

## 超伝導のギンツブルク・ランダウ方程式とその解について

龍谷大学・理工学部 森田 善久 (Yoshihisa Morita)  
Department of Applied Mathematics and Informatics  
Ryukoku University

### 1 Introduction

超伝導の巨視的現象を記述するモデル方程式としてギンツブルク・ランダウ (GL) 方程式は古くから知られているが ([3]), 1990 年代に入ると色々な条件下で, 超伝導の特徴的な現象に対応する解の数学的研究が急速に発展した.

ここでは, 以下のように単純化された次の時間発展の GL 方程式をとりあげよう. まず,  $\psi$  をマクロな超伝導電子の波動関数に対応する複素関数で,  $|\psi|^2$  は超伝導電子密度を表す秩序変数として導入する. 正規化した方程式として

$$(1 + i\gamma)\psi_t = \nabla_A^2 \psi + \lambda(1 - |\psi|^2)\psi \quad (x \in D) \tag{1.1}$$

$$\nu \cdot \nabla_A \psi = 0 \quad (x \in \partial D) \tag{1.2}$$

を考える. ここで  $D$  は  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$ ) の有界な領域で,  $\partial D$  はその境界,  $\nu$  は境界上の外向き単位法線ベクトルである.  $\lambda$  は  $\gamma$  はパラメータで  $\lambda > 0$ , また,  $A_a$  を  $\text{div} A_a = 0$  を満たす与えられたベクトル関数として

$$\nabla_A := \nabla - iA_a,$$

とする. この方程式は次のエネルギー関数

$$\mathcal{E}(\psi) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla_A \psi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\psi|^2)^2 \right\} dx \tag{1.3}$$

を Lyapunov 関数として持つ. 実際,  $\psi(x, t)$  を (1.1)-(1.2) の解とすると

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\psi(\cdot, t)) = - \int_{\Omega} |\psi_t|^2 dx \leq 0$$

が成り立つ. 特に  $\gamma = 0$  のとき (1.1)-(1.2) は汎関数 (1.3) の勾配系である.

超伝導のモデルとしては, 通常は磁場のベクトルポテンシャル  $A$  とその磁場のエネルギーを考慮する必要がある. 例えば, 超伝導体に対応する領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  における秩序変数を  $\Psi$  とし, 外部が真空のような絶縁体で囲まれているとすると, その正規化されたエネルギー汎関数は

$$\mathcal{G}(\Psi, A) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Psi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Psi|^2)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\text{curl} A - H_a|^2 dx. \tag{1.4}$$

となる。ここで  $H_a$  は外部磁場を表す。これを単純化するモデルとして、いま超伝導体が薄膜のような場合、すなわち  $\Omega$  が2次元の領域  $D$  を基底領域にもつ薄く膨らませた領域

$$\Omega = \{(x', z) : x' \in D, 0 < z < \epsilon\}$$

の場合を考える。(1.4)を適当にスケーリングして、第一近似をとると、 $\Psi(x', z)$  は  $\psi(x') = \Psi(x', 0)$ ,  $A$  は  $A_a(x')$  でそれぞれ近似され、近似エネルギーとして(1.3)が得られる。ただし、 $H_a = \text{curl} A_a$  で、薄膜の表面は平らな場合を考えている(この近似の数学的な正当化については、[1]や[7], [11]を参照するとよい)。

これから(1.3)や時間発展の(1.1)-(1.2)は、単純化されているが、超伝導のある種の特徴的な現象を数学的に記述するモデルであることが期待できる。以下ではGL方程式(1.1)-(1.2)の解について数学的な結果の一部を紹介する。

## 2 現象に対応する解の存在と安定性

方程式(1.1)-(1.2)において外部磁場に対応する効果が無い場合、すなわち  $A_a = 0$  の場合についてまず概説しよう。そのときのエネルギー汎関数は

$$\mathcal{E}_0(\psi) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\psi|^2)^2 \right\} dx \quad (2.1)$$

で、対応するその定常問題は

$$\nabla^2 \psi + \lambda(1 - |\psi|^2)\psi = 0 \quad (x \in D) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \quad (x \in \partial D) \quad (2.3)$$

となる。領域が凸の場合、この方程式は自明な定数解  $\psi = e^{ic}$  ( $c$ : 実数) と  $\psi = 0$  を持つが、安定な解は  $\psi = e^{ic}$  のみで、非定数解は全て不安定であることがわかっている([4])。一方、超伝導の永久電流は外部磁場がなくても安定な状態として観察される現象である。今の場合のモデル方程式は、導体内の電流によって誘導される磁場の効果が小さいと仮定したモデルと見ることができるので、永久電流に対応する解が存在すると期待される。実際、円環領域やドーナツ領域では安定な非定数解を構成することができる。もっと一般に、非自明な位相をもつ領域において、その領域から  $S^1$  上への連続関数全体の空間において各ホモトピー類に属する解を、 $\lambda$  を十分大きくとることで構成でき、その解が安定であることが数学的に証明されている([9])。そして、これらの解は永久電流に対応する解として特徴づけることができる。

なお、文献の数学的結果は  $\gamma = 0$  の場合についての議論であるが、 $\gamma \neq 0$  についてもその安定性は変わらない([10]を参照)。しかし、以下では特にこのことを特に明記しない。

次に外部磁場の効果によって現れる超伝導の特徴的な現象として、第2種超伝導体で観測される常伝導と超伝導が混合した状態を考えよう。超伝導体に磁場をかけると、ある値を境に超伝導体は磁場の侵入を許し、磁場の量子化現象により渦糸構造が現れる現象である。GLモデルではこの渦糸構造に対応する解は零点を持つ解として特徴づけられる。

すなわち、秩序パラメータの零点が常伝導状態に対応し、一般的に考える領域で余次元1の集合になる(2次元なら点の集合, 3次元なら1次元の曲線)。

外部磁場が無いときには安定な渦糸構造をモデル方程式の解として実現することは一般には難しい(ただし領域の幾何学的形状を考えて渦糸を安定化することは数学的には可能ではある。[5], [6] 参照)。しかし、次の2次元領域  $D$  におけるエネルギー汎関数

$$\mathcal{G}(\Psi, A) = \int_D \left[ \frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Psi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Psi|^2)^2 + \frac{1}{2} |\text{curl}A - h| \right] dx \quad (2.4)$$

については、多数の零点をもつ解(渦糸解)がエネルギーを最小にするような磁場の強さ  $|h|$  と  $\lambda$  についての十分条件が得られている(この場合  $h$  と  $\lambda$  は十分大きくとる必要がある。[12], [13] 参照)。なお(2.4)は垂直方向に無限に延びるシリンダー状の領域の切断面  $D$  における問題である。このときの外部磁場は  $H_a = (0, 0, h)$  であるが、鉛直方向は一様と仮定して2次元の問題に帰着される。また、

$$\text{curl}(A_1, A_2) = \partial A_2 / \partial x_1 - \partial A_1 / \partial x_2$$

である。この結果は大変興味ある結果であるが、解自体を明示的に表すような手法で得られた結果ではなく、エネルギーを最小にする解について、そのエネルギーをうまく評価することによって得られる。

さて(1.1)-(1.2)にもどってその定常問題を2次元の単位円盤領域で考えてみよう。  $A_a = \frac{h}{2}(-x_2, x_1)$  とする。領域は  $D = \{|x| < 1\}$  と与えられるから、極座標表示を用いると

$$A_a = \frac{hr}{2}(-\sin\theta, \cos\theta), \quad \nu = (\cos\theta, \sin\theta),$$

より

$$\frac{1}{r}(r\psi_r)_r + ((1/r)\partial/\partial\theta - ihr)^2\psi + \lambda(1 - |\psi|^2)\psi = 0 \quad (0 < r < 1), \quad (2.5)$$

$$\psi_r = 0 \quad (r = 1) \quad (2.6)$$

となる。一つの零点をもつ渦糸に対応する解として

$$\psi = w(r) \exp(ik\theta), \quad w(r) > 0 \quad (0 < r \leq 1), \quad w(0) = 0$$

と表されるものを見つけるため、方程式に代入すると各  $k \in \mathbb{Z}$  に対して  $w$  に関する方程式

$$\frac{1}{r}(rw_r)_r - (k/r - hr)^2 w + \lambda(1 - w^2)w = 0 \quad (0 < r < 1), \quad (2.7)$$

$$w_r = 0 \quad (r = 1) \quad (2.8)$$

が得られる。自明解  $w = 0$  における線形化方程式

$$\frac{1}{r}(rw_r)_r - (k/r - hr)^2 w + \lambda w = 0, \quad w(r) > 0 \quad (0 < r < 1), \quad w_r(1) = 0 \quad (2.9)$$

の解が存在するパラメータに関する条件は、 $(h, \lambda)$  パラメータ平面において曲線として得られる。それを

$$\lambda = \lambda_k(h) \quad (2.10)$$

としよう。この曲線は自明解  $\psi = 0$  から非自明な解  $\psi = w(r) \exp(ik\theta)$  の分岐が起こる分岐曲線を表している。

$k \neq 0$  の場合は  $w(0) = 0$  を満たす解を探すことになり、これは原点を零点にもつ渦糸解となる。しかし、複数個の孤立した零点を持つ解を (2.7)-(2.8) からは構成できない。この点から見ても渦糸解の数学的な難しさが想像できる。

ここでは、[2] で議論されているアイデアによって、複数個の零点を持つ解を自明解から分岐する解として構成する方法を述べることにする。

$0 \leq k < m$  に対して曲線  $\lambda = \lambda_k(h)$  と  $\lambda = \lambda_m(h)$  が交わる点を考える。そのような点を  $(h_{k+m}, \lambda_{k+m})$  とする。線形化方程式 (2.9) の解を  $w^{(k)}(r)$  とすると、分岐点  $(h_{k+m}, \lambda_{k+m})$  において、(2.5)-(2.6) の線形化方程式は、 $\alpha, \beta$  を任意の定数として (実定数としてよい)

$$\alpha w^{(k)}(r) \exp(ik\theta) + \beta w^{(m)}(r) \exp(im\theta)$$

を解にもつ。これを第一近似にして分岐点の周りで

$$\psi = \epsilon [\alpha w^{(k)}(r) \exp(ik\theta) + \beta w^{(m)}(r) \exp(im\theta)] + O(\epsilon^2)$$

と展開できる解の存在が期待できる。この解の零点は  $\beta \neq 0$  として近似的に

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{w^{(m)}(r)}{w^{(k)}(r)} \exp(i(m-k)\theta) = 0$$

の解として得られる。すなわち

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{w^{(m)}(r)}{w^{(k)}(r)} \cos((m-k)\theta) = 0, \quad \sin((m-k)\theta) = 0$$

から、 $m-k$  個の零点が存在する可能性がある。実際、適当なパラメータ  $(h, \lambda)$  の範囲で  $m-k$  個の零点を持つ解の存在が期待できる (数学的に厳密な議論については、少しモデル方程式は異なるが [2] を参照するとよい)。

こうして、2つの異なるモードを持つ解の混合によって零点を持つ渦糸解の自明解からの分岐が示される。

### 3 おわりに

GL 方程式の解とその安定性についての数学的研究は [8] に詳しいが、全ての重要な結果を網羅しているわけではない。実際、まだまだ未解決の問題も多く、特に渦糸の運動に関する数学的な研究は十分な成果が得られていない。流体の渦とは共通点もあるが、量子渦とよばれる量子力学的な渦糸の性質についての数学的な研究手法が発展することが望まれる。

## References

- [1] Chapman, S., Du, Q., Gunzberger, M., Peterson, J.: Simplified Ginzburg-Landau model for superconductivity valid for high kappa and high fields. *Adv. Math. Sci. Appl.* **5** (1995) 193-218.
- [2] C. -N. Chen and Y. Morita, Bifurcation of vortex and boundary-vortex solutions in a Ginzburg-Landau model, *Nonlinearity* **20** (2007), 943-964.
- [3] Ginzburg, V., Landau, L.: On the theory of superconductivity. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.* **20** (1950), 1064-1082.
- [4] Jimbo, S., Morita, Y.: Stability of non-constant steady state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions. *Nonlinear Anal.* **22** (1994), 753-770.
- [5] Jimbo, S., Morita, Y.: Stable solutions with zeros to the Ginzburg-Landau equation with Neumann boundary condition. *J. Differential Equations* **128** (1996), 596-613.
- [6] Jimbo, S., Morita, Y.: Stable vortex solutions to the Ginzburg-Landau equation with a variable coefficient in a disk. *J. Differential Equations* **155** (1999), 153-176.
- [7] Jimbo, S., Morita, Y.: Ginzburg-Landau equation with magnetic effect in a thin domain, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **15** (2002), 325-352.
- [8] 神保秀一, 森田善久著, 「ギンツブルクーランドウ方程式と安定性解析」, 岩波書店, 2008.
- [9] Jimbo, S., Morita, Y., Zhai, J.: Ginzburg-Landau equation and stable steady state solutions in a non-trivial domain. *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995), 2093-2112.
- [10] K. Mischaikow and Y. Morita, Dynamics on the Global Attractor of a Gradient Flow Arising from the Ginzburg-Landau Equation, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **11** (1994), 185-202.
- [11] Y. Morita, Stable solutions to the Ginzburg-Landau equation with magnetic effect in a thin domain, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **21** (2004), 129-147.
- [12] E. Sandier and S. Serfaty, On the energy of type-II superconductors in the mixed phase, *Rev. Math. Phys.* **12** (2000), 1219-1257.
- [13] E. Sandier and S. Serfaty, *Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*, Birkhäuser, 2007.