌道に沿って保存される量を Lagrange 保存量と呼ぶが、この事実は二次元流体の運動の理解において重要な役割を果たす。すなわち、初期時刻において二次元平面内にそのサポートが有界な渦度分布を与えたとき、そのサポート内にある流体粒子の運動に従って渦度分布が時間発展する。このことから、我々は最初に渦度を持つ領域だけを考えればよく、渦度を持たない流体粒子の運動は考える必要はないため、問題は簡単になる。この事実に注目して、渦度分布を離散近似してその時間発展を見るのが点渦近似である。

今、初期時刻における有界なサポートを持つ渦領域を考え、そのサポート領域を N 個の小メッシュに切って、 k 番目のメッシュの代表点 \mathbf{x}_k に流体粒子を置く。このとき、その小メッシュ内に含まれる渦度の総量を Γ_k として、渦度場を以下のような δ 関数で近似する。

$$\omega(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)).$$

なお、 Γ_k は各小メッシュの境界に沿って速度場を線積分して得られる循環でもあり、これは Kelvin の循環定理から粒子の軌道に沿って保存される量であることがわかるので、点渦の時間発展とともに動く定数である。このことから Γ_k を点渦の強さと呼ぶ。このとき、ポアソン方程式 (3) は、考えている二次元領域 D のラプラス作用素のグリーン関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ から

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$$

のように解けるので、この流れ関数を (4) のように微分することで速度場が計算できる。したがって、流体粒子の従う運動方程式は $\dot{\mathbf{x}} = (\psi_y, -\psi_x)$ によって与えられるが、実はこの議論には一つ問題がある。というのも、我々が考えている流体粒子は単なる粒子ではなく渦度を持った粒子であり、他の粒子の渦度によって導かれる速度によって運動はするものの、自分が誘導する速度では動くことができない。また点渦によって誘導される速度場は自分自身の点の上で無限大に発散してしまう。これに対して、流れ関数を自分の影響が出ないように修正して点渦の運動方程式を作る必要がある。そこで、 m 番目の点渦に対して、 m 番目の渦自身が持つ特異性に対応するグリーン関数 $-\frac{\Gamma_m}{2\pi} \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|$ を流れ関数 $\psi(t, \mathbf{x})$ から除いた修正流れ関数 $\psi^{(m)}(t, \mathbf{x})$ を以下のように定義する。

$$\psi^{(m)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \neq m} \Gamma_k G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) + \Gamma_m (G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_m) + \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|) \equiv \sum_{k \neq m} \Gamma_k G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) - \Gamma_m g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_m).$$

この修正流れ関数を微分することで、 m 番目の点渦の従う運動方程式を得る。

$$\dot{x}_m = \psi_y^{(m)}(\mathbf{x}_m), \quad \dot{y}_m = -\psi_x^{(m)}(\mathbf{x}_m), \quad m = 1, \dots, N.$$

このようにして二次元 Euler 方程式は渦度あるいは循環の Lagrange 保存性に注目することによって、 N 個の点渦粒子の常微分方程式系で近似できることがわかった。この点渦方程式は次の関数 $H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$

$$H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=m+1}^N \Gamma_k \Gamma_m G(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \mathcal{R}(\mathbf{x}_k)$$

を導入すると、これをハミルトニアンとするハミルトン形式で書くこともできる。

$$\Gamma_m \frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_m}, \quad \Gamma_m \frac{dy_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_m}, \quad m = 1, \dots, N.$$

ちなみに、これを複素表示すると以下のようになる [15, 18].

$$\Gamma_m \frac{d\zeta_m^*}{dt} = 2i \frac{\partial H^{(\zeta)}}{\partial \zeta_m}, \quad m = 1, \dots, N. \quad (5)$$

なお、 ζ^* は ζ の複素共役を表す記号であり、 $\mathcal{R}(\mathbf{x}_m) = g(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m)$ はロビン関数 [9] と呼ばれ、点渦と境界の相互作用を表すハミルトンエネルギーと見なすことができる。

このことから、与えられた多重連結領域における点渦力学を構築するためには、その領域におけるグリーン関数を構成しなければならない。このようなことは一般に難しいが、ある特別な形をした多重連結領域に対して Green 関数が陽的に与えられることに基づいて、その記述を試みる。

3 多重連結標準円領域の点渦力学

二次元平面を複素 ζ 平面と同一視し、単位円 $|\zeta| = 1$ 内に複数の円形の障害物が含まれているような領域を考え、これを標準円領域と呼ぶことにする。我々はまずこの標準円領域におけ

る点渦運動の方程式を導出する。このような特別な領域で理論を組み立てることは意味がある。というのも、与えられた多重連結領域に対してその領域を標準円領域に写す等角写像が存在すれば(この存在については[17]などを参照のこと)この等角写像を通して与えられた領域での点渦方程式を標準円領域の方程式から導出することが可能だからである。

まず初めに標準円領域 D_ζ の配置を具体的に与える。この領域は単位円 $|\zeta| = 1$ の内部領域であり、その中に M 個の円形の島 $\{C_j | j = 1, \dots, M\}$ が含まれているものとする。それらの円の中心の位置と半径をそれぞれ $\delta_j \in \mathbb{C}$ および $q_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, M$) と書くことにすると、これらが標準円領域を特徴づけるパラメータ(モジュライ)となっている。この時、各円境界 C_j の情報からメビウス写像を $\vartheta_j(\zeta)$ を次のように定義する。

$$\vartheta_j(\zeta) = \delta_j + \frac{q_j^2 \zeta}{1 - \delta_j^* \zeta}.$$

この M 個のメビウス写像 $\vartheta_j(\zeta)$ とそれらの逆写像 $\vartheta_j^{-1}(\zeta)$ を生成元とし、写像の合成を演算として定義される無限自由群を Schottky 群とよび、 Θ と書くことにする。今、Schottky 群の元の間に $\theta_p \sim \theta_q \iff \theta_p = \theta_q^{-1}$ なる同値関係 \sim を導入する。この同値関係による Θ の商集合から単位元 e を取り除いたものを $\Theta'' = (\Theta / \sim) \setminus \{e\}$ と定義する。

この集合を使って標準領域 D_ζ の上で正則な関数 (Schottky-Klein Prime 関数) を以下のように定義する [4].

$$\omega(\zeta, \alpha) = (\zeta - \alpha) \omega'(\zeta, \alpha), \quad \omega'(\zeta, \alpha) = \prod_{\theta_i \in \Theta''} \frac{(\theta_i(\zeta) - \alpha)(\theta_i(\alpha) - \zeta)}{(\theta_i(\zeta) - \zeta)(\theta_i(\alpha) - \alpha)}. \quad (6)$$

この $\omega(\zeta, \alpha)$ は D_ζ 内の点 $\zeta = \alpha$ で一位の零点を持つ。また ω' は関数の微分を表すのではなくプライムの記号であり、この関数の名前の由来ともなっている。この(6)に現れる無限積表示は円形の島が離れていけば収束することが知られているが、Schottky-Klein Prime 関数そのものはこうした無限積表示とは関係なく定義できることを注意しておく。(例えば論文[8]を見よ。)なお、この関数は与えられた標準円領域の内部の島の配置が決まるごとに異なる関数形を与えるということに注意しておこう。その意味でも特に必要な場合は“ D_ζ に付随する” Schottky-Klein Prime 関数と呼ぶこともある。

この標準領域 D_ζ に付随する Schottky-Klein Prime 関数を用いて、D. Crowdy と J. Marshall[5] は $\alpha \in D_\zeta$ にある点渦の複素速度ポテンシャル $G(\zeta, \alpha)$ を以下のように具体的に与えた。

$$G(\zeta; \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1}{\alpha} \frac{\omega(\zeta, \alpha)}{\omega(\zeta, \alpha^{*-1})} \right|.$$

さらに、前章で解説した一般論を、この点渦の複素速度ポテンシャルを Green 関数として適用すると、以下のような標準円領域における N 個の点渦の従う運動方程式が得られる [24].

定理 1 強さ $\{\Gamma_m | m = 1, \dots, N\}$ を持つ N 個の点渦が標準円領域 D_ζ 内の $\{\zeta_m | m = 1, \dots, N\}$ にあるとする。この時、 N 点の運動方程式は以下で与えられる。

$$\frac{d\zeta_m^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq m}^N \Gamma_k \left(\frac{\omega_\zeta(\zeta_m, \zeta_k)}{\omega(\zeta_m, \zeta_k)} - \frac{\omega_\zeta(\zeta_m, \zeta_k^{*-1})}{\omega(\zeta_m, \zeta_k^{*-1})} \right) - \frac{\Gamma_m}{2\pi i} \frac{\omega_\zeta(\zeta_m, \zeta_m^{*-1})}{\omega(\zeta_m, \zeta_m^{*-1})}, \quad m = 1, \dots, N. \quad (7)$$

ただし $\omega_\zeta(\zeta, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \omega(\zeta, \alpha)$ とする.

この方程式のハミルトン関数 $H^{(\zeta)}$ は

$$H^{(\zeta)}(\zeta_1, \zeta_1^*, \dots, \zeta_N, \zeta_N^*) = \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_{k=m+1}^{N-1} \Gamma_m \Gamma_k G(\zeta_m; \zeta_k) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \Gamma_m^2 \mathcal{R}(\zeta_m; \zeta_m^*) \quad (8)$$

であり、ロビン関数 $\mathcal{R}(\alpha; \alpha^*)$ は以下で与えられる [5].

$$\mathcal{R}(\alpha; \alpha^*) = \frac{1}{4\pi} \log \left| \frac{\omega'(\alpha, \alpha) \omega'^*(\alpha^{-1}, \alpha^{-1})}{\alpha^2 \omega(\alpha, \alpha^{*-1}) \omega^*(\alpha^{-1}, \alpha^*)} \right|.$$

さて、ここで与えられた標準領域での N 点渦の運動方程式から、一般の複素 z 平面内の多重連結領域 D_z における N 個の点渦の方程式を導出する. 今、 N 個の強さ Γ_m の点渦が位置 $\{z_m | m = 1, \dots, N\}$ にあり、同じ多重度を持つ ζ 平面の標準円領域 D_ζ から D_z への等角写像 $z = f(\zeta)$ が与えられたとする. このとき標準円領域のハミルトニアン $H^{(\zeta)}$ から次のような新たなハミルトン関数 $H^{(z)}$ を定義する.

$$H^{(z)}(z_1, z_1^*, \dots, z_N, z_N^*) = H^{(\zeta)}(\zeta_1, \zeta_1^*, \dots, \zeta_N, \zeta_N^*) + \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m^2}{4\pi} \log |f_\zeta(\zeta_m)|.$$

ただし、 $z_m = f(\zeta_m)$ とし f_ζ は f の ζ に関する微分を表す. この $H^{(z)}$ を用いて、多重連結領域 D_z における点渦の方程式が以下のように得られる [23].

$$\Gamma_m \frac{dz_m^*}{dt} = 2i \frac{\partial H^{(z)}}{\partial z_m} = \frac{\Gamma_m}{f_\zeta(\zeta_m)} \left(\frac{d\zeta_m^*}{dt} + \frac{i\Gamma_m f_{\zeta\zeta}(\zeta_m)}{4\pi f_\zeta(\zeta_m)} \right). \quad (9)$$

この式から、標準領域における点渦の定常配置は等角写像で写された先では定常配置にならないなど、点渦力学は等角写像の作用によって等価な力学系にはならない. したがって、標準領域における点渦の運動だけでは一般論は展開できず、我々は与えられた多重連結領域に対して、具体的に等角写像を構成する必要がある.

一般に、与えられた任意の多重連結領域に対して、それを標準円領域に写すような等角写像を解析的に書き下すことは期待できない. また、数値的にこうしたものを構成することもそう簡単ではない. 一方で、与えられた領域がスリット領域である場合は、いくつかの解析的な表現 [7] が知られている. またたとえ解析的な表現ができなくても等角写像を数値的に構成する方法 (数値等角写像) が愛媛大学の天野教授らのグループによって精力的に研究されている [1, 2, 3].

4 一様流中にある平行平板における定常点渦

4.1 渦翼：閉じ込め渦による揚力増加

飛行機の翼の周りに渦をうまく閉じ込めることによって、それに加わる揚力を増加させようというアイデアに基づいて設計された翼を「渦翼」と呼ぶ. デルタ翼は、翼端から発生する巻き上

がり渦層によって揚力を増加させており、この渦翼の実現の一つである [11]. また、Kasper は Kasper 翼 (US patent # 3831885) と呼ばれる翼形状を提案し、渦を翼の中に閉じ込めることによって付加的な揚力が得られるとしている。このアイデアは Walton[28] や Kruppa[14] によって調べられ、そのような渦の閉じ込めは容易でないことが示されているが、一方で Rossow[21] は翼に小さな垂直フラップをとりつけることによって翼の断面に垂直な方向に流れをもつ軸渦を閉じ込めることが可能であることを示している。実際の粘性流体においては、このフラップでたとえ渦が閉じ込められ揚力がアップしたとしても、逆にフラップによって抗力も増加することになる。このような状況に対して、Saffman と Sheffield[22] は一様流中に置かれた一枚平板の上に点渦を固定する数理モデルを提案し、フラップがなくても揚力を増加させる定常点渦があり得ることを指摘した。この数理モデルは様々な方向に拡張 [10, 16] されており、いずれのモデルでもこうした揚力を増加させる点渦（あるいは軸渦）の存在を示唆するものである。

本章では、一様流中に二枚の平行平板を配置し、そこに二つの定常点渦が存在する時、これらの板に加わる力がどのように変化するかを調べる。これは Saffman と Sheffield の研究 [22] の複翼 (double wing) への拡張であるだけでなく、図 1(a) のような縦置きブレードを持つ風力発電機のプロペラの断面のモデルにもなっており、定常渦がブレードの傍に配置されることによって回転方向の力がどう加速されるかを論ずることが可能になる。

4.2 数学的定式化

図 1(a) の回転プロペラを水平平面でカットすると、ちょうど図 1(c) に示すような複素 z 平面内の二重連結外部スリット領域 D_z とみなすことができる。二つのスリットの長さは一般性を失うことなく 1 とでき、さらに実軸に対して ϕ だけ傾いており、またその距離は $2s$ だけ離れているものとする。この領域における点渦の運動を論じるために、我々は前節で与えた標準円領域の点渦力学を利用する。今、図 1(b) のような複素 ζ 平面内に標準二重連結領域である同心円領域 $D_\zeta : \{\rho < |\zeta| < 1\}$ を考え、この標準円領域での流れの複素速度ポテンシャル $W(\zeta)$ を与える。このとき、これらの流れは等角同値であることから D_ζ から D_z への等角写像 $z = g(\zeta)$ をうまく構成することができれば D_z における流れは $W(g^{-1}(z))$ と与えられる。

実際、このような等角写像 $g(\zeta)$ は以下のように解析的に表現することができる。

$$g(\zeta) = A[K(\zeta/\sqrt{\rho}, \rho) - e^{2i\chi} K(\zeta\sqrt{\rho}, \rho) - K(-1, \rho) - e^{2i\chi} K(-\rho, \rho)]. \quad (10)$$

ここに現れる $A \in \mathbb{C}$ や $\chi \in \mathbb{R}$ は二枚の平板の角度 ϕ と距離 s から定まるパラメータである。また関数 K は

$$K(\zeta, \rho) = \frac{\zeta P_\zeta(\zeta, \rho)}{P(\zeta, \rho)}, \quad P(\zeta, \rho) = (1 - \zeta) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \rho^{2k}\zeta)(1 - \rho^{2k}\zeta^{-1})$$

で与えられる楕円関数である。特に楕円関数 $P(\zeta, \rho)$ は標準円領域 D_ζ に付随して定義される Schottky-Klein Prime 関数と等価である。すなわち、以下の関係が成立している。

$$\omega(\zeta, \gamma) = -\frac{\gamma}{C^2} P(\zeta\gamma^{-1}, \rho), \quad C = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}). \quad (11)$$

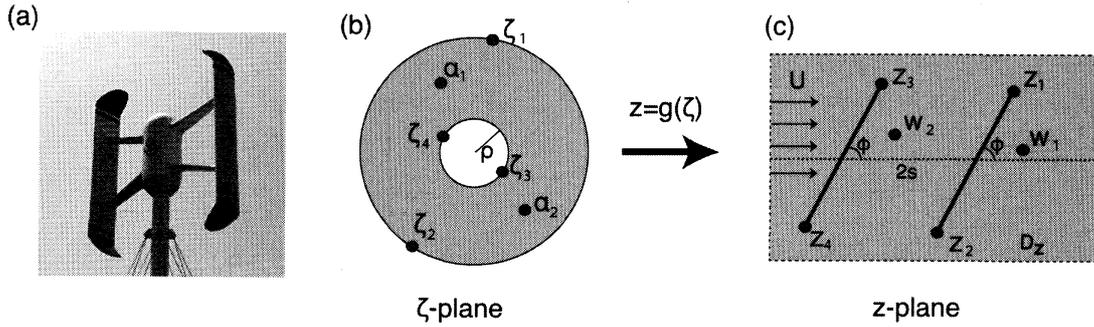


図 1: (a) 縦置き風力発電のモデル. (b) 同心円領域 D_ζ から (c) 平行平板スリット領域 D_z への等角写像

この等角写像により D_ζ 内の二点 $\zeta = \sqrt{\rho}$ と $-\sqrt{\rho}$ は、それぞれ D_z における無限遠点と零点に写像される. パラメータ A は二つの平板がともに長さ 1 かつ、それらの中点を結ぶ線分が実軸に含まれるように選ぶ. χ や ρ については、 D_z において与えられる二つのパラメータ ϕ と s からニュートン法などを用いることによって具体的に計算することができる.

今、時刻 t において、領域 D_ζ の中に強さ κ_1 および κ_2 持つ二つの点渦がそれぞれ位置 $\alpha_1(t)$ と $\alpha_2(t)$ にあるとする. この渦に加えて、等角写像 $g(\zeta)$ によって、 D_z 平面で強さ U の一様流を与える複素速度ポテンシャル $W_U(\zeta)$ および二つのスリット平板の周りにそれぞれ大きさ Γ_1 と Γ_2 の循環を与える複素速度ポテンシャル $W_\Gamma(\zeta)$ とすると、我々が考える D_ζ における複素速度ポテンシャルは $W(\zeta, t) = W_U(\zeta) + W_V(\zeta, t) + W_0(\zeta) + W_\Gamma(\zeta)$ となり、その各項は以下のように与えられる.

$$W_U(\zeta) = UA[K(\zeta/\sqrt{\rho}, \rho) - K(\zeta\sqrt{\rho}, \rho)], \quad (12)$$

$$W_V(\zeta, t) = \kappa_1 G_0(\zeta, \alpha_1(t)) + \kappa_2 G_0(\zeta, \alpha_2(t)), \quad (13)$$

$$W_0(\zeta) = -(\kappa_1 + \kappa_2)G_0(\zeta, \sqrt{\rho}), \quad (14)$$

$$W_\Gamma(\zeta) = \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi} \log R_0(\zeta, \sqrt{\rho}) - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \log \zeta. \quad (15)$$

ただし、

$$G_0(\zeta, \gamma) = -\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{|\gamma| P(\zeta/\gamma, \rho)}{P(\zeta\gamma^*, \rho)} \right), \quad R_0(\zeta, \gamma) = |\gamma|^2 \frac{P(\zeta/\gamma, \rho)}{P(\zeta\gamma^*, \rho)}, \quad \zeta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

である. これらの複素速度ポテンシャルの導出については論文 [5, 6] を見よ. また、 $W_0(\zeta)$ は、 D_ζ における点 $\zeta = \sqrt{\rho}$ に位置を持つ強さ $-\kappa_1 - \kappa_2$ の点渦を表す複素速度ポテンシャルを表しており、この点渦をおくことによって、二点渦の複素速度ポテンシャル W_V の持つ \log の $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ における分枝と W_0 の $\sqrt{\rho}$ における分枝がつながる. その結果、点渦によって生じる \log の分枝は D_ζ の境界をまたがないので、境界での偏角の不連続性は取り除かれ、 W_Γ によって境界まわりに生成される循環の強さを Γ_1 と Γ_2 に調整することができる.

この複素速度ポテンシャル $W(\zeta, t)$ を ζ で複素微分すれば, (4) のように速度場の複素共役が得られる. 点渦の従う運動方程式は, 二つの点渦の相互作用と W_U, W_0, W_Γ により生成される速度場によって構成できる. 多重連結領域の N 点渦によって誘導される共役速度場は二重連結標準円領域 D_ζ に対する (7) および (11) を使って計算できる. すなわち, $\alpha_1(t)$ にある点渦が他の点渦から受ける共役速度 $I_1(t)$ は

$$I_1(t) = -\frac{i\kappa_2}{2\pi\alpha_1(t)} [K(\alpha_1(t)/\alpha_2(t), \rho) - K(\alpha_1(t)\alpha_2^*(t), \rho)] + \frac{i\kappa_1}{2\pi\alpha_1(t)} K(|\alpha_1(t)|^2, \rho) \quad (16)$$

となり, $\alpha_2(t)$ にある点渦が受ける共役速度 $I_2(t)$ は

$$I_2(t) = -\frac{i\kappa_1}{2\pi\alpha_2(t)} [K(\alpha_2(t)/\alpha_1(t), \rho) - K(\alpha_2(t)\alpha_1^*(t), \rho)] + \frac{i\kappa_2}{2\pi\alpha_2(t)} K(|\alpha_2(t)|^2, \rho) \quad (17)$$

である. これらをあわせると $\alpha_m(t)$ の点渦の従う運動方程式は以下で与えられる.

$$\frac{d\alpha_m^*}{dt} = \frac{dW_U}{d\zeta}(\alpha_m(t)) + I_m(t) + \frac{dW_0}{d\zeta}(\alpha_m(t)) + \frac{dW_\Gamma}{d\zeta}(\alpha_m(t)), \quad m = 1, 2.$$

また, 等角写像 $z = g(\zeta)$ の影響を考慮して, 二重スリット領域 D_z の $w_m = g(\alpha_m)$ にある点渦の運動は (9) から, 以下のように書ける.

$$\frac{dw_m^*}{dt} = \frac{1}{g_\zeta(\alpha_m)} \left(\frac{d\alpha_m^*}{dt} + \frac{i\kappa_m g_{\zeta\zeta}(\alpha_m)}{4\pi g_\zeta(\alpha_m)} \right). \quad (18)$$

これより, 点渦が D_z で定常であるという条件は以下のようになる.

$$\frac{dW_U}{d\zeta}(\alpha_m) + I_m + \frac{dW_0}{d\zeta}(\alpha_m) + \frac{dW_\Gamma}{d\zeta}(\alpha_m) + \frac{i\kappa_m g_{\zeta\zeta}(\alpha_m)}{4\pi g_\zeta(\alpha_m)} = 0, \quad m = 1, 2. \quad (19)$$

さらに, 我々は等角写像によって円がスリットに移ることから, スリットの端点で写像が特異になるので, その特異性を取り除くため, この端点におけるクッタ条件を考える. 今, D_ζ の境界上にある ζ_m は等角写像によって D_z 平面における平板の端点 z_m に移る, すなわち $z_m = g(\zeta_m)$ とする. (図 1(b) および (c) を見よ) この時, 点 $\zeta = \zeta_m$ におけるクッタ条件は以下で与えられる.

$$\text{Im} \left(\frac{dW}{d\zeta}(\zeta_m) \right) = \text{Im} \left(\frac{dW_U}{d\zeta}(\zeta_m) + \frac{dW_V}{d\zeta}(\zeta_m) + \frac{dW_0}{d\zeta}(\zeta_m) + \frac{dW_\Gamma}{d\zeta}(\zeta_m) \right) = 0. \quad (20)$$

我々の今考えている問題における未知実数は点渦の位置 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, それらの強さ κ_1, κ_2 , 平板周りの循環 Γ_1, Γ_2 の 8 つである. また, 点渦の定常条件 (19) は四つの実方程式を与えているので, クッタ条件 (20) はすべての端点 $\zeta_m, m = 1, \dots, 4$ で考えることができる. しかし, 実はすべての端点にクッタ条件をつけた場合, 解が存在しないことが Saffman と Sheffield [22] による一枚平板の場合と同様にわかる. そこで, ここでは, 四つのうち三つの端点 $\zeta_m, m = 1, 2, 3$ だけにクッタ条件を課して, その時の二点渦定常配置を求めることにする. 実際の数値計算では, この端点の選び方は 4 通りあり, 今回選んだ三点に特別な意味があるわけではないことに注意する. また, 我々は 8 つの未知数に対して 7 つの実方程式しか考えないので, 定常配置は一次元の族 (locus) をなすので, 以下ではこの解の族を探す数値手法について考える.

4.3 数値解法

前節で得られた点渦の方程式 (19) と (20) は非線形の方程式なので、ニュートン法などを用いることで解くことができそうだが、一方で我々は非線形方程式の局所一意解ではなく解の族を探さねばならず、その意味ではニュートン法がうまく機能しない可能性がある。そこで、我々は *Brownian ratchet scheme* と呼ばれる線形代数的アプローチでこれらの方程式の解を求める。そのアイデアを説明するために我々が解くべき方程式 (19) と (20) を具体的に書きかだしてみよう。

$$\begin{aligned} & \frac{UA}{\sqrt{\rho}} [K_{\zeta}(\alpha_1/\sqrt{\rho}, \rho) - \rho K_{\zeta}(\alpha_1\sqrt{\rho}, \rho)] + \frac{i(\kappa_1 + \kappa_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi\alpha_1} [K(\alpha_1/\sqrt{\rho}, \rho) - K(\alpha_1\sqrt{\rho}, \rho)] \\ & - \frac{i\Gamma_2}{2\pi\alpha_1} - \frac{i\kappa_2}{2\pi\alpha_1} [K(\alpha_1/\alpha_2, \rho) - K(\alpha_1\alpha_2^*, \rho)] + \frac{i\kappa_1}{2\pi\alpha_1} K(|\alpha_1|^2, \rho) + \frac{i\kappa_1 g_{\zeta\zeta}(\alpha_1)}{4\pi g_{\zeta}(\alpha_1)} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{UA}{\sqrt{\rho}} [K_{\zeta}(\alpha_2/\sqrt{\rho}, \rho) - \rho K_{\zeta}(\alpha_2\sqrt{\rho}, \rho)] + \frac{i(\kappa_1 + \kappa_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi\alpha_2} [K(\alpha_2/\sqrt{\rho}, \rho) - K(\alpha_2\sqrt{\rho}, \rho)] \\ & - \frac{i\Gamma_2}{2\pi\alpha_2} - \frac{i\kappa_1}{2\pi\alpha_2} [K(\alpha_2/\alpha_1, \rho) - K(\alpha_2\alpha_1^*, \rho)] + \frac{i\kappa_2}{2\pi\alpha_2} K(|\alpha_2|^2, \rho) + \frac{i\kappa_2 g_{\zeta\zeta}(\alpha_2)}{4\pi g_{\zeta}(\alpha_2)} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left(\frac{UA}{\sqrt{\rho}} [K_{\zeta}(\zeta_1/\sqrt{\rho}, \rho) - \rho K_{\zeta}(\zeta_1\sqrt{\rho}, \rho)] - \frac{i}{2\pi\zeta_1} \sum_{\lambda=1}^2 \kappa_{\lambda} [K(\zeta_1/\alpha_{\lambda}, \rho) - K(\zeta_1\alpha_{\lambda}^*, \rho)] \right. \\ & \left. + \frac{i(\kappa_1 + \kappa_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi\zeta_1} [K(\zeta_1/\sqrt{\rho}, \rho) - K(\zeta_1\sqrt{\rho}, \rho)] - \frac{i\Gamma_2}{2\pi\zeta_1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left(\frac{UA}{\sqrt{\rho}} [K_{\zeta}(\zeta_2/\sqrt{\rho}, \rho) - \rho K_{\zeta}(\zeta_2\sqrt{\rho}, \rho)] - \frac{i}{2\pi\zeta_2} \sum_{\lambda=1}^2 \kappa_{\lambda} [K(\zeta_2/\alpha_{\lambda}, \rho) - K(\zeta_2\alpha_{\lambda}^*, \rho)] \right. \\ & \left. + \frac{i(\kappa_1 + \kappa_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi\zeta_2} [K(\zeta_2/\sqrt{\rho}, \rho) - K(\zeta_2\sqrt{\rho}, \rho)] - \frac{i\Gamma_2}{2\pi\zeta_2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left(\frac{UA}{\sqrt{\rho}} [K_{\zeta}(\zeta_3/\sqrt{\rho}, \rho) - \rho K_{\zeta}(\zeta_3\sqrt{\rho}, \rho)] - \frac{i}{2\pi\zeta_3} \sum_{\lambda=1}^2 \kappa_{\lambda} [K(\zeta_3/\alpha_{\lambda}, \rho) - K(\zeta_3\alpha_{\lambda}^*, \rho)] \right. \\ & \left. + \frac{i(\kappa_1 + \kappa_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi\zeta_3} [K(\zeta_3/\sqrt{\rho}, \rho) - K(\zeta_3\sqrt{\rho}, \rho)] - \frac{i\Gamma_2}{2\pi\zeta_3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

今、二点渦の位置 α_1 と α_2 があらかじめ与えられたとしよう。そうするとこれらの方程式は 7×5 行列 \mathcal{A} および $\boldsymbol{x} = (U, \kappa_1, \kappa_2, \Gamma_1, \Gamma_2)^T$ に対する線形方程式 $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ と見なすことができる。行列 \mathcal{A} の各成分は紙面の制限ですべてを具体的に書き下さないが、方程式 (21)–(25) から二点渦の位置さえ与えられれば、その各成分は計算可能なので、この \mathcal{A} を α_1 と α_2 に対する配置行列と呼ぶことにする。

さて、二点渦の位置を任意に与えた場合、それに対応する配置行列 \mathcal{A} がランク落ちすることは一般にないが、もし何らかのうまい方法で \mathcal{A} が $\det(\mathcal{A}^T \mathcal{A}) = 0$ となるような配置を見つけることができれば、この行列はランク落ちして非自明な零空間を持ち、それが解 \boldsymbol{x} のなす線形空間になっている。このような零空間の基底は \mathcal{A} の特異値分解 [27] によって求めることができ

る。すなわち、与えられた行列 A に対して、以下の分解が成立する。

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad A^T u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

ここで $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_5 \geq 0$ は行列 A の特異値と呼び、 u_i と v_i はそれぞれ特異値 σ_i に対応する左特異ベクトル、右特異ベクトルという。我々の Brownian ratchet scheme では、二つの点渦をランダムウォークさせることによって、それに対応する配置行列が非自明な一次元の零空間を持つ、すなわち、その特異値が $\sigma_4 \neq 0$ および $\sigma_5 = 0$ となるような配置を探すことにする。これがうまくいけば、 σ_5 の零特異値に対応する右側特異ベクトル v_5 は線形方程式 $Ax = 0$ の解空間の基底を与える。すなわち $x \in \text{Span}\langle v_5 \rangle$ となるが、ここでは x の第一成分を $U = 1$ に正規化することで一意解を得る。実際に一様流の強さは予め与えられる定数なので、この正規化は自然なものである。

ランダムウォークによって、最小特異値 σ_5 が 0 になるような配置を見つける Brownian ratchet scheme は以下のようなアルゴリズムである。

ステップ 1 (初期化) 点渦の初期推定位置 α_1 と α_2 を適当に与えて、それに対応する配置行列の最小特異値 σ_5 を計算して、それを $\sigma_{min} = \sigma_5$ とおく。

ステップ 2 以下のステップを σ_{min} が 1.0×10^{-13} 以下になるまで計算を続ける。

- 二つの点渦を分散 σ_{min} を持つ正規分布に従ってランダムウォークさせ、新しい点渦の位置 $\tilde{\alpha}_1$ と $\tilde{\alpha}_2$ を得る
- 点渦の配置 $\tilde{\alpha}_1$ と $\tilde{\alpha}_2$ に対する配置行列の最小特異値 $\tilde{\sigma}_5$ を計算する。
- もし $\tilde{\sigma}_5 \leq \sigma_{min}$ なら、新しい配置の方がより小さな最小特異値を与えるので点渦の位置を $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1$ と $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$ と更新し、 $\sigma_{min} = \tilde{\sigma}_5$ とする。そうでない場合はこのランダムウォークで得られる試行を破棄する。

ステップ 3 上のステップ 2 が終了すれば、最終的に得られる点渦配置 α_1 と α_2 に対応する配置行列の最小特異値が 1.0×10^{-13} 以下となるため、これが数値計算の精度の範囲で求められる点渦定常配置である。この特異値に対応する右側特異ベクトルを $U = 1$ と正規化すれば、そのベクトルの残りの各成分が点渦の強さ κ_1, κ_2 および平板周りの循環の強さ Γ_1, Γ_2 に対応する。

このアルゴリズムは、初期推定位置をうまく選べば非常に早く収束することが知られている [19]。今回の数値計算では、各平板のエッジの近傍に適当に格子点を入れ、その中から最小特異値がもっとも小さくなるようなものをステップ 1 の初期推定位置に選ぶ。詳しい選び方については論文 [26] を参考のこと。

4.4 平行平板に働く力 (a rigid rod model)

二重連結標準円領域 D_ζ の境界をそれぞれ $C_0 : |\zeta| = 1$ および $C_1 : |\zeta| = \rho$ とすると、その境界の等角写像 $g(\zeta)$ による D_z への像である平行平板 $g(C_0)$ と $g(C_1)$ に加わる力はブラシウスの

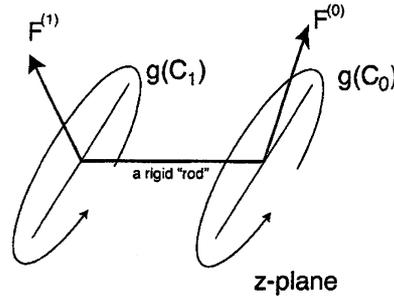


図 2: 二枚の平板に働く力を計算するための rigid rod モデル

公式から計算することができる。すなわち、 m 番目 ($m = 0, 1$) の平板に加わる力 $(F_x^{(m)}, F_y^{(m)})$ は以下のように与えられる。

$$F_x^{(m)} - iF_y^{(m)} = \frac{i}{2} \int_{C_m} \left(\frac{dW}{d\zeta}(\zeta) \right)^2 \left(\frac{d\zeta}{dz} \right) d\zeta = \frac{i}{2} \int_{C_m} \left(\frac{dW}{d\zeta}(\zeta) \right)^2 \frac{d\zeta}{g_\zeta(\zeta)}.$$

なお、線積分について C_0 の向きは時計回り、 C_1 の向きは反時計回りに取るものとする。ここで得られた力から二枚の平行平板に働く力を考えるため、図 2 のような “rigid rod” モデルを採用する。すなわち、二枚の平板中心が目に見えない棒 (rigid rod) によって結ばれ、また各平板に加わる力はその中心にのみ掛かっているとすると、rigid rod に関するモーメントモデルとなる。また、我々は二重翼 (double wing) や縦型風力発電への応用を考えるので、各力 $F^{(m)}$ の大きさを x 方向と y 方向に分解して、以下の二つの力を考える。

- $F_L = F_y^{(0)} + F_y^{(1)}$ は y 方向への力を表す。 $F_L > 0$ なら上昇力、 $F_L < 0$ なら下降力となる。
- $F_R = F_y^{(0)} - F_y^{(1)}$ はロッドの回転方向の力を表す。 $F_R > 0$ なら反時計回り、 $F_R < 0$ なら時計回りの回転力となる。

さて、この研究の目的は Brownian ratchet scheme によって得られた定常点渦により平板に働く力がどのように変化するかを調べることなので、得られた定常配置に対応する平板周りの循環の強さ Γ_1 と Γ_2 を一定にしたまま、点渦がある場合の揚力 $F_L^{(v)}$ 、回転力 $F_R^{(v)}$ と点渦がない場合の力 $F_L^{(o)}$ 、 $F_R^{(o)}$ の二つを計算し、それらの差 $\Delta F_L = F_L^{(v)} - F_L^{(o)}$ と $\Delta F_R = F_R^{(v)} - F_R^{(o)}$ を観察して点渦の存在による力の変化を調べる。

4.5 点渦定常配置の例

二枚の平板の距離が $s = 0.6$ 、傾き角度が $\phi = 0.8$ の場合の定常点渦配置を図 3(a) に示す。二つの点渦定常解はそれぞれ二つの一次元 loci を構成している。右側の locus は右側の平板の trailing edge につながっており、左側の locus は二つの平板の間、左側の平板の後ろ側に存在している。これらの loci の構造を詳しく見るために、左側と右側の locus をそれぞれ図 3(c) と

(d) に示す. 各 locus の端点には \circ と \square の記号をそれぞれ示しているが, この同じ記号に対応する点が二点渦の定常解のペアを与えており, \circ が示す二点定常点渦のペアと \square の示すペアが各 locus の上を連続的に移動していくことを意味している, また, これらの図から Brownian ratchet scheme によって得られた点渦の集合は各 locus の上で非均一に分布していることもわかるが, これはこの数値スキームがランダムウォークにより定常配置を見つける方法であることを反映したものである. そこで, 我々は locus 内の点渦を正しい順序で整理させるため, 右側の locus 内の点渦に対して, その trailing edge からの弧長によってパラメトライズする. これにより, 右側の点渦に対応する左側 locus にあるペア点渦の位置, さらに定常配置に対応して求まる点渦の強さや平板周りの循環の大きさも同様にパラメトライズできる.

図 3(b) には, この定常二点渦配置に対応する点渦の強さ κ_1, κ_2 および平板周りの循環の強さ Γ_1, Γ_2 をプロットしている. 右の点渦は右側の locus が trailing edge につながっていることから, その強さ κ_1 は 0 から始まり, 点渦が locus にそって edge から離れるにつれて単調増加する. これにあわせて右側平板の周りの循環の大きさは Γ_1 は単調減少して負になる. 一方で左側の点渦の強さ κ_2 および左平板周りの循環 Γ_2 はともに正であるが, 図 3(c) に示す locus がちょうど折り曲げられている所に渦がある時に強さは最小, 循環は最大になっている. これらのデータを使って平板周りに加わる力 $F_L^{(v)}, F_L^{(o)}, \Delta F_L$ および $F_R^{(v)}, F_R^{(o)}, \Delta F_R$ を計算したものをそれぞれ図 3(e) と (f) に示している. それによると, $F_L^{(v)} < F_L^{(o)} < 0, F_R^{(v)} > F_R^{(o)} > 0$ なので, すべての図 3(a) に示したすべて点渦定常配置に対して $\Delta F_L < 0, \Delta F_R > 0$ である. したがって, 点渦が存在することによって, 下降流方向の力と反時計回りの方向の力が加速されることがわかる.

5 まとめ

本稿では, 多重連結領域における二次元非粘性・非圧縮流体に対する点渦力学の構成方法について解説し, その応用例を一つ示した. 標準円領域に対する点渦方程式は陽的に与えられ, さらにターゲットとなる一般の多重連結領域に対する点渦方程式は, これらの領域間の等角写像を構成することによって得られる. 一般に与えられた多重連結領域から標準円領域への等角写像を構成することは解析的にも数値的にも難しいが, 与えられた領域がスリットで構成されるような多重連結領域の場合は, 数値等角写像の技法などを組み合わせることで, このプログラムを実行することができる. また, ここで得られた数理モデルによる研究は実際の流れからみればもちろん非常にシンプルなものであるが, その数学定式化のおかげで, その数学解析や数値解析を深く掘り進めることが可能になり, その結果として様々な定量的な情報が得られる. この結果をもとにして, 実際に粘性の効果を入れたり三次元モデルへと拡張したりしてそれを大規模数値計算によって確かめることができれば, 現実の問題に対する一つの指針を与えてくれると期待できる.

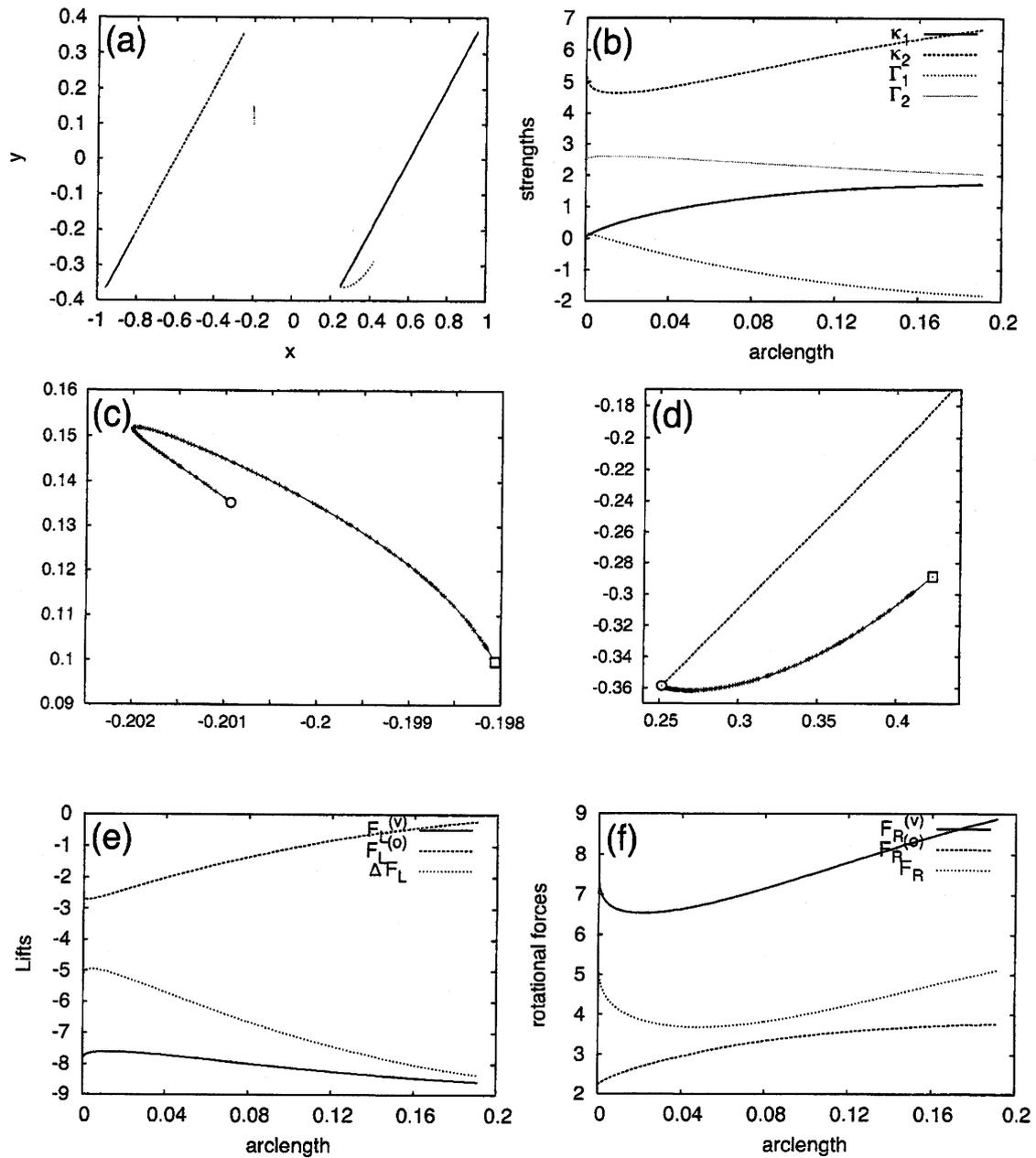


図 3: (a) 平行平板の距離 $s = 0.6$ よび角度 $\phi = 0.8$ に対する二点渦定常配置の族 (loci). (b) それに対応して得られる点渦の強さと平板周りの循環の様子. (c) 左側 locus の拡大図. (d) 右側 locus の拡大図. (e) 上下方向の力 $F_L^{(v)}$, $F_L^{(o)}$ とその差 ΔF_L の様子. (f) 回転方向の力 $F_R^{(v)}$, $F_R^{(o)}$ およびその差 ΔF_R の様子.

参考文献

- [1] K. Amano, *A charge simulation method or the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains*, *J. Comp. Appl. Math.* **53** (1994), 353–370.
- [2] K. Amano, *A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains*, *SIAM J. Sci. Comput.* **19** (4) (1998), 1169–1187.
- [3] K. Amano, D. Okano, H. Ogata and M. Sugihara, *Numerical conformal mappings onto the linear slit domain* (2010) preprint.
- [4] H. Baker, *Abelian functions*, 1995, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [5] D. Crowdy and J. Marshall, *Analytical formulae for the Kirchhoff-Routh path function in multiply connected domains*, *Proc. Roy. Soc. A*, **461** (2005), 2477–2501.
- [6] D. Crowdy, *Calculating the lift on a finite stack of cylindrical aerofoils*, *Proc. Roy. Soc. A* **462** 1387–1407 (2006)
- [7] D. G. Crowdy and J. S. Marshall, *Conformal mappings between canonical multiply connected domains*, *Comput. Methods Funct. Theory*, **6** (1) 59–76 (2006)
- [8] D. G. Crowdy and J. S. Marshall, *Computing the Schottky-Klein Prime function on the Schottky double of planar domains*, *Comput. Methods Funct. Theory* **7** 293–308 (2007)
- [9] M. Flucher and B. Gustafsson, *Vortex motion in two dimensional hydrodynamics*, TRIATA-MAT-1997-MA 02, Stockholm, Royal Institute of Technology.
- [10] M.-K. Huang and C.-Y. Chow, *Trapping of a free vortex by Joukowski airfoils*, AIAA paper 82-4059 (1981)
- [11] D. Hummel, *On the vortex formation over a slender wing at large angles of incidence*, AGARD CP-247, paper # 15 (1978).
- [12] 今井 功, *等角写像とその応用*, 岩波書店 (1979).
- [13] M. Katsurada and H. Okamoto, *The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem*, *Computers Math. Applic.* **31**(1) (1995), 123–137.
- [14] E. W. Kruppa, *A wind tunnel investigation of the Kasper vortex concept*, AIAA paper, 77-310, Jan. (1977)
- [15] C. C. Lin, *On the motion of vortices in two dimensions. II. Some further investigations on the Kirchhoff-Routh function*, *Proc. Natl Acad. Sci.* **27** (1941), 575–577.

- [16] N.J. Mourtos and M. Brooks, Flow past a flat plate with a vortex/sink combination, *J. Appl. Mech.*, **63** 543–550 (1996)
- [17] Z. Nehari, *Conformal mapping*, New York, McGraw-Hill (1952).
- [18] P. K. Newton, *The N -vortex problem, Analytical techniques*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [19] P. K. Newton and G. Chamoun, Construction of point vortex equilibria via Brownian ratchets, *Proc. Roy. Soc. A*, **463** 1525–1540 (2007)
- [20] S. Murashima, *Charge simulation method and its application*, Morikita, Tokyo 1983 (in Japanese).
- [21] V.G. Rossow, Lift enhancement by an externally trapped vortex, AIAA paper 77-672, June (1977)
- [22] P. G. Saffman and J. S. Sheffield, Flow over a wing with an attached free vortex, *Stud. Appl. Math.*, **57** 107–117 (1977)
- [23] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge, 1992.
- [24] T. Sakajo, *Equation of motion for point vortices in multiply connected domains*, *Proc. Roy. Soc. A*, **465** (2009), 2589–2611.
- [25] T. Sakajo and Y. Amaya, *Numerical construction of potential flows in multiply connected channel domains*, *Computational Methods and Function Theory* (2010) submitted.
- [26] T. Sakajo, *Force-enhancing vortex equilibria for two parallel plates in uniform flow*, *Proc. Roy. Soc. A*, (2011) submitted.
- [27] L. N. Trefththen and D. Bau III, *Numerical linear algebra*, Philadelphia, PA, SIAM Publishing (1997)
- [28] D. Walton, A brief wind tunnel test of the Kasper aerofoil, *Soaring*, **38** No.11 26–27 (1974)