

双極子を用いた Lagrange 的非圧縮性流れ解析手法の研究

沼津高専 松本祐子 (Yuko Matsumoto)

Numazu College of Technology

東北大 工学研究科 上野和之 (Kazuyuki Ueno)

Graduate School of Engineering, Tohoku University

1 はじめに

格子を用いないラグランジュ的な計算手法として非圧縮性流れ解析に用いられているものには, SPH 法や渦法 [1] などがある. しかしながら, SPH 法はもともと天文学の分野で生まれた圧縮性流れの解析法であり, 非圧縮性流れに適用するには, 連続の式を満たすために様々な工夫が必要とされる. また, 渦法は 3次元解析においては渦要素の伸縮やつなぎ合わせを考慮しなくてはならず, 計算が複雑になる. 本研究では, 非圧縮性流れにおける速度場, 渦度場の divergence-free を自動的に満たし, かつ 3次元解析が容易な新しいラグランジュ的な計算手法の構築を目指している.

本研究で提案する手法では, 双極子をラグランジュ的な計算要素として用いる. 双極子は, 2次元流れにおいては正と負の渦対, 3次元流れでは円形の渦輪からなり, 基本的な渦要素の一つである. 双極子を計算要素として用いることによって, divergence-free は自動的に満たされる. また, 3次元流れ解析において, 2次元の場合と同じアルゴリズムで計算ができることを期待している.

双極子の大きな特徴は, 点渦と異なり, 単独で推進する運動量 (自走速度) を持つことである. この運動量によって, 流れの輸送に大きく関わっていると考えられおり, 大気中や海洋スケールの流れ中でしばしば観測されてきた [2, 3]. その一方で, 双極子の運動をどのように表すかという問題は, 点渦系のように十分調べられているとは言えない. 特に, 双極子の特徴である自走速度の評価は研究毎に異なっており, 無視している場合もある [4, 5]. そこで本報告では, 自走速度を考慮した双極子の運動モデルを提案し, 数値計算と比較することによって妥当性を検証する. また, 提案したモデルを複数の双極子の相互作用問題へ拡張する. なお, 本報告は既報 [6] の要約にいくつかの発展を加えたものであり, 詳細は既報 [6] を参照されたい.

2 問題設定

2次元非粘性非圧縮性流れ中にある双極子を考える. 図 1 に概略図を示す. 正負の渦はそれぞれ有限の領域 Ω_+ , Ω_- を持つものとする. 循環 Γ と面積 S は以下の式で与えられる.

$$\Gamma = \int_{\Omega_+} \omega(\mathbf{x}) dS = - \int_{\Omega_-} \omega(\mathbf{x}) dS. \quad (1)$$

$$S = \int_{\Omega} dS, \quad (2)$$

ここで、 ω は渦度、 $\Omega = \Omega_+ + \Omega_-$ である。今、流れは非粘性非圧縮性を仮定しているため、 Γ, S ともに保存量である。

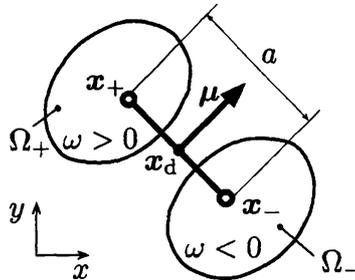


図 1: 双極子の概略図. 矢印は双極子モーメント μ .

双極子の位置 x_d は、正の渦の重心 x_+ と負の渦の重心 x_- の中点として定義する。また、正負の渦重心間距離 a を流さスケールと呼ぶことにする。

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\Gamma} \int_{\Omega_{\pm}} x \omega(x) dS, \quad (3)$$

$$x_d = (x_+ + x_-)/2. \quad (4)$$

$$a = |x_+ - x_-|. \quad (5)$$

本研究では、双極子の自走速度の向きと大きさを表すベクトル量として、次式で定義される双極子モーメント μ を用いる。

$$\mu = \int_{\Omega} (x' - x_d) \omega(x') dS' \times e_z. \quad (6)$$

3 双極子モデル

本研究では、双極子の運動を 3 つの変数 (位置 $x_d(t)$, 流さスケール $a(t)$, 双極子モーメント $\mu(t)$) で特徴づけたモデルを提案する。ある流れ場 U に単独の双極子が置かれた場合、その運動はこれらの変数の常微分方程式で記述される。以下では、その方程式について述べる。

まず、式 (3) を (6) に代入すると、長さスケールは双極子モーメントの大きさに比例することが分かる。

$$a(t) = \frac{\mu(t)}{\Gamma}. \quad (7)$$

ここで、 $\mu = |\mu|$ である。

次に、双極子位置 x_d の時間変化を考える。双極子は、速度場 U に加えて自走速度 u_{self} によって移動するから、

$$\frac{dx_d}{dt} = U(x_d) + u_{\text{self}}(t), \quad (8)$$

と書ける. 自走速度 \mathbf{u}_{self} は双極子モーメントに比例するが, これは双極子自身が \mathbf{x}_d に誘起する速度と異なることに注意する. ここでは, 自走速度は以下のようにして与えることにする. まず, 正負の渦が十分離れている場合, 各渦を点渦と近似すれば

$$u_{\text{self}} = |\mathbf{u}_{\text{self}}| = \frac{\Gamma}{2\pi a} = \frac{\mu}{2\pi a^2}, \quad (9)$$

となる. 一方, 正負の渦同士の距離が近づいた場合, 互いの渦を点渦と近似することはできなくなり, 自走速度は式 (9) から変化する. 例えば Lamb dipole[9, 12] の場合, 正負の渦が近接し, 渦領域 Ω 全体として半径 R の円になっている. その自走速度は

$$u_{\text{self}} = \frac{\mu}{2\pi R^2}, \quad (10)$$

となる ($R = \sqrt{S/\pi}$). 本研究では, 自走速度は長さスケール a の変化に伴って (9) から (10) へ滑らかに変化するものと仮定し, 次式で与えることにした.

$$u_{\text{self}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{4C_0 a}{(a - C_0 R)(4C_0 a - R) + 4aR}, \quad (11)$$

ここで, C_0 は領域 Ω が円の場合の長さスケールと R の比 a/R である. この式の妥当性については, 次章で検討する.

最後に, 双極子モーメントの時間変化について述べる. 双極子とともに移動する検査体積 V_c をとると, V_c 内部の流体の運動量保存則は,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{u} \left(\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{x}_d}{dt} \right) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_c} p \mathbf{n} dS, \quad (12)$$

と表せる. ここで \mathbf{u} は流れ場の速度, p は圧力, ρ は密度である. また \mathbf{n} は検査面 S_c に垂直な単位ベクトルである. 速度 \mathbf{u} を双極子による誘起速度とそれ以外の流れ場 \mathbf{U} とに分け, \mathbf{U} を \mathbf{x}_d 周りで展開する. また, \mathbf{U} による渦度は一定であると仮定してベルヌーイ式から圧力 p を求め (12) を積分すると, 双極子モーメントの時間発展は速度の空間微分を用いて次のように表せる.

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_x}{dt} &= -\mu_x \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_d} - \mu_y \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_d}, \\ \frac{d\mu_y}{dt} &= -\mu_x \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_d} - \mu_y \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_d}. \end{aligned} \quad (13)$$

この式は, 双極子モーメントと長さスケールとの関係式 (7) から導くことができる [8]. また, Roberts[7], Buttke[4] によって非圧縮性 Euler 方程式から得られた式とも一致する.

以下では, 双極子の運動を (7), (8), (11), (13) を用いて表すことにし, これを双極子モデルと呼ぶことにする.

4 双極子モデルの検証計算

双極子モデルの妥当性を検証する. まず, 単独の双極子を流れ中に置き, その運動を (7), (8), (13) によって求める. 時刻 $t = 0$ において双極子は Lamb dipole であると仮定すると,

自走速度 (11) における $C_0 = a_0/R = 0.9198$ となる。また、検証のために同じ問題を渦法で計算し、比較した。渦法の計算では、初期渦度場は Lamb dipole [9, 10] で与え、渦度分布は約 10000 個の渦要素で離散化した。また、渦要素の時間発展は 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いて計算した。

4.1 Strain flow 中の双極子運動

4.1.1 解析解

Background flow は、 $U = (y, -x)$ とする [11, 12]。この流れは、図 2(a) に示すように、斜め 45° を向いた strain flow となる。このとき、双極子モーメントの時間変化は式 (13) から解析的に求めることができ、

$$\begin{aligned}\mu_x(t) &= \frac{1}{2}(\mu_{x0} - \mu_{y0})e^t + \frac{1}{2}(\mu_{x0} + \mu_{y0})e^{-t}, \\ \mu_y(t) &= \frac{1}{2}(\mu_{y0} - \mu_{x0})e^t + \frac{1}{2}(\mu_{x0} + \mu_{y0})e^{-t}\end{aligned}\tag{14}$$

となる。 (μ_{x0}, μ_{y0}) は、 $t = 0$ における双極子モーメントである。この式から、strain flow 中では双極子モーメントは時間とともに指数的に変化することが分かる。

4.1.2 計算結果

ここでは、渦間距離のみが変わる場合を考え、自走速度 (11) の妥当性を調べた。

まず、初期の双極子モーメントが $(-\mu_0, \mu_0)$ で与えられた場合について考える。このとき、式 (14) より、双極子モーメントの向きは変化せず、大きさ $|\mu(t)|$ および流きスケール $a(t)$ は時間とともに指数的に増大する。モデルによって得られた双極子の運動と、渦法の数値計算結果を図 2 に示す。比較のために渦法とモデルの結果をともに示している。図中の矢印がモデルによって得られた双極子モーメントを示し、それに垂直な線分が長さスケールを示す。等高線は渦法によって得られた渦度分布を示している。グレースケールが負の渦である。また、図中 (a) には background flow U の流線も併せて描いている。渦法の結果を見ると、正負の渦が時間とともに離れることが分かる。これは、Trieling らの実験および計算結果と一致している [12]。モデルは、位置、長さスケールともに渦法とよく一致している。自走速度 (11) の検証のため、双極子位置の時間変化をプロットしたものを図 3 に載せる。本モデルで導入した自走速度 (11) と、渦糸近似した場合 (9) および Lamb dipole の自走速度 (10) を用いた場合を比較している。さらに双極子自身が x_d に誘起する速度を自走速度とした結果も併せてプロットしている。これは、Buttke [4] 等で用いられている形である。(11) が最も良く渦法の結果と一致しており、妥当な評価をしていると考えられる。

次に、初期双極子モーメントを (μ_0, μ_0) とした場合を考える。このとき、式 (14) より、双極子モーメントの向きは変化せず、大きさ $|\mu(t)|$ および流きスケール $a(t)$ は時間とともに指数的に減少する。モデルによって得られた双極子の運動と、渦法の数値計算結果を図 4 に載せる。渦法の結果を見ると、正負の渦が接近し、進行方向と反対側に伸びていることが分かる。これは、Kida ら [11] および Trieling ら [12] の計算結果と一致する。自走速度の検

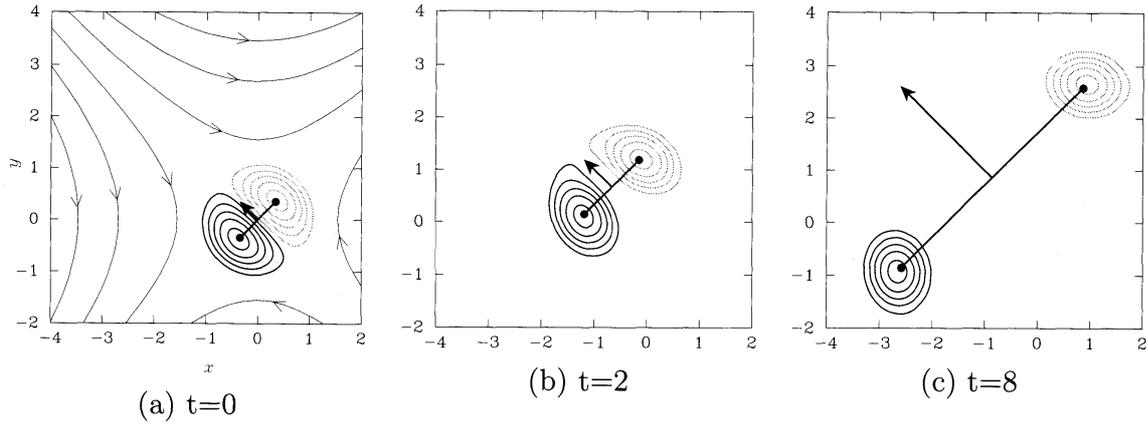


図 2: 双極子の時間変化. 初期条件 ($x_d=(0,0)$, $\mu_0 = 5.1083$, $a=1.0216$).

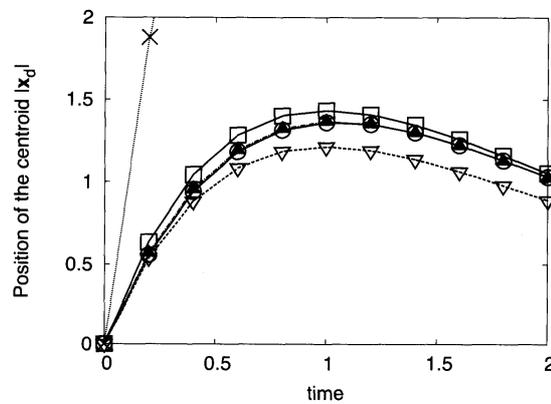


図 3: 双極子位置の時間変化. ○:渦法, ▲:(11), □:(9), ▽:(10), ×:双極子位置 x_d で評価した自走速度.

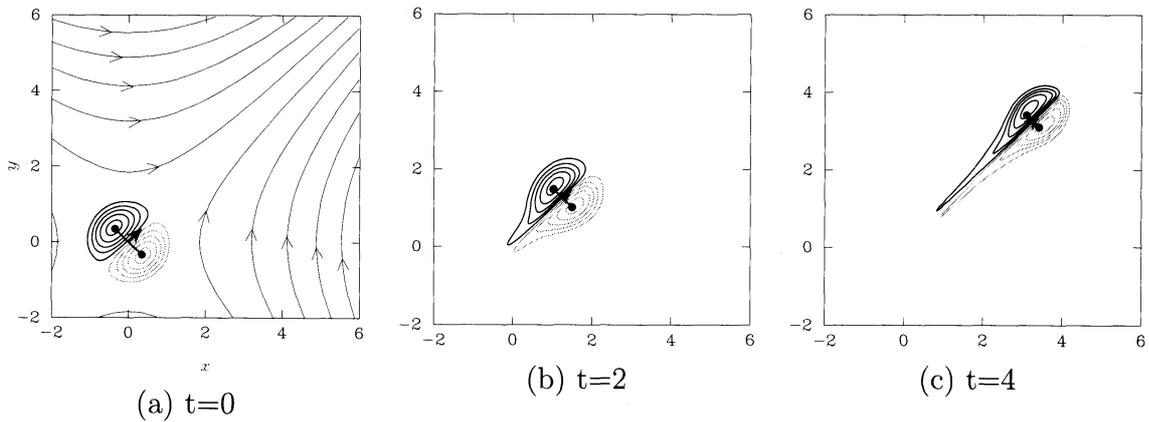


図 4: 双極子の時間変化. 初期条件 ($x_d=(0,0)$, $\mu_0=5.1083$, $a=1.0216$).

証のため, 双極子位置の時間変化を図 5 に載せる. 比較対象は図 3 と同様である. これを見ると, 本モデルで導入した自走速度 (11) が最も良く渦法から得られた双極子位置と一致しており, 妥当であるといえる.

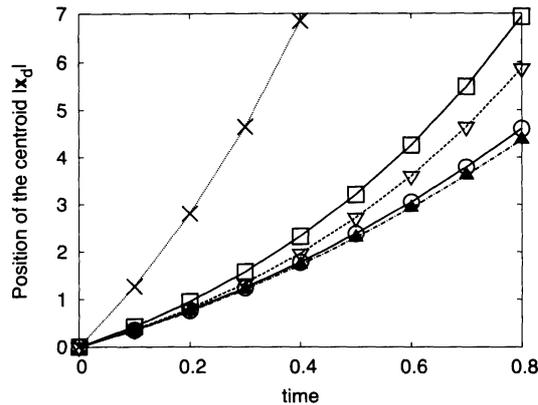


図 5: 双極子位置の時間変化. ○:渦法, ▲:(11), □:(9), ▽:(10), ×:双極子位置 x_d で評価した自走速度.

4.2 Shear flow 中の双極子の運動

次に, Background flow を $U = (y, 0)$ とした場合について, 双極子の運動とモデルの妥当性を調べる. この流れは, 図 6(a) に示すように, x 軸に平行な shear flow となる. ここでは, 前節と異なり双極子モーメントの向きも変化する場合を考える.

まず, 図 6(a) のように双極子を shear flow 中に置いて時間変化を調べた. 渦法の結果を見ると, 各渦は時間とともに離れていき, その形はほぼ円形になる. モデルの位置や長さスケールを渦法の結果と比較すると, よく一致している. 双極子モーメントの向きも妥当である. このケースのように, 渦間距離が大きくなる場合は, 双極子を形成する二つの渦はほぼ円形に近づき, 双極子モデルは有効であることが分かった.

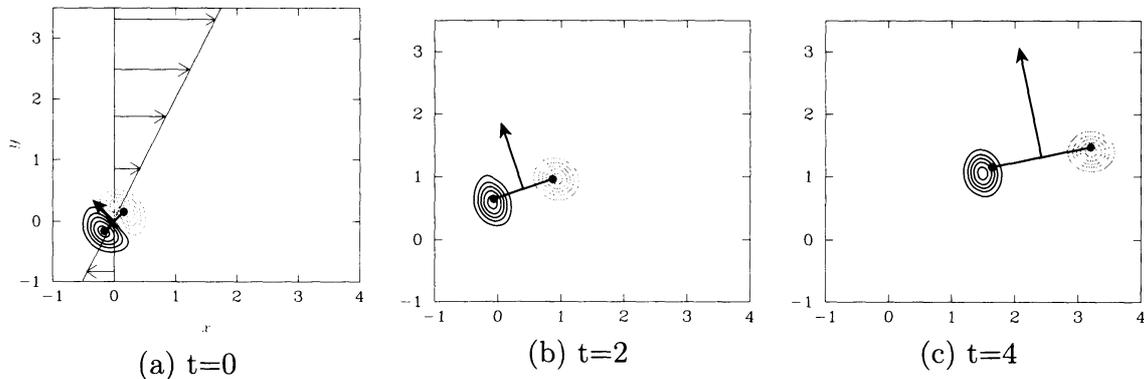


図 6: Shear flow 中の双極子. 初期条件 $(x_d=(0, 0), \mu = (-1, 1)/\sqrt{2}, a=0.4599)$.

一方で, 図 7(a) のように双極子を置いた場合, strain flow 中 (図 4) の場合と同じく時間とともに正負の渦は互いに近づいた. $t = 1.5$ (図 7(c)) では, 負の渦が正の渦の周りに巻き付き, 非対称な形に変形している. 一度このような変形が起こると, 元の対称的な双極子に戻ることは困難である. 本モデルでは, 自走速度を考える際に正負の渦が対称であると仮定しているため, このような大変形は取り扱うことができない. これまでに調べた範囲では, 長さスケールが $a/a(t=0) < 1$ となる場合, 正負の渦が接近し, 大きな変形が生じる可

能性がある. 一方で, $a/a(t=0) > 1$ となるときには, 正負の渦は離れるため変形は生じない. したがって, 長さスケールの増減を調べることによって, 渦が変形する可能性と本モデルが適用可能かを知らることができる.

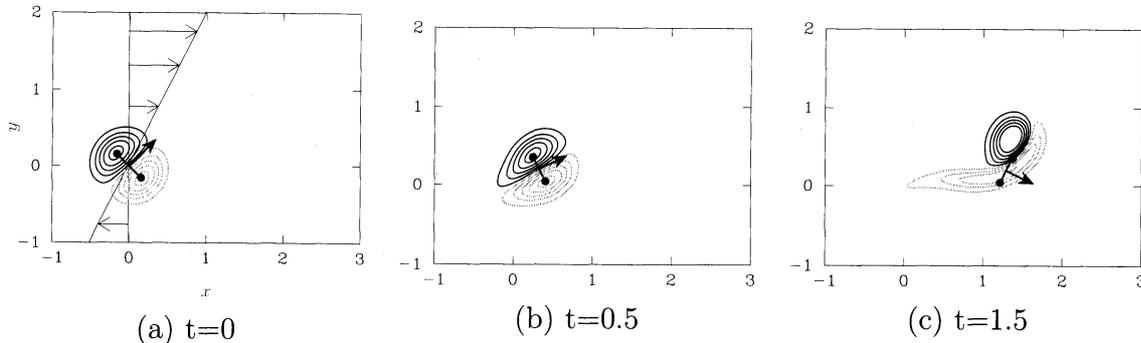


図 7: Shear flow 中の双極子. 初期条件 $(x_d=(0, 0), \mu = (1, 1)/\sqrt{2}, a=0.4599)$.

5 複数双極子の相互作用

複数の双極子の相互作用を表す方程式系を示す. これは, 単独の双極子モデル (7), (8), (13) において, background flow U を周りの双極子からの誘起速度と置き換えることによって得られる.

$$\frac{d\mathbf{x}_d^{(m)}}{dt} = \mathbf{u}_{\text{self}}^{(m)} + \sum_{n \neq m}^N \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}_d^{(m)}), \quad (15)$$

$$\frac{d\mu_i^{(m)}}{dt} = - \sum_{n \neq m}^N \mu_j^{(n)} \left. \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_d^{(m)}} \quad (16)$$

ここで, 上添字の (m) は m 番目の双極子に関する量であることを意味し, $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}_d^{(m)})$ は n 番目の双極子が m 番目の双極子位置に誘起する速度を示す. 長さスケールについては, 式 (7) をそのまま適用する. これらの式は, 全双極子モーメントおよび全 angular momentum を保存することを容易に示すことができる.

上記の方程式を用いて, 2体の双極子の相互作用を調べた結果, 単体の場合と同様, 渦が大きく変形しない場合, つまり双極子同士の相互作用が十分弱い場合には, 式 (15), (16) は双極子運動を表すのに適していることが分かった. 一方で, 図 8 に示すように, 双極子同士の相互作用が強く, 渦が大きく変形する場合には, 式 (15), (16) のみで双極子運動を表すには限界がある. 大変形が起こるような流れを表現するための方法として, モデルの要素数や多重極渦を用いるなど, 自由度を増やすことが考えられる.

6 おわりに

双極子を簡単な 3 つの変数 (位置, 双極子モーメント, 長さスケール) で表現し, それらの変数の時間変化によって双極子運動を表すモデルを提案した. 渦法の数値計算結果と比較

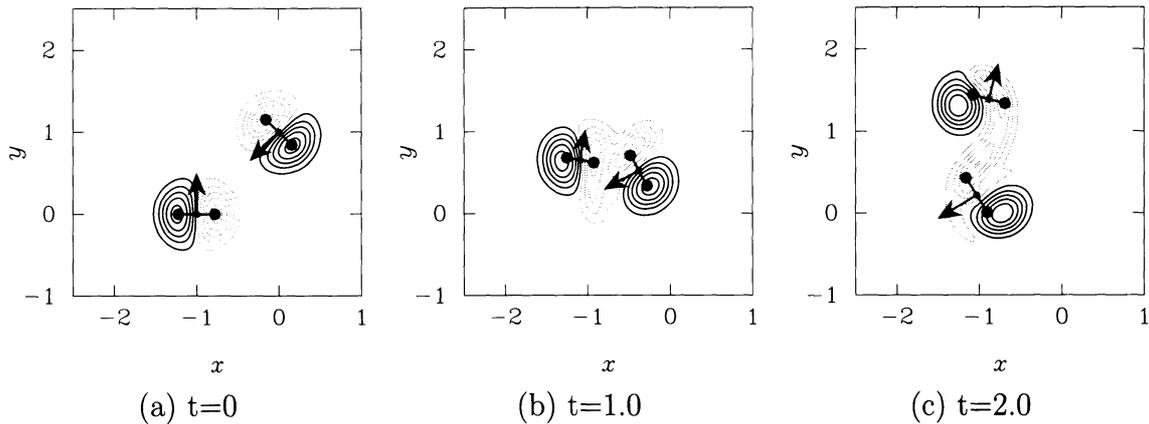


図 8: 2体の双極子の相互作用.

し、その妥当性を調べた。その結果、大変形を伴わない場合には、本モデルは双極子の運動をよく表していることが分かった。

今回は単独双極子の運動を主に扱ったが、今後は双極子モデルを使って複数の双極子の相互作用をより詳しく調べていきたい。

参考文献

- [1] G. H. Cottet and P. D. Koumoutsakos, *Vortex methods: theory and practice*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [2] K. Haines and J. Marshall, "Eddy-forced coherent structures as a prototype of atmospheric blocking," *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **113**, 681 (1987).
- [3] K. Ahlnäs, T. C. Royer, and T. H. George, "Multiple dipole eddies in the Alaska coastal current detected with landsat thematic mapper data," *J. Geophys. Res.* **92**, 13041 (1987).
- [4] T. F. Buttke, "Velocity methods: Lagrangian numerical methods which preserve the Hamiltonian structure of incompressible fluid flow," in *Vortex flows and related numerical methods*, edited by J. T. Beale, G. H. Cottet, and S. Huberson, NATO ASI series C, Vol. 395 (Kluwer Academic, Dordrecht, 1993) p. 39.
- [5] P.K. Newton, "The dipole dynamical system," *Discrete Cont. Dyn. S. Supplement* (2005) 692.
- [6] Y. Matsumoto, K. Ueno and T. Saito, "A moment model with variable length scale for the motion of a vortex pair in two-dimensional incompressible flows," *Phys. Fluids* **21** (2009) 047103.
- [7] P. H. Roberts, "A Hamiltonian theory for weakly interacting vortices," *Mathematika* **19**, 169 (1972).

- [8] G. S. Winckelmans, "Topics in vortex methods for the computation of three- and two-dimensional incompressible flows," Ph. D. thesis, California Institute of Technology, (1989).
- [9] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. (Dover, New York, 1945).
- [10] V. V. Meleshko and G. J. F. van Heijst, "On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid," *J. Fluid Mech.* **272**, 157 (1994).
- [11] S. Kida, M. Takaoka, and F. Hussain, "Formation of head-tail structure in a two-dimensional uniform straining flow," *Phys. Fluids A* **3**, 2688 (1991).
- [12] R. R. Trieling, J. M. A. van Wesenbeeck, and G. J. F. van Heijst, "Dipolar vortices in a strain flow," *Phys. Fluids* **10**, 144 (1998).