数理解析研究所講究録
第1776巻 2012年 100-114

3次元エアリード楽器の流体音源と発振特性

九州工業大学大学院 情報工学研究院 高橋公也 (Kin'ya Takahashi)*
九州工業大学大学院 情報システム専攻 宮本真孝 (Masataka Miyamoto),
伊藤泰典 (Yasunori Ito), 岩崎拓也 (Takuya Iwasaki)*
九州大学 情報基盤研究開発センター 高見利也 (Toshiya Takami), 小林泰三 (Taizo Kobayashi),
西田晃 (Akira Nishida), 青柳睦 (Mutsumi Aoyagi)**

* Physics Laboratories, Kyushu Institute of Technology
** Research Institute for Information Technology, Kyushu University

1 はじめに

この論文では，エアリード楽器の２次元及び３次元モデルの数値解析について報告する．エアリード楽器は，エッジトーンと呼ばれる流体音（空力音）によって駆動される管楽器で，リコーダー，フルート，パイプオルガン等がある [1, 2, 3, 4]．エアリード楽器の管体内部の音圧は，共鳴のために 140dB(~100Pa) を越え，音源となるジェットに作用し同期状態を作り出す．したがって，エアリード楽器の問題は，流体音とキャビティーの相互作用の問題として極めて興味深い [1, 2, 3, 4].

近年，我々は，圧縮性 Large Eddy Simulation(LES) を用いて２次元小型エアリード楽器の発振の再現に成功し，楽器を特徴付ける基本的な発振特性の再現が可能であることを示した [5, 6, 7]. しかし，実験との比較により，再現されていない部分も明らかになった．そこで，この論文では，２次元と３次元モデルの計算を行い，それらの発振状態を比較検討し，３次元モデルによって再現されるエアリード楽器の性質を明らかにする．さらに，Lighthill の音源と Howe の音源を数値的に再現し [3, 4, 8]，それらの音源が流体の流れのどの部分で発生し，それらの分布がどのような特徴を持つかを明らかにする．

2 Lighthill の音響的類推と Howe の渦音理論

乱流から発生する音は，一般に空力音または流体音と呼ばれる．それらは，高い Reynolds 数を持つ流体運動の極めて小さな副産物である．流体音源の定式化は，Lighthill によって行われた [8]. Lighthill は，流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式と連続の式を組み合わせ，厳密な計算のもとで，音波に対する以下の様な非同次方程式を導いた．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2\nabla^2\right)(\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1}$$

左辺の同次項は密度 $\rho(\rho_0$：平衡状態の値) に対する音波の方程式なので，右辺の非同次項が音源項と解釈される．ここで，c_0 は（静止媒質中の）音速で，T_{ij} は Lighthill のテンソルと呼ばれ以下のように定義される．

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + ((p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0))\delta_{ij} + \sigma_{ij} \tag{2}$$

ここで，σ_{ij} は粘性応力テンソルである．(1) 式の右辺の非同次項は２階の偏微分で表せるので，流体音源は４重極的に振る舞うと予想される．音源から発生した音波は，流れがある場合にもあた

かも静止流体中を伝搬する音波のように振る舞う．そのために，Lighthill の音響的類推と呼ばれることが多い．

Reynolds 数が大きい場合には σ_{ij} の効果を無視することが可能である．さらに，線形断熱近似

$$(p-p_0)-c_0^2(\rho-\rho_0)=0 \tag{3}$$

が，成り立つとすると，(2) 式の第2項，第3項は無視でき，第1項 $\rho v_i v_j$ が主な音源を作り出す．一般に，音の粒子速度は流れのそれに比べ十分に小さいので，音源項の計算は，非圧縮性を仮定した計算で良い近似が得られる．そこで，$\rho=\rho_0$，$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$ として，音源項を近似すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &\sim \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}\\ &= \rho_0(s_{ij}^2-w_{ij}^2)\\ &= \rho_0 \mathrm{div}(\omega\times\mathbf{v})+\rho_0\nabla^2\left(\frac{1}{2}v^2\right)\end{aligned} \tag{4}$$

となる．ここで，s_{ij} と w_{ij} は対称テンソルと非対称テンソルで，以下のように定義される．

$$s_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{5}$$

$$w_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{6}$$

Lighthill の音響的類推の物理的な意味は，多くの研究者によって考えられてきた [3, 4, 9, 10, 11]. Powell は Lighthill の音源項を (4) 式の最右辺のように書き直し，渦の音源としての効果について議論した [10]. Howe は Powell の議論を発展させ，Lighthill の理論を全エンタルピー（よどみ点エンタルピー）B を用いた形式に書き直した [3, 4]. ここで，全エンタルピー B は，

$$B\equiv\int dh+\frac{1}{2}v^2 \tag{7}$$

のように定義され，h は通常の熱力学的エンタルピーである．

$$dh=\rho^{-1}dp+TdS \tag{8}$$

等エントロピー流では，B は以下のように近似できる．

$$B\sim\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2 \tag{9}$$

したがって，粘性による散逸が無視できるとすると，B の揺らぎは，圧縮性による Bernoulli の定理の破れと解釈できる．そこで，Howe は B こそが音波の真の表現であると考え，B の時間発展を記述する非線形波動方程式を導いた．粘性を無視した場合の Howe の方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\nabla-\nabla^2\right\}B=\mathrm{div}\{\omega\times\mathbf{v}-T\mathrm{grad}S\}\\ &\quad-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\{\omega\times\mathbf{v}-T\mathrm{grad}S\}+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{c^2}T\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，定圧比熱 c_p は $c_p=T(\frac{\partial S}{\partial T})_p$，音速 c は $\frac{1}{c^2}=(\frac{\partial\rho}{\partial p})_S$ と定義される．

等エントロピーで低Mach数であるが，高Reynolds数の流れでは，(10)式は以下のように近似される．

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)B\sim \mathrm{div}(\omega\times \mathbf{v}) \tag{11}$$

この式の右辺は，全エンタルピー波の波源と解釈できる．これをPowell-Howeの渦音源と言う．(4)式の最右辺と比較すると，渦音源は，Lighthillの音源から $\nabla^2(\frac{1}{2}v^2)$ を取り去ったものである事が分かる．しかし，全エンタルピーの定義(7)と簡単な考察により，$\nabla^2(\frac{1}{2}v^2)$ の効果は全エンタルピーの波動運動に取り込まれていることがわかる[12, 13]．

3　2次元および3次元フランジパイプの開口端反射の理論計算

4章，5章では，2次元および3次元のエアリード楽器の数値解析を行い比較検討する．この章ではその準備として，2次元フランジパイプの放射インピーダンスの理論計算を，3次元の理論計算と同様の方法で行い[5, 6, 14]，それをもとに2次元と3次元の開口端反射の特性を比較検討する．

2次元の点音源(強度 Q)から放射される2次元球面波は，

$$p(r)=\rho_0 c\frac{Qk}{2}H_0^{(2)}(kr)\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{12}$$

となる．ここで，$H_0^{(2)}$ は0次の第2種Hankel関数である．開口断面上に一様に分布する点音源から Huygens-Fresnel の原理によって球面波が放射されると仮定すると，2次元フランジパイプの放射インピーダンス $Z_R^{2D}(\omega)(=R_{2D}(\omega)+iX_{2D}(\omega))$ が以下のように求まる．

$$\begin{aligned} Z_R^{2D}(\omega) &= Z_0^{2D}\frac{k}{a}\int_0^a dr'\int_0^{2r'}drH_0^{(2)}(kr) \\ &= Z_0^{2D}\frac{\pi k}{a}\int_0^a dr'r'\Big(\mathbf{H}_0(2kr')H_1^{(2)}(2kr')+\mathbf{H}_{-1}(2kr')H_0^{(2)}(2kr')\Big) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで，パイプの幅は $h=2a$，角振動数は $\omega=ck$，2次元パイプの特性インピーダンスは $Z_0^{2D}=\rho_0 c/2a$ で与えられ，$\mathbf{H_n}$ は n 次の Struve 関数である．低周波数および高周波数領域で，$Z_R^{2D}(\omega)$ は，以下のように近似される．

$$\lim_{\omega\to 0} Z_R^{2D}(\omega)\sim -\frac{i}{\pi}2Z_0^{2D}ka\Big(\log(ka)-\frac{1}{2}\Big)\to 0 \tag{14}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} Z_R^{2D}(\omega)\to Z_0^{2D}+O(1/\omega) \tag{15}$$

3次元のフランジパイプの放射インピーダンス $Z_R^{3D}(\omega)(=R_{3D}(\omega)+iX_{3D}(\omega))$ は以下のように与えられる[1, 14]．

$$Z_R^{3D}(\omega)=Z_0^{3D}(1-J_1(ka)/ka+i\mathbf{H}_1(2ka)/ka) \tag{16}$$

ここで，J_1 は1次のBessel関数で，$Z_0^{3D}=\rho_0 c/(\pi a^2)$ は半径 a のパイプの特性インピーダンスである．この式は，$\omega\to 0$ の極限で，以下のように近似される．

$$\lim_{\omega\to 0} Z_R^{3D}(\omega)\sim Z_0^{3D}\Big(\frac{(ka)^2}{2}+i\frac{8ka}{3\pi}\Big)\to 0 \tag{17}$$

また，$\omega\to\infty$ の極限では，Z_R^{3D} は Z_0^{3D} に収束する．

図1(a)に，２次元と３次元の放射インピーダンスの実部と虚部を ka の関数として示す．比較を容易にするために，２次元と３次元の特性インピーダンス Z_0^{2D}，Z_0^{3D} を用いて規格化している．$ka \to 0$ で，２次元インピーダンスの虚部 X_{2D} は $\propto ka \log ka$ で減少するのに対し，３次元インピーダンスの虚部 X_{3D} は $\propto ka$ で減少する．したがって，低周波数領域で，３次元パイプに比べ，２次元パイプからより多くの音波が放射される．逆に言えば，２次元の反射率は，３次元のそれに比べて小さくなる．

反射率は以下のように定義される．

$$R(\omega) = \left| \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \right|^2. \quad (18)$$

図1(b)に，次章で導入する楽器の歌口開口部に合わせ $a = 2.5$mm とした時の２次元と３次元の反射率を周波数の関数として示す．３次元の反射率は，ほぼ千 Hz 以上で減衰が始まるのに対し，２次元の反射率は，ほぼ百 Hz から減衰が始まる．その結果，高周波数領域では，２次元パイプは３次元パイプに比べ管体内部に強い共鳴音圧を作り出せないと予想される．しかし，２次元の反射率は 1000Hz で約 85%あるので，通常の管楽器の音域では共鳴状態を作り出すことは可能であると期待される．紙面の都合上結果を示さないが，圧縮性 LES を用いたフランジパイプの反射率の数値計算は，理論的な解析と良い一致を示す [5, 6]．

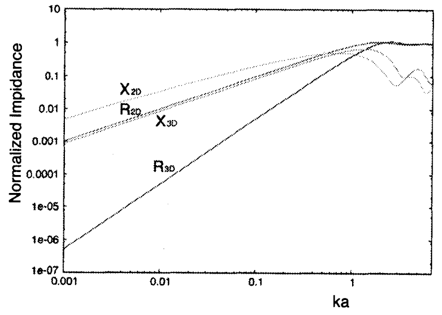
フランジパイプの端補正は，以下のように定義される．

$$\Delta L(\omega) = \frac{1}{2k} \arg \left(-\sqrt{R} \frac{Z_R + Z_0}{Z_R - Z_0} \right) \quad (19)$$

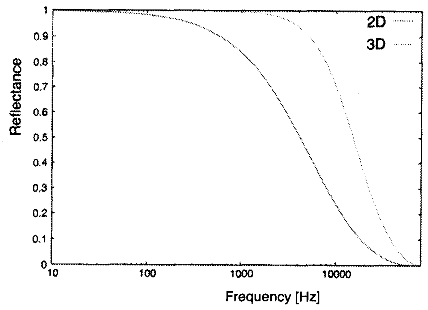
(14)，(18) 式より，２次元の端補正は，低周波数領域で以下のように近似される．

$$\Delta L^{2D}(\omega) \sim \frac{a}{\pi}(3 - 2\gamma - 2\log ak) \quad (20)$$

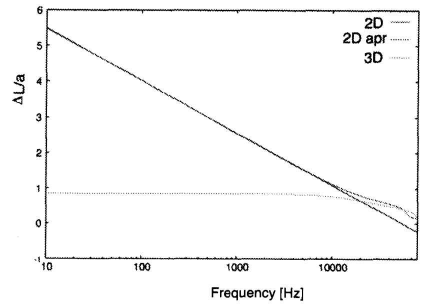
ここで，γ は，Euler 定数である．２次元の端補正は，$\omega \to 0$ の極限で対数的に発散するのに対し，３次元端補正は，低周波数領域でほぼ一定値 $\Delta L^{3D}(\omega) \sim \frac{8a}{3\pi}$ になる．Fig.1(c) に，(19) 式を用いて計算した２次元，３次元端補正と (20) 式で与えられる２次元端補正近似を示す．近似式 (20) が，10000Hz 以下で良い近似を与えるのがわかる．ΔL^{2D} と ΔL^{3D} は，音楽の表現に重要な周波数帯で食い違い，その違いは低周波数に行くほど大きくなる．1000Hz で $\Delta L^{2D} \sim 2.5a$ となるので，次章で導入する長さ 90mm，歌口の半径 $a = 2.5$mm の２次元小型エアリード楽器モデル (図2) では，実効管体長が 96.3mm で，基音の共鳴周波数は 903Hz となる．一方，10mm の厚みを加えた３次元モデルでは，歌口の開口面積が $5 \times 10\text{mm}^2$ なので実効半径が $a \sim 4.0$mm となる．したがって，端補正 $\Delta L^{3D} \sim 0.85a$ を用いると，実効管体長は 93.4mm と評価され，基音の周波数は 931[Hz] となる．



(a) 特性インピーダンスで規格化した放射インピーダンスの実部と虚部．$R_{2D,3D}$ と $X_{2D,3D}$ は，実部と虚部を示す．



(b) 反射率 ($a = 2.5$mm.)



(c) 半径 a で規格化した端補正 $\Delta L(a = 2.5\text{mm})$．'2D apr' は，近似式 (20) の結果をあらわす．

図 1: ２次元と３次元開口端反射の比較

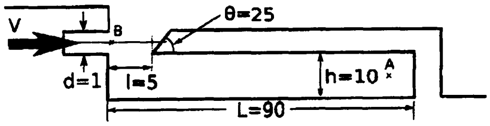


図 2: 2次元エアリード楽器モデル．長さの単位：mm，角度の単位：度．

4　2次元および3次元エアリード楽器のモデル

この章では，数値解析に用いた2次元及び3次元のエアリード楽器モデルの紹介を行う．図2に，2次元モデルの形状を示す．このモデルは，文献 [7] で取り扱ったモデルと同じで，長さが90mm の小型のエアリード楽器である．形状の詳細な寸法は，図に示す通りである．図には示さないが，解析に用いたメッシュは，水平方向に 450mm，垂直方向に 200mm の大きさを持ち，主に楽器の右上方に十分な空間を取るように設計されている．上，右，左の壁は透過壁で，その他の壁は固定壁である．3次元モデルは，2次元モデルに 10mm の厚みをもたせ，2枚の平行な固定壁で挟み込んだものである．

解析には，圧縮性 LES のソルバーを用いた [15]．具体的には，世界的に定評のあるフリーのソフトウェアー OpenFOAM の亜音速圧縮性 LES ソルバー rhoPisoFoam を用いた [16]．サブグリッドモデル (SGS モデル) は，デフォルトで準備されている One-equation-eddy 法を用い [17, 18, 19]，時間発展には2次の後退差分を用いた．透過壁の処理は，Poinsot-Lele 法で行われる [20]．

大気圧を $p_0 = 100$kPa，温度を $T_0 = 300$K とし，位相速度の速い音波の再現のために，時間刻みを $\Delta t = 10^{-7}$sec と十分小さく取った．2次元モデルでは，0.1sec までの計算を行い，ジェットの流速 V は，$(2 \leq V \leq 40\text{m/s})$ の範囲に選んだ．3次元モデルでは，ジェットの流速を $V = 6$, 12m/s，36m/s の3種類に選び，$V = 6$m/s では 0.05sec まで，それ以外では 0.03sec まで計算を行った．音圧の観測は楽器内部の点 A で行い，ジェットの渦度の観測はジェットの中心軸上の点 B で行う (図 2).

5　数値解析

5.1　安定発振状態

この節では，$V = 12$m/s における2次元および3次元モデルの発振状態について述べる．2次元モデルでは，$V = 12$m/s で最も安定な発振が見られたからである．図3に，2次元モデルにおける観測点 A での音圧 $(= p - p_0)$ の時間変化とそのパワースペクトルを示す．ただし，パワースペクトルの計算では，初期過渡状態 $(0 \leq t < 0.01\text{s})$ を無視した．図4に，3次元モデルにおける観測点 A での音圧の時間変化とそのパワースペクトルを示す．パワースペクトルの計算には，$(0.005 \leq t \leq 0.03\text{s})$ におけるデーターを使った．図 4(a) には，比較のために2次元モデルの結果も載せている．

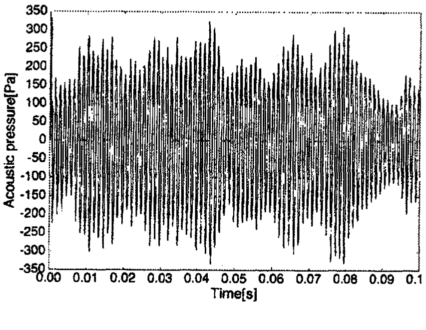
図 3(a) に示す2次元モデルの音圧振動は，初期の過渡状態をのぞいてほぼ一定の周期で振動している．しかし，その振幅は，かなり揺らいでいる．図 4(a) に示すように，3次元モデルと2次元モデルの振動は，0.007s まではよい一致を示す．その後の時間発展では，3次元モデルの方が2次元モデルよりも安定で，200Pa(∼ 140dB) 程度のほぼ一定の振幅を持つ．この音圧は，大気中の音圧 (通常 1Pa 以下) に比べると極めて大きく，楽器内部に強い共鳴状態の音波が発生していることがわかる．

図3(b)，図4(b)のパワースペクトルから，2次元および3次元モデルの振動がともに極めて明確な振動周期を持っているのがわかる．それぞれの基本振動数は，$f_2 = 806$Hz と $f_3 = 795$Hz であり，3章で理論的に求めた基本振動数(2次元:903Hz, 3次元:931Hz)よりも，2元モデルで97Hz, 3次元モデルで136Hz低い．したがって，二つの問題がある．一つは，$V = 12$m/s の周波数は，どちらの場合も理論値より小さいことである．もう一つは，2次元と3次元では，開口端補正が異なるにも関わらず，どちらもほぼ同じ周波数になることである．

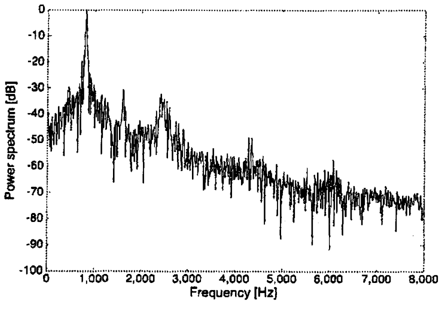
一つ目の問題であるが，5.3節で示すように，2次元モデルではジェットの流速を上げていくと，発振周波数も上昇し理論値に近づいていくことから，ジェットの流速の低い領域での周波数の低下は，ジェットと管体内音場の相互作用によるものと推測される．実際，Cremer-Ising-Coltman-Fletcher-Thwaitesの半経験的な理論からもこのようなことが起きることが予測できる[21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]．

二つ目の問題であるが，我々の3次元モデルは，10mmの間隔の2つの壁に挟まれた準2次元的なモデルである．発生する渦の大きさが数mm程度なので，流体の運動に対しては3次元的な効果を期待できるが，音波に対しては2次元的になると考えられる．なぜならば，10mmの波長を持つ音波の周波数は約17000Hzであり，それ以下の周波数の音波は，2次元的に振る舞う事が予想されるからである．したがって，高々1000Hz程度の振動では，音波は2次元的に振る舞い，3次元モデルでの開口端補正は，2次元モデルのそれと同じになると考えられる．これが，3次元モデルの振動数が2次元モデルの結果とほぼ同じになった理由である．

図5 (a), (b)に，3次元モデルの観測点Bで観測した渦度のz成分の時間発展とそのパワースペクトルを示す．図5(a)には，比較のために2次元の結果も載せている．渦度は，安定な振動をしていて，パワースペクトルを見ると(図5(b))，観測点Aの音圧と同じ基本振動数を持つ事がわかる．また，3次元の振動の方が振幅の揺らぎが小さく，2次元よりもより安定である．これらの事から，$V = 12$m/s で観測される2次元および3次元モデルの振動は，ジェットと管体内音場が同期した振動状態にあり，共鳴振動状態にあると言える．



(a) 音圧の時間変化

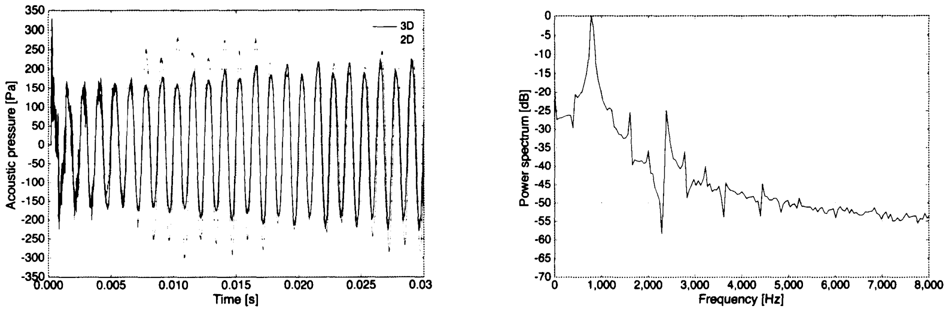


(b) パワースペクトル

図3: 2次元モデルの管体内音圧(V=12m/s)

5.2 安定発振状態における力学量の空間分布

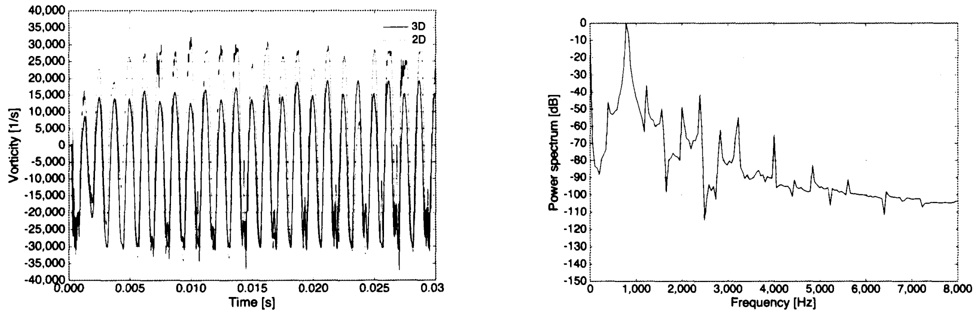
この節では，安定な発振状態($V = 12$m/s)における，流れや音場を特徴づける力学量の空間分布を見ていく．図6(a), (b)に，2次元および3次元の定常発振状態における圧力分布を示す．図6(c), (d)は，対応する2次元および3次元の流速分布である．3次元の分布は，楽器の中心軸を通り紙面に平行な断面上の分布である．



(a) 音圧の時間変化．点線は２次元の結果を示す．

(b) パワースペクトル

図 4: ３次元モデルの管体内音圧 (V=12m/s)



(a) 渦度の時間変化．点線は２次元モデルの結果を示す．

(b) パワースペクトル

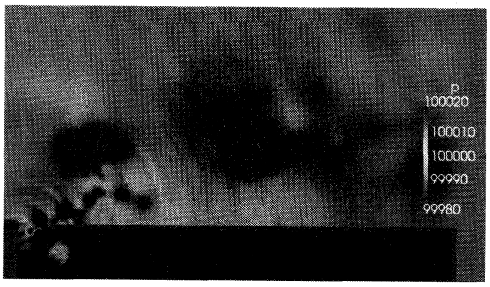
図 5: ３次元モデルのジェットの渦度 (V=12m/s)

図 6(a)，6(b) より，２次元と３次元モデルは，定常発振状態ではともに楽器内部で強い音圧分布を作り出しているのがわかる．楽器内部の音圧は周期的に変動し，共鳴状態にある． 図 6(c)，6(d) を見ると，ジェットがエッジに衝突し渦が発生しているのが分かる．ジェットは周期的に上下に振動するので，渦はエッジの上方，下方に交互に発生する．発生した渦の振る舞いに，２次元と３次元の違いが見られる．

２次元モデルの場合，エッジ近傍で発生した渦は，すぐにロールアップし明確な渦管を作り出し長時間安定に存在している．楽器外部では，渦管は渦列を構成し，まくれ上がるように流れていく様子が見られる．一方，楽器内部では，１つまたは数個の大きなローターが歌口下部に作られている．楽器内部の強い音場の為に，このローターは，歌口から楽器全長の 1/4 程度の領域に局在化している．

一方，３次元モデルの場合では，エッジ近傍で発生した渦は，比較的短時間でより小さな渦に分解し，局在化した乱流状態になる．楽器外部では，壁面に沿って流れる乱流が見られる．楽器の内部では，歌口近くの上壁面にへばりつく様な局在化した乱流が見られるが，楽器内部の強い音場の影響で奥まで侵入することはない．この様子は，図 7(b) に示す歌口近傍の拡大図と断面図においても確認できる．このようなエッジ近傍の流れは，実験でも観測されている [30]．

このような２次元と３次元の渦の振る舞いの違いが，ジェットや音場の安定性の違いの原因になると考えられる．２次元モデルでは，歌口近傍に，渦管や大きなローターがほぼ定常的に存在し，それらの不規則な振る舞いが，ジェットの運動や管体内部に発生する音場に影響を与え，その



(a) 圧力 2D

(b) 圧力 3D

(c) 流速 2D

(d) 流速 3D

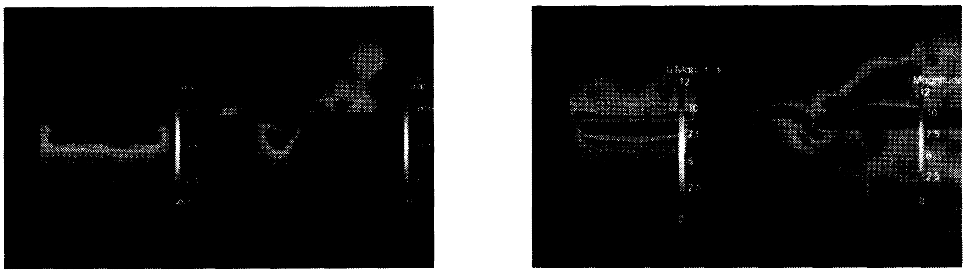
図 6: 2次元および3次元モデルにおける圧力，流速分布 ($V = 12\mathrm{m/s}$)．3次元モデルでは，楽器の中心軸を通る x-y 断面上の分布を示す．

ため，ジェットや音場の振る舞いが不安定になると考えられる．特に，歌口下部に発生する大きなローターの不安定な挙動の影響が大きいと考えられる．一方，3次元モデルでは，エッジ近傍で発生した渦は，すぐに崩壊し局在化した乱流になり，楽器の上部の壁面に沿って流れてゆき，歌口近傍に停留しない．楽器内部にはローターの形成は見られず，乱流領域も局在化している．したがって，3次元モデルでは，ジェットや音場は，渦や乱流の影響をあまり受けず，安定化すると考えられる．すなわち，粘性を持つ3次元流の性質が，楽器を安定化させると言ってよい．

図7の歌口近傍の拡大図と断面図に，別の3次元効果が見られる．図 7(b) の流速分布の断面図より，ジェットの主な部分がエッジ下部に流れ込んでいる場合でも，壁面近くの流れはほぼ静止し，わずかではあるがエッジ上部に流れ込んでいる様子が見られる．このような3次元効果は，格子 Boltzmann 法を用いた別の数値解析でも報告されている [31]．図 7(a) の圧力分布の断面図を見ると，エッジ下方に流れ込んだジェットは，ほぼ2次元的な渦管を作り出し，その中心が負圧になっていることがわかる．

図8に3次元モデルにおける渦度，Lighthill の音源，Howe の音源を示す．Lighthill の音源の計算には (4) 式を，Howe の音源の計算には (11) 式の右辺を用いた．図より，Lighthill の音源，Howe の音源は，ともに強い渦度の領域 (ジェット、渦管、乱流領域) に存在しているのが分かる．乱流領域では，渦度，Lighthill の音源，Howe の音源は，ともに極めて複雑な分布になるが，ジェットのような規則的な流れのある場所では，それぞれ特徴的な分布を示す．

図8(a) に示すように，渦度は，ジェットの上面で正，下面で負の値を取る．Howe の音源 (図 8(c)) は，ジェットの中心面で正の値を取り，上下の面で負の値を取る．これに対し，Lighthill の音源 (図 8(b)) はかなり複雑になり，その様相は，図 8(d) の概念図に示すように，正の傾斜の部分では上面で負の値，下面で正の値を取り，負の傾斜を持つ部分ではその逆の分布（上面が正，下面が負）になる．このような，ジェットに沿った渦度，Lighthill の音源，Howe の音源の分布の関係は，



(a) 圧力　　(b) 流速

図 7: 3次元モデルの歌口近傍の圧力，流速分布．各左側の図はエッジの頂点を通る断面上の分布．各右側の図は歌口近傍の拡大図．

2次元モデルでも観測されるだけでなく，2次元および3次元のエッジトーンの数値計算においても観測される [12, 13]．さらに，2次元ジェットのトイモデルを用いた解析でも同様の特徴が見いだされる [13]．定量的な面では，Howe の音源強度は Lighthill の音源強度に比べて 1 桁以上大きい [12, 13]．このことは，Lighthill の音源を構成する 2つの項 $\rho_0 \mathrm{div}(\omega \times \mathrm{v})$ と $\rho_0 \nabla^2 \left(\frac{1}{2}v^2\right)$ の絶対値がほぼ同じで，反対符号を持つことから説明できる．したがって，ここで観測された Lighthill の音源と Howe の音源の違いは，ジェットに沿った音源分布の極めて一般的な特徴であると言え，その場合，Lighthill の音源と Howe の音源は定性的にも定量的にも異なるものと考えられる．そのため，ジェットから出る密度波 (圧力波) の音波とエンタルピー波の音波は，定性的にも定量的にも大きく異なる可能性がある．

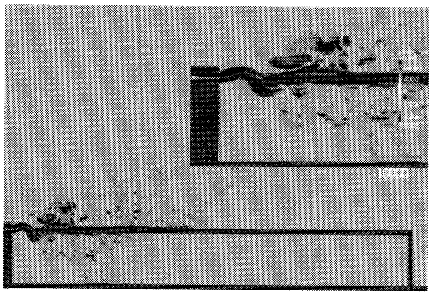
3次元の計算では明確ではないが，渦管近傍の Lighthill の音源，Howe の音源は，渦の回転方向に関係なく，中心付近で負，周辺で正の値を取る．図には示さないが，この様子は，渦管が観測され易い2次元モデルで容易に確認することができる．2次元渦のトイモデルの解析でも同様の結果が得られている [13]．ただし，この場合も定量的にはかなり異なり，Howe の音源強度の方が Lighthill の音源強度よりも数倍大きくなる [12, 13]．

5.3 ジェットの流速と発振周波数

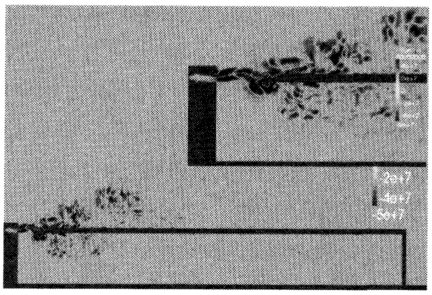
この節では，主に2次元モデルを用いて，ジェットの流速 V と管体内部に励起される音波の周波数の関係を調べて行く．特に，基音の周波数と倍音の周波数に着目する．図 9 に，2次元モデルの管体内観測点 A における音圧振動を特徴づける周波数（基音，倍音）とジェットの流速 $V(2 \leq V \leq 40\mathrm{m/s})$ との関係を示す．2次元モデルの基音の周波数は，流速 V の全ての領域で観測されるが，明確な倍音の周波数は，$V \geq 18\mathrm{m/s}$ で観測される．$V = 6$，12，36m/s で，× で示された点は3次元モデルの結果である．$V = 12$，$V = 36\mathrm{m/s}$ では，2次元モデルと3次元モデルの周波数はほぼ一致している．“Pipe resonance 1st”，”Pipe resonace 3rd” とラベルされた水平な線は，理論計算で求めた2次元管体の基音と3倍音の周波数を示し，それぞれ，903Hz と 2747Hz である．“Edge tone” とラベルされた直線は，Brown によって与えられた半経験的な理論式で，共鳴管体がない時の純粋なエッジトーンの周波数 f とジェットの流速 V の関係を与える式である [32]．

$$f = 0.466(100V - 40)(1/(100l) - 0.07) \tag{21}$$

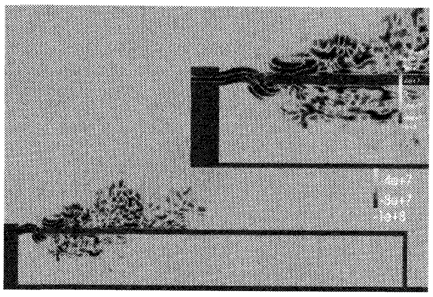
ここで，l はノズルとエッジの距離である．エッジトーンの周波数 f は流速 V に比例して増加する．



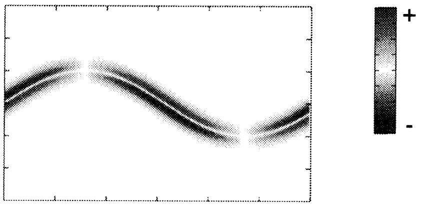
(a) 渦度 3D



(b) Lighthill の音源 3D



(c) Howe の音源 3D



(d) ジェット近傍の Lighthill の音源 (概念図)

図 8: 3次元モデルにおける渦度と流体音源の比較 (V = 12m/s).

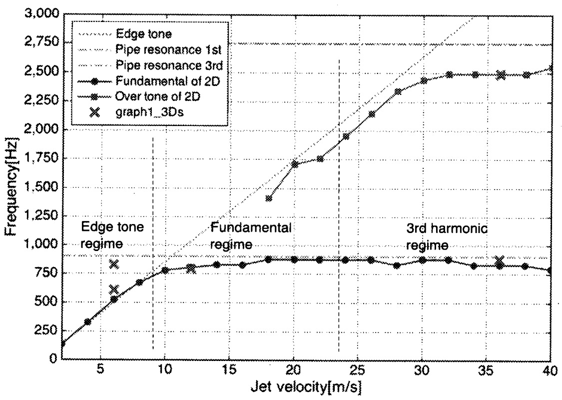
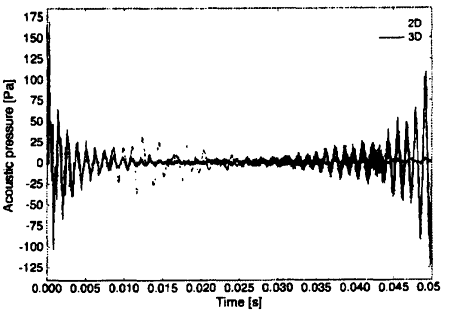


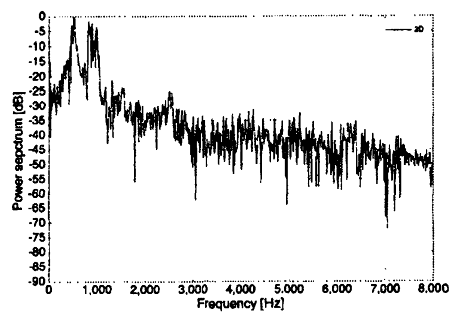
図 9: ジェットの流速と発振周波数の関係. 'Pipe resonance 1st' と 'Pipe resonance 3rd' は, 理論的に求めた共鳴管体の基音と3倍音の周波数. 'Edge tone' は, Brown の理論式 (21) によって求めたエッジトーンの周波数.

ジェットの流速が小さい領域 ($V \leq$ 8m/s) では, 2次元モデルの定常振動の管体内音圧は小さく, 数十 Pa を越える事はない. また, 基音の周波数は, Brown のエッジトーンの式 (21) に沿って線形に増加する. しかし, 3次元モデルでは, 管体の共鳴振動に近い振動数を持つ不安定な振動が励起されることが多い. 図 10(a) に, V = 6m/s における2次元と3次元の管体内音圧の時間変化を示す. 2次元モデルでは不安定ではあるがエッジトーンに近い振動数を持つ振動が観測され, 初期過渡状態を除きその振幅が 50Pa を越えることはない.

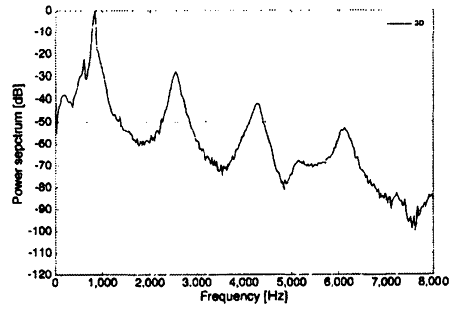
一方，３次元モデルでは，管体の共鳴周波数に近い振動が観測され，その振幅は初期化過渡状態から一度小さくなった後再び増大して行く．数値計算の都合上，３次元では 0.05 秒後の結果は得られていないが，音圧の振幅は，不安定に増大減少を繰り返すものと予想される．図 10(b)，10(c) に，２次元と３次元の音圧波形のスペクトルを示す．２次元モデルの基本振動数は 525Hz で，Brown のエッジトーン振動数 499Hz とほぼ同じである．しかし，管体の共鳴周波数に近い 800-1000Hz の領域に乱雑なスペクトルのピークが観測される．そのため，圧力振動は少なからず管体共鳴の影響を受け不安定になる．一方，３次元モデルの基本振動数は 830Hz で管体の共鳴振動に近く，610Hz にエッジトーンに対応する振動と思われる小さなピークが観測されるだけである．これらのことから以下のようなことが推測される．ジェットの流速が小さな領域では，ジェットは不安定で外乱の影響を受け易い，そのため共鳴管体があると，本来のエッジトーンの振動ではなく，管体共鳴の影響を受けた振動になると考えられる．ジェットは２次元的な流れであるので，３次元モデルではジェットはより不安定になり特にこの傾向が強くなると推測される．音源となるジェットのこのような挙動の影響を受け，管体内では，共鳴周波数領域の周波数成分を持つ音波がより励起され易くなると推測される．特に，３次元モデルではこの傾向が強いため，ほぼ共鳴音に近い圧力振動が観測されるものと思われる．



(a) 音圧の時間変化．点線は２次元の結果を示す．



(b) パワースペクトル ２Ｄ



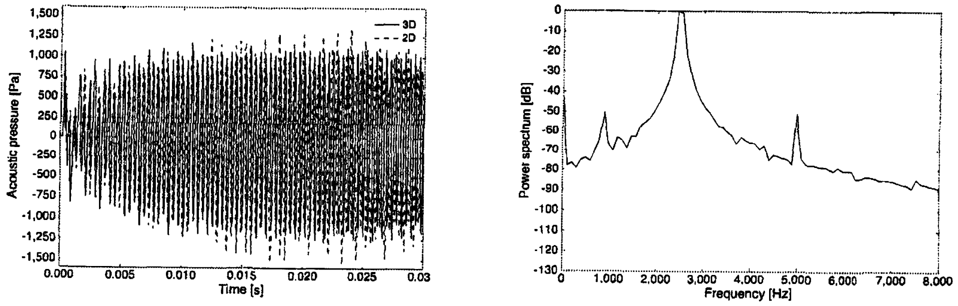
(c) パワースペクトル ３Ｄ

図 10: ２次元および３次元モデルの管体内音圧 ($V = 6$m/s)．

ジェットの流速が ($10 \leq V \leq 22$m/s) の領域では，２次元モデルの音圧振動は，管体の共鳴振動（基音）に同期した状態にある．5.1 節，5.2 節で議論した $V =$ 12m/s の場合には，３次元モデルの基本振動数は，２次元のそれとほぼ同じであった．したがって，それ以外の領域でも，３次元モデルと２次元モデルの振動がほぼ一致することが期待できる．$V = 10$m/s では，２次元モデルの基本振動数は，管体共鳴振動数に比べてかなり低いが，ジェットの流速の増加とともに管体共鳴振動数に漸近していく．($10 \leq V \leq 16$m/s) の領域では安定な振動が観測され，特に，$V = 12$m/s では最も安定な振動が観測される．したがって，最も安定な振動は，管体共鳴振動への同期が始まった直後に観測されることが分かる．これは，Cremer-Ising-Coltman-Fletcher-Thwaites の半経験的な理論からの予想と一致する [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]．($18 \leq V \leq 22$m/s) の領域では，振動は若干不安定になり，振幅変調が観測される．図 9 に示すように，この領域のスペクトルには，エッジトーンに対応する周波数成分（ピーク）が現れる．さらに，３倍音に対応する周波数成分を持つ場合もある．したがって，この領域では，基音，エッジトーン，３倍音の振動成分の間の競争が起こり，そのため系は不安定になるが，まだ基音が支配的であると考えられる．

ジェットの流速が $(18 \leq V \leq 28\mathrm{m/s})$ の領域では，倍音の周波数はエッジトーンの周波数に沿って線形に増加する．しかし，ジェットの流速がそれ以上になると，ある一定値に漸近し，$V \geq 32\mathrm{m/s}$ では，ほぼ一定値を取る．例えば，$V = 36\mathrm{m/s}$ では，倍音の振動数は 2490Hz である．この値は，3 倍音の理論値 2747Hz に比べて 250Hz ほど低いがその理由は現在のところ不明である．ともかく，$(V \geq 24\mathrm{m/s})$ の領域では，周波数スペクトルを見ると，倍音のピークの方が基音のピークよりも高くなり，観測される音圧波形は，基本波のそれではなく，倍音の周期を持ったものになる．したがって，$V \geq 24\mathrm{m/s}$ の領域で管体共鳴の 3 倍音への同期が始まると考えられる．図 11(a) に，$V = 36.0\mathrm{m/s}$ における 3 次元モデルと 2 次元モデルの音圧波形を示す．3 次元モデルの波形は，1kPa 程度の振幅を持ち安定な振動をしている．2 次元モデルの振動は，ほぼ同じ周期で振動しているが，振幅変調が見られやや不安定である．図 11(b) に，3 次元モデルの音圧波形のパワースペクトルを示す．明確な 3 倍音のピークを持ち，基音のピークは極端に小さい．

結論として，基音や 3 倍音に同期した振動が観測される $V = 12$，$36\mathrm{m/s}$ の場合には，2 次元モデルと 3 次元モデルの振動周波数はほぼ一致した．したがって，楽器が管体共鳴振動数に同期している状態では，2 次元モデルを用いて 3 次元モデルの振動数を予測することが可能であるといえる．しかし，3 次元モデルの方が 2 次元モデルよりも安定な振動が観測される．一方，ジェットの流速が小さい領域では，2 次元モデルには，エッジトーンに近い振動が見られるが，3 次元モデルは，管体共鳴の影響を受け易く不安定な振動が観測される．



(a) 音圧の時間変化．点線は 2 次元の結果を示す．

(b) パワースペクトル．

図 11: 3 次元モデルの管体内音圧 $(V = 36\mathrm{m/s})$.

6 結論

この論文では，圧縮性 LES を用いて 2 次元および 3 次元の小型エアリード楽器のシミュレーションの結果を報告した．圧縮性 LES を用いた 3 次元モデルのシミュレーションでは，楽器の発音機構の特徴を良く捉えた結果が得られた．2 次元モデルでも，ジェットの流速と発振周波数の関係を良く再現していて，半経験的な理論や実験結果と良い一致を示す [1, 24, 25].

ジェットの流速が小さい時には，ジェットはエッジトーンに近い振動をし，流速とともに振動数が線形に増加する．しかし，管体内部の音波は，管体共鳴の影響を受け，共鳴周波数に近い周波数成分を含んだ振動になることが多い．特に，3 次元モデルではその傾向が強まり不安定な振動が見られる．したがって，ジェットの振動と管体共鳴振動は，巧く同期していないと言える．エッジトーンの周波数が管体の共鳴周波数に近づくと，ジェットの振動が管体の基音振動と同期し，管体内部に強い音波が励起される．管体の基音への同期は，エッジトーンの振動数が管体の倍音（こ

の場合3倍音）に近づくまで続く．その後，基音から3倍音への遷移が起き，今度は管体の3倍音への同期が始まる．

共鳴発振状態の2次元モデルと3次元モデルを比較すると，3次元モデルの方がより安定である．理由は，2次元モデルでは，長寿命の渦管が存在し，その不安定な挙動により，ジェットの運動や管体内音場が攪乱されるからである．2次元モデルでは，エッジに衝突したジェットから生まれた渦は，すぐにロールアップし安定な渦管を作り出す．特に，歌口下部の管体内には，大きなローターが形成される．これらの渦の不安定な挙動がジェットの運動や管体内音場に影響を及ぼし，それらを不安定化する．一方，3次元モデルでは，エッジ後方に発生した渦は，すぐにより小さな渦に分解し，局在化した乱流に変化し，ジェットの運動や管体内音場に大きな影響を与える事はない．しかし，2次元モデルと3次元モデルの発振周波数はほぼ一致するので，2次元モデルは若干不安定ではあるが，エアリード楽器の基本的な発振メカニズムを良く捉えていると言える．

3次元モデルの共鳴発振状態における音源の空間分布を調べた結果以下のような事が分かった．Lighthillの音源とHoweの音源は，ともに強い渦度の領域（ジェット，渦管，乱流領域）に存在し，Powell-Howeの渦音理論の主張「空力音の主な音源は運動する渦である」が裏付けられた[3, 4, 10]．しかし，Lighthillの音源とHoweの音源には，定性的，定量的な違いがある．また，流れの形状が変化するとそれらの音源の分布の特徴も変化する．特に，ジェットに沿ったLighthillの音源とHoweの音源には明確な違いが現れた．これらの違いは，Lighthillの理論とHoweの理論の音波に対する基本的な考え方の違いによるものと考えられる．Lighthillの理論では，音波は密度や圧力の振動とされるが，Howeの理論では，全エンタルピーの振動とされる．これらの違いが，音源領域となる渦度の強い領域で顕著になると考えられる．このような違いは，エッジトーンのシミュレーションでも観測されており[12, 13]，また，数学的なトイモデルを用いた解析でも説明可能であり[13]，一般性を持つものと考えられる．

この論文で扱った3次元モデルは，10mmの間隔の固定壁に閉じ込めたものであり，準2次元的と言える．しかし，発生する渦のスケールが数mmなので，流体としての渦の運動については，3次元的と言える．実際，3次元的な効果により渦管の寿命が短くなり，3次元モデルではより安定な圧力振動が観測された．一方，音波に関しては，2次元的と言える．なぜならば，固定壁の間隔によって決まるカットオフ周波数は，$f_c \sim 17$kHzとなり，これ以下の周波数帯では，音波は2次元的に振る舞う．音楽で重要な周波数領域は，カットオフ周波数以下である．楽器内部の音波は1次元的に振る舞うので特に問題はないが，歌口の放射インピーダンスや外部の音波は2次元的になり、現実の楽器との違いがあると考えられる．したがって，楽器の発振のより現実的な解析には，外部空間を3次元化したモデルの解析が必要である．

7 謝辞

本研究は，科学研究費補助金挑戦的萌芽研究No.20654035，基盤研究C No.23540455及びサウンド財団の研究支援金の援助を受けている．また，JHPCN学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点プロジェクトの一環として行われた．

参考文献

[1] N.H.Fletcher and T.D.Rossing, *'The Physics of Musical Instruments'*, 2nd Edition (Springer-Verlag, New York 1998).

[2] A. Hirschberg, “Aero-acoustics of Wind instruments” in *Mechanics of Musical Instruments*, Eds. A.Hirschberg, J.Kergomard and G.Weinreich. (Springer-Verlag, Vienna and New York 1995), pp.291-369.

[3] M.S. Howe, *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*, (Cambridge Univ. Press, 1998).

[4] M.S. Howe, 'Contributions to the theory of aerodynamic sound with appliction to excess jet noise an the theory of the flute', J. Fluid Mech. **71** 625-673 (1975).

[5] M. Miyamoto, Y. Ito, K. Takahashi, T. Takami, T. Kobayashi, A. Nishida, and M. Aoyagi, “Applicability of compressible LES to reproduction of sound vibration of an air-reed instrument”, Proceedings of International Symposium on Music Acoustics 2010, Sydney and Katoomba (CD-ROM), paper no.37.

[6] K. Takahashi, M. Miyamoto, Y. Ito, T. Takami, T. Kobayashi, A. Nishida, and M. Aoyagi, “Numerical study on air-reed instruments with LES” Proceedings of ASME-JSME-KSME Joint Fluids Engineering Conference 2011, AJK2011-08011.

[7] 高橋公也, 宮本真孝, 高見利也, 小林泰三, 西田晃, 青柳睦, “エアリード楽器の発音機構：流体と音の相互作用の解析”, オイラー方程式の数理：渦運動と音波 150 年, 数理解析研究所講究録 **1697** 31-45 (2010)

[8] M.J. Lighthill, 'On sound generated aerodynamically. Part I: General theory', Proc. Roy. Soc. London **A211** 564-587 (1952).

[9] N.Curle, 'The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound', Proc. R. Soc. London A **231** 505-514 (1955).

[10] A. Powell, 'Theory of vortex sound', J.Acoust. Soc. Am. **36** 177-195 (1964).

[11] D.G.Crighton, 'Basic principles of aerodynamic noise generation', Prog. Aerospace Sci. **16** 31-96 (1975).

[12] K. Takahashi, M. Miyamoto, Y. Ito, T. Takami, T. Kobayashi, A. Nishida, and M. Aoyagi, “Numerical analysis on 2D and 3D edge tones in terms of aerodynamic sound theory”, Proceedings of International Congress on Acoustics 2010, Sydney (CD-ROM), paper no.621.

[13] 高橋公也, 宮本真孝, 伊藤泰典, 高見利也, 小林泰三, 西田晃, 青柳睦, “2 次元および 3 次元モデルを用いたエッジトーンの数値解析”, オイラー方程式の数理：力学と変分原理 250 年, 数理解析研究所講究録 **1749** 121-136 (2011)

[14] L.E. Kinsler, A.R.Frey, A.B. Coppens, and J.V. Sanders, *Fundamentals of Acoustic*, 4th ed. (John Wiley & Sons., 2000).

[15] C. Wagner, T. Hüttl, and P. Sagaut, eds. 'Large-Eddy Simulation for Acoustics', (Cambridge Univ. Press, New York, 2007).

[16] http://www.openfoam.com/

[17] S. Ghosal, T.S. Lund, P. Moin, and K. Akselvoll, "A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows", J. Fluid Mech., **286** 229-255 (1995).

[18] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W.H. Cabot, "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model." Physics of Fluids A: Fluid dynamics, **3**(7) 1760-1765 (1991).

[19] E. Pomraning, and C.J. Rutland, "Dynamic one-equation nonviscosity large-eddy simulation model", AIAA Journal, **40**(4) 689-701 (2002).

[20] T.J. Poinsot, and S. K. Lelef, "Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows", J. Comp. Phys., **101** 104-129 (1992).

[21] L. Cremer and H. Ising, "Die selbsterregten Schwingungen von Orgelpfeifen," Acustica **19** 143-153 (1967).

[22] J. W. Coltman, "Sounding mechanism of the flute and organ pipe", J. Acoust. Soc. Am. **44** 983-992 (1968).

[23] J. W. Coltman, "Acoustics of the flute", Physics Today **21** 25-32 (1968).

[24] J. W. Coltman, "Jet driven mechanisms in edge tones and organ pipes", J. Acoust. Soc. Am. **60** 725-733 (1976).

[25] J. W. Coltman, "Momentum transfer in jet excitation of flute-like instruments", J.Acoust. Soc. Am. **69** 1164-1168 (1981).

[26] N. H. Fletcher and S. Thwaites, "Wave propagation on an acoustically perturbed jet", Acustica **42** 323-334 (1979).

[27] S. Thwaites and N. H. Fletcher, "Wave propagation on turbulent jets", Acustica **45** 175-179 (1980).

[28] S. Thwaites and N. H. Fletcher, "Wave propagation on turbulent jets. II. Growth", Acustica **51** 44-49 (1982).

[29] N. H. Fletcher and S. Thwaites, "The physics of organ pipes", Scientific American **248** 84-93 (1983).

[30] B. Fabre, A. Hirschberg, A. P. J. Wijnands, "Vortex shedding in steady oscillation of a flue organ pipe", Acta Acustica, Acustica **82** 863-877 (1996).

[31] H. Kühnelt, "Simulating and sound generation in flutes and flue pipes with the Lattice-Boltzmann-Method", Proceedings of International Symposium on Music Acoustics 2004, Nara Japan, 251-254.

[32] G.B. Brown, 'The vortex motion causing edge tones', Proc. Phys. Soc., London **XLIX** 493-507 (1937).