

楕円断面筒状容器内の回転流のハミルトニアン分岐理論

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 福本 康秀 (Y. Fukumoto)
Institute of Mathematics for Industry,
Kyushu University

九州大学 イノベーション人材養成センター 彌榮 洋一 (Y. Mie)
Kyushu University Innovation Training Program

1 はじめに

ひずみ流中におかれた渦管は Moore-Saffman-Tsai-Widnall (MSTW) 不安定とよばれる 3 次元不安定を起こすことがよく知られている [1, 2, 3, 4]. MSTW 不安定は左巻きらせん波と右巻きらせん波の間のパラメータ共鳴で, 単純ずり流によって駆動される. 円柱状の渦管の上に立つ波は Kelvin 波あるいは慣性波とよばれる. 一般に, 渦核断面が楕円形をした渦管は, 方位波数 m の差が 2 である 2 個の Kelvin 波が同時に励起されたとき, パラメータ共鳴を起こす. Fukumoto [4] は, ハミルトン力学系のスペクトル理論 [5] にもとづいて, 方位波数 m と $m+2$ をもつ Kelvin 波の分散曲線のすべての交点で不安定性を生じること示した. 筒状容器内に閉じ込められた系において, $(m, m+2) = (-1, 1)$ 共鳴に加えて, $(m, m+2) = (1, 3)$ および $(0, 2)$ 共鳴も観察された [7, 8]. Malkus [6] は, 変形しやすい材質からなる円筒状容器の内部を水で満たし, それを 2 つのローラーによってはさみつけることによって, 断面が楕円形に変形した容器内の回転流を実現した (文献 [7] も参照). この実験によると, まず MSTW 不安定モードが成長し, 引き続いて, 多数のモードが励起され, やがて崩壊に至る. この崩壊にいたるルートを記述するために, 線形不安定モードの非線形段階での成長を知る必要がある.

攪乱振幅の指数関数的成長がある一定のレベルまで進むと, 非線形効果が効き始め, MSTW 不安定を修正する. Waleffe [9] と Sipp [10] は, 弱非線形効果が Kelvin 波の振幅が飽和するように働くことを示した. Mason & Kerswell [11] は MSTW 不安定が 2 次不安定性を起こすことを指摘した. 本稿では, Kelvin 波の非線形相互作用によって誘起される平均流を完全に決定できていない, という意味でこれらの扱いが不完全であることを示す. Rodrigues & Luca [12] は平均流がない状況を扱い, 振幅方程式系の解がカオス的に振る舞うことを示した.

波の相互作用を扱うにはラグランジュ的変位にまで立ち返らなければならない [13, 14, 15]. ラグランジュ的アプローチを利用すれば, 振幅について 2 次で誘起される平均流を, 振幅について 1 次のラグランジュ的変位場のみであらわすことが可能になる. ラグラン

ジュ的アプローチを3次元までに拡張することによって、Fukumoto & Hirota [16] は、渦管上の Kelvin 波の自己相互作用によって誘起される流れの直流成分 (= 平均流) をはじめて導いた。この直流成分は3次元波に固有のもので、多数の Kelvin 波あるいは慣性波が励起されたとき、それらがもたらす質量輸送の増大を解析できる。さらに、振幅について3次オーダーの弱非線形発展方程式を導出する道がひらける [17]。背後にあるハミルトン力学系の構造は、波の作用 (action) という概念を核として、波のエネルギーと波によつ誘導される平均流を記述する統一的枠組みを提供する。

本研究では、Kelvin 波攪乱の振幅を表す α と楕円ひずみの強さを表す ε の2つの微小パラメータについての漸近展開によって、楕円型回転流に立つ波の振幅について3次までの振幅方程式を導出し、楕円渦流の弱非線形不安定性を調べた。左巻き・右巻きらせん波同士 ($m = \pm 1$) の定常モードのハミルトニアン・ピッチフォーク分岐については、文献 [17] で調べた。そこでは、既存の Euler 的扱い [10] が不完全であることを指摘した。以下では、特に、一般の $(m, m+2)$ のモード対が起こす非定常共鳴に対して、攪乱振幅の弱非線形発展方程式を導出し、ハミルトニアン・ホップ分岐を起こした際の非線形発展を調べる。第2節で、問題設定と Kelvin 波を復習し、第3節で MSTW 不安定を紹介する。第4節で、定常基本場のうえに立つ波のエネルギーと波が誘起する平均流を計算するためのラグランジュ的方法を展開する。これを踏まえて、第5節で弱非線振幅方程式を導出する。簡単なまとめを第6節で行う。

2 基本流と非線形相互作用

Fig.1 のように、断面が楕円形で、無限長の筒状容器内部の回転流を考える。楕円筒の軸を z 軸とし、断面形状を

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon} + \frac{y^2}{1-\varepsilon} = 1 \quad (1)$$

とおく。パラメータ ε であらわされるひずみの効果が断面形状の対称性を S^1 対称性から Z_2 対称性へと低下させる。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2)$$

($r > 0$) で定義される円柱座標系 (r, θ, z) を導入する。このとき楕円筒の境界断面 (1) は $r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta / 2 + O(\varepsilon^2)$ と近似できる。

楕円筒容器に沿って流れる定常回転流 U は、主要項である剛体回転流 U_0 と純粋ずり流 εU_1 からなる：

$$U = U_0 + \varepsilon U_1, \quad (3)$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} -r \sin 2\theta \\ -r \cos 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

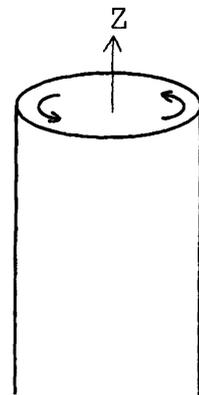


図 1: 楕円筒内の回転流

これは「流れが壁に沿う」という境界条件

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{at } r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta / 2 \quad (5)$$

を満足する. \mathbf{n} は側面壁の単位法線ベクトル

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r + \varepsilon(-\mathbf{e}_r \cos 2\theta / 2 + \mathbf{e}_\theta \sin 2\theta) \quad (6)$$

である. この2次元定常楕円渦流を基本場にとり, 3次元攪乱を加える. 攪乱速度 $\tilde{\mathbf{u}}$ は Euler 方程式

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{0} \quad (7)$$

を満足する. 非圧縮を仮定すると, 連続の式は

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (8)$$

となる. 攪乱速度 $\tilde{\mathbf{u}}$ を楕円ひずみの度合いをあらわすパラメータ ε と振幅の大きさをあらわすパラメータ α について級数展開する:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \alpha \mathbf{u}_{01} + \varepsilon \alpha \mathbf{u}_{11} + \alpha^2 \mathbf{u}_{02} + \alpha^3 \mathbf{u}_{03} + \dots \quad (9)$$

下付き添字の左側は ε の次数, 右側は α の次数をあらわす.

$O(\alpha)$ の攪乱速度場 \mathbf{u}_{01} が Kelvin 波で

$$\mathbf{u}_{01} = \mathbf{u}_m(r) e^{i(m\theta + kz - \omega t)} \quad (10)$$

の形で与えられる. $m \in \mathbb{Z}$ が方位波数, $k \in \mathbb{R}$ が軸方向波数である. 軸方向波数 k , 周波数 ω も ε について展開する:

$$\begin{aligned} k &= k_0 + \varepsilon k_1 + O(\varepsilon^2), \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Euler 方程式 (7) および連続の式 (8) に代入すると, Kelvin 波 (10) の動径関数 $\mathbf{u}_m(r)$ はベッセル関数を用いて表現できる [4]. 境界条件 (5) を課すと, 軸方向波数 k と振動数 ω_0 の間の分散関係が

$$J_{m+1}(\eta_m) = \frac{(\omega_0 - m - 2)m}{(\omega_0 - m)\eta_m} J_m(\eta_m), \quad (12)$$

$$\eta_m = k_0 \left[\frac{4}{(\omega_0 - m)^2} - 1 \right]^{1/2}, \quad (13)$$

と求められる.

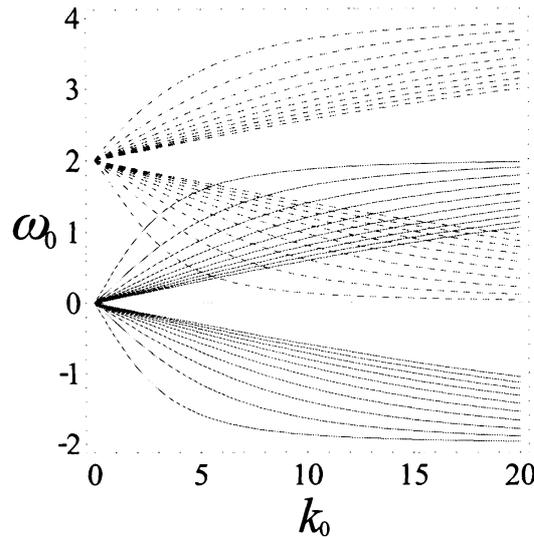


図 2: $m=0$ (実線) と $m=2$ (破線) の Kevin 波の分散関係

本研究では、とくに、軸対称モード ($m=0$) と楕円変形モード ($m=2$) の間の共鳴をとりあげ、 $O(\alpha)$ での攪乱速度場 \mathbf{u}_{01} を次の形におく：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{01} = & A_+(t)\mathbf{u}_{A_+}(r)e^{ik_0z} + B_+(t)\mathbf{u}_{B_+}(r)e^{i2\theta}e^{ik_0z} \\ & + A_-(t)\mathbf{u}_{A_-}(r)e^{-ik_0z} + B_-(t)\mathbf{u}_{B_-}(r)e^{i2\theta}e^{-ik_0z}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$A_{\pm}, B_{\pm} \propto \exp[\mp i\omega_0 t]. \quad (15)$$

これら2つのモード ($m=0, 2$) の分散関係をグラフに描いたのが Fig.2 である。

軸対称モード ($m=0$) においては、原点 $(k_0, \omega_0) = (0, 0)$ から無限本の枝が $-2 < \omega_0 < 2$ の範囲内で延びる。楕円モード ($m=2$) においては、 $(k_0, \omega_0) = (0, 2)$ から無限本の枝が $0 < \omega_0 < 4$ の範囲で延びる。Fig.2 は方位波数 $m=0$ と $m=2$ のモードについて、それぞれ動径構造の単純なもの、すなわち、動径変位の節の数の少ないモードから有限個とり出して描いたものである。

3 Moore-Saffman-Tsai-Widnall 不安定

続いて $O(\varepsilon\alpha)$ に進む。これは $O(\alpha)$ の線形攪乱に $O(\varepsilon)$ の楕円形ひずみの摂動項が加わったものである。われわれは非定常共鳴モード ($\omega_0 \neq 0$) に注目している。Fig.3 は複素固有値 $\sigma_0 = i\omega_0$ を、横軸を実部 $\text{Re}[\sigma_0]$ 、縦軸を虚部 $\text{Im}[\sigma_0]$ として複素平面に模式的に描いたものである。楕円ひずみがないときには、固有値は虚軸上 ($\sigma_0 = \pm i\omega_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$) にある (Fig.3 左)。楕円ひずみ流という形の軸対称性を破る摂動が加わると、 ε とともに固有値が実部を持つように変化して (Fig.3 右)、必ず $\text{Re}[\sigma] > 0$ となるモードを伴うので、基本流は不安定となる。これがハミルトニアン・ホップ分岐である。

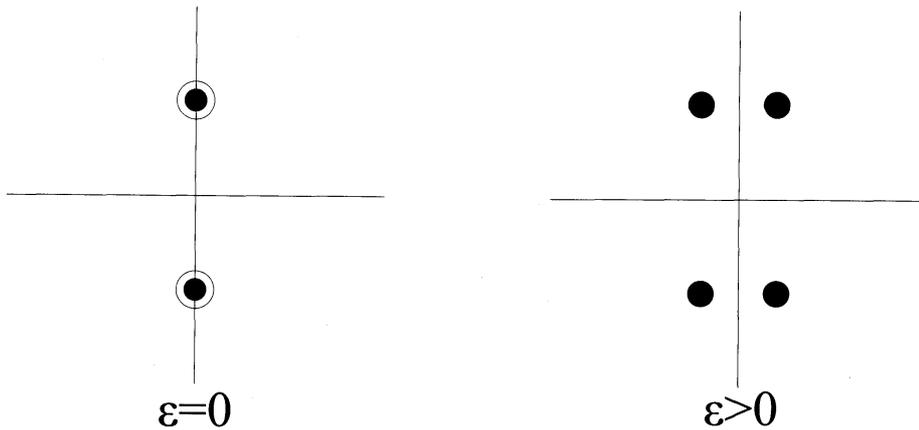


図 3: 対称性の破る摂動による固有値の変化

$O(\alpha\varepsilon)$ の攪乱速度場・圧力場に対する Euler 方程式 (7) および連続の式 (8) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{11}}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_{11} + (\mathbf{u}_{11} \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 + \nabla p_{11} \\ = -(\mathbf{U}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_{01} - (\mathbf{u}_{01} \cdot \nabla) \mathbf{U}_1 - \frac{\partial \mathbf{u}_{01}}{\partial t_{10}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{11} = 0 \quad (17)$$

となる。ここで、 $t_{10} = \varepsilon t$ である。楕円形ひずみの効果は \mathbf{U}_1 によってもたらされる。定常解 (4) の形を見ると、 \mathbf{U}_1 は $e^{\pm 2i\theta}$ 型の方位波数 θ 依存性をもつので、これを含む摂動項は、方位波数 m の差が 2 の Kelvin モードを結合させて増幅することを可能にする。いま考えている Kelvin 波の (0, 2) 対 (14) も共鳴可能である。この 2 つのモードが共存する (k_0, ω_0) で、すなわち、Fig.2 に描いた $m=0$ と $m=2$ の分散曲線が交差する点で、摂動による増幅率の変化を調べればよい。方程式 (16) の左辺の \mathbf{u}_{11}, p_{11} に作用する演算子は、 (k_0, ω_0) が分散関係を満たすとき特異的になる。したがって、右辺がこの演算子の像空間に入っていないと解が存在しない。右辺の時間微分項はこの可解条件を満足するように定められる。

実際に計算すると、すべての m モードと $m+2$ モードの分散曲線の交点で共鳴増幅を起こす。これが Moore-Saffman-Tsai-Widnall [1, 2, 4] 不安定である。左・右巻き定常 ($\omega_0 = 0$) らせん波同士 $(m, m+2) = (-1, +1)$ の共鳴については、弱非線形方程式の係数がコンパクトな形でかける [17]。振動数 ω_0 と波数 k_0 を共有する (0, 2) Kelvin 波対を代入し、上の式を解いて、境界条件を課す。ここから可解条件が導かれ、これを要請すると、軸対称波 ($m=0$) の振幅 A_- と楕円変形波 ($m+2$) の振幅 A_+ の時間微分項が

$$\frac{\partial A_{\pm}}{\partial t_{10}} = \pm ip B_{\pm}, \quad \frac{\partial B_{\pm}}{\partial t_{10}} = \pm iq A_{\pm} \quad (18)$$

と導かれる。ここで

$$p = -\frac{(\omega_0 - 2)^2 \omega_0^3 (\omega_0 + 2)^2 J_2(\eta_2)}{64 k_0^2 (\omega_0 - 1) J_0(\eta_0)}, \quad (19)$$

$$q = -\frac{(\omega_0 - 4)(\omega_0 - 2)^4 \omega_0 (\omega_0 + 2) J_0(\eta_0)}{64(k_0^2 + \omega_0 + 2)(\omega_0 - 1) J_2(\eta_2)} \quad (20)$$

である。方位波数 $m=0$ と $m=2$ モードの両方が共存する波数 k_0 と振動数 ω_0 においてはいつでも $pq < 0$ を満たすことから、攪乱 (14) は時間について指数関数的に成長し、増幅率が $\varepsilon\sqrt{-pq}$ であることがわかる。増幅率を決める pq は分母に $(\omega_0 - 1)^2$ を因数にもつので、振動数 ω_0 が 1 に近いときに増幅率が大きくなることが読みとれる。不安定モードの固有関数については、振幅の比が

$$\left(\frac{|B_{\pm}|}{|A_{\pm}|}\right)^2 = \frac{|q|}{|p|} \quad (21)$$

と定まる。

$O(\alpha)$ の Kelvin 波自身の非線形相互作用で、 $O(\alpha^2)$ の非線形攪乱速度が励起される。とくに、単一の Kelvin 波の自身の相互作用によって、方位波数、軸方向波数がともにゼロ ($m=0, k_0=0$) である平均流が生み出される。角周波数も $\omega_0=0$ となって、長い時間スケールで大きな効果をもたらす。平均流以外の $O(\alpha^2)$ の成分は、Euler 方程式と連続の方程式を解くことで得られる。しかし、平均流に関しては、線形化作用素が退化することにより、Euler 方程式から直接導きだすことはできない。Sipp[10] は $O(\varepsilon\alpha^2)$ の可解条件から、平均流の関数形とその振幅の時間微分を求めた。残念ながら、この方法は本来不要な楕円ひずみ ε を必要としているので、パラメータ共鳴が起こる分散曲線の交点 (k_0, ω_0) でのみしか扱えない。しかも、平均流の振幅の時間微分しか定まらず、初期条件を決める手立てが Euler 的記述の枠組みの中にはないので、それを積分すると、積分定数が不定のまま残る。この積分定数を勝手に選ぶと物理的に矛盾した結果に導かれる。他にも、平均流が生じないとして、弱非線形振幅方程式を導出した研究もある [12]。いずれにせよ、通常の方法の枠組みでは Kelvin 波 (14) が非線形的に誘導する平均流を決定できない。

4 Lagrange 的方法による平均流

Lagrange 変数を用いることによって始めて、渦度場のトポロジー的特性を組み込むことができ [14, 15]、この方法により、 $O(\alpha^2)$ の計算から波の非線形相互作用によって生じる $O(\alpha^2)$ の平均流を直接求めることができる [16]。

基本場の点 \boldsymbol{x} における Lagrange 変位は、その生成子 $\alpha\xi_1 + \alpha^2\xi_2/2 + O(\alpha^3)$ を用いて、

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x} + \alpha\xi_1 + \frac{\alpha^2}{2} [(\xi_1 \cdot \nabla)\xi_1 + \xi_2] + O(\alpha^3) \quad (22)$$

とかける。このとき流れに凍結して変形する攪乱渦度場は

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \alpha \delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (23)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \nabla \times [\boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\omega}_0], \quad \delta^2 \boldsymbol{\omega} = \nabla \times [\boldsymbol{\xi}_1 \times \delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi}_2 \times \boldsymbol{\omega}_0]. \quad (24)$$

のように振舞う。流れに凍結した渦度場はそのトポロジを保つ。たとえば、渦線の絡み目・結び目が保たれる。凍結場に制限した流れ場全体を 'isovortical sheet' ともいう。Arnold[13] は、非圧縮定常 Euler 流は、isovortical sheet 上に制限した攪乱に関して、流体の全運動エネルギーの臨界点になることを証明した。

$$K = \int |\mathbf{u}|^2 dV, \quad K = K_0 + \alpha \delta K + \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 K, \quad (25)$$

$$\delta K = \int \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{u}_{01} dV = \int \mathbf{U}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\omega}_0) dV = 0. \quad (26)$$

これは Euler 的記述の枠組み内では定式化できない。この構造を援用すると、攪乱エネルギーの一般公式が

$$\begin{aligned} \delta^2 K &= \int [|\mathbf{u}_{01}|^2 + 2\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{u}_{02}] dV \\ &= \int [|\mathbf{u}_{01}|^2 + \mathbf{U}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 \times \delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi}_2 \times \boldsymbol{\omega}_0)] dV \\ &= \int \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_1}{\partial t} \times \boldsymbol{\xi}_1 \right) dV \end{aligned} \quad (27)$$

と導かれる [14]。ここで

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{U}_0. \quad (28)$$

である。攪乱エネルギー (27) は振幅 α について 2 次の量で、右辺の第一行目は $O(\alpha^2)$ の速度場 \mathbf{u}_{02} を含むが、右辺 3 行目まで変形を進めると、被積分関数は $O(\alpha)$ (= 1 次) の量のみであらわされる。ここがミソである。

この副産物として、 $O(\alpha)$ の波の非線形相互作用によって誘導される振幅について 2 次 ($O(\alpha^2)$) の平均流 $\overline{\mathbf{u}_{02}}$ が、

$$\overline{\mathbf{u}_{02}} = \frac{1}{2} \overline{\mathcal{P}[\boldsymbol{\xi}_1 \times \delta \boldsymbol{\omega}]} \quad (29)$$

と一般的な形で導かれる。写像 \mathcal{P} はソレノイダル (発散がゼロになる) 成分を抜き出す射影演算子である。やはり、攪乱振幅について 1 次の量のみでかけている。

Lagrange 変位 $\boldsymbol{\xi}_1$ を支配する方程式として、Frieman-Rosenbluth 方程式が知られている [18]。この方程式は Lagrange 変位 $\boldsymbol{\xi}_1$ の時間発展と攪乱速度場との関係式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U}_0 \times \boldsymbol{\xi}_1) + \mathbf{u}_{01} \quad (30)$$

を Euler 方程式に代入することによっても得られる. いったん Lagrange 変位を得てしまえば, (29) より, 平均流 \bar{u}_0 を決定できる.

パラメータ共鳴を起こす Kelvin 波対の固有モードに対しては, その Lagrange 変位を代入して与えられる攪乱振幅について 2 次エネルギー (27) はゼロであることが示せる. 固有モードに限らなければ, $\delta^2 K$ は有限の定数をとれる.

5 振幅方程式

平均流を含めた $O(\alpha^2)$ をすべて計算できたので, 新たな条件を持ち出すことなく, $O(\alpha^3)$ の計算が可能になる. この $O(\alpha^3)$ で, ふたたび e^{ik_0z} , $e^{i(2\theta+k_0z)}$ のモードが出現する. 線形攪乱と同じ方位波数依存性をもつので, この $O(\alpha^3)$ 攪乱速度場・圧力場を支配する演算子は特異的で, 非斉次項に可解条件を課すことによって, 振幅の時間発展方程式における非線形項を導くことができる. 規格化 $z_{1\pm} = A_{\pm} e^{i\omega_0 t} / \sqrt{|p|}$, $z_{2\pm} = B_{\pm} e^{-i\omega_0 t} / \sqrt{|q|}$, を行うことによって, 次の弱非線形振幅方程式に到達した.

$$\begin{aligned} \frac{dz_{1\pm}}{dt} &= i \left[\varepsilon (\sigma \bar{z}_{2\pm} - p_{12} z_{1\pm}) + \alpha^2 c_{15} z_{1\mp} \bar{z}_{2\pm} z_{2\mp} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 z_{1\pm} (c_{11} |z_{1\pm}|^2 + c_{12} |z_{2\pm}|^2 + c_{13} |z_{1\mp}|^2 + c_{14} |z_{2\mp}|^2) \right], \\ \frac{dz_{2\pm}}{dt} &= i \left[\varepsilon (\sigma \bar{z}_{1\pm} - p_{22} z_{2\pm}) + \alpha^2 c_{25} z_{2\mp} \bar{z}_{1\pm} z_{1\mp} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 z_{2\pm} (c_{21} |z_{1\pm}|^2 + c_{22} |z_{2\pm}|^2 + c_{23} |z_{1\mp}|^2 + c_{24} |z_{2\mp}|^2) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

ここで, $\sigma = \sqrt{|pq|}$ は線形増幅率である. この振幅方程式 (31) の係数をすべて決めることができたが, 平均流 (29) を完全に決定してしまうことなしには達成できないことを強調したい.

振幅方程式に現れる係数が

$$c_{12} = c_{21}, \quad c_{14} = c_{23}, \quad c_{15} = c_{25} \quad (32)$$

という関係をもつとき, (31) はハミルトニアン

$$\begin{aligned} H(z_{1+}, z_{2+}, z_{1-}, z_{2-}) &= \varepsilon [p_{12} (|z_{1+}|^2 + |z_{1-}|^2) + p_{22} (|z_{2+}|^2 + |z_{2-}|^2)] / 2 \\ &\quad - \varepsilon \sigma \text{Re} [z_{1+} z_{2+} + z_{1-} z_{2-}] \\ &\quad + \alpha^2 [-c_{11} (|z_{1+}|^4 + |z_{1-}|^4) / 4 - c_{22} (|z_{2+}|^4 + |z_{2-}|^4) / 4 \\ &\quad - c_{13} |z_{1+}|^2 |z_{1-}|^2 / 2 - c_{24} |z_{2+}|^2 |z_{2-}|^2 / 2 - c_{15} \text{Re} [z_{1+} z_{2+} \bar{z}_{1-} \bar{z}_{2-}] \\ &\quad - c_{12} (|z_{1+}|^2 |z_{2+}|^2 + |z_{1-}|^2 |z_{2-}|^2) / 2 - c_{14} (|z_{1+}|^2 |z_{2-}|^2 + |z_{1-}|^2 |z_{2+}|^2) / 2] \end{aligned} \quad (33)$$

をもつハミルトン系となる [19]. 関係 (32) がかなりの精度で成立することは数値的には確かめることができる. 複素変数 z_i を実部と虚部にわけ, すなわち $z_i = q_i + ip_i$ とおくと, (31) はハミルトンの正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (34)$$

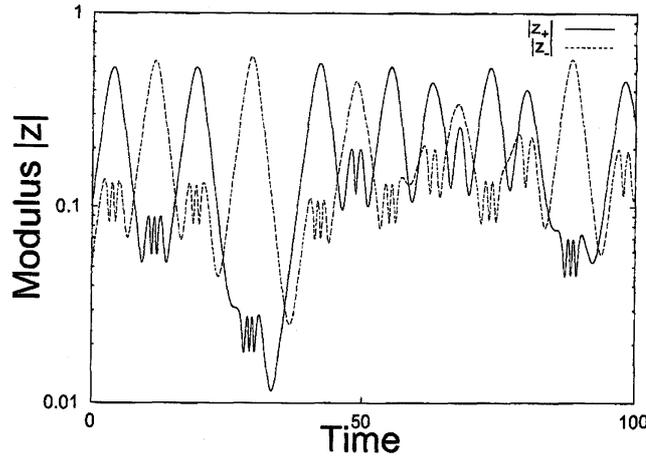


図 4: $|z_{1+}|$ $|z_{1-}|$ の時間発展

に帰着する. すなわち, 振幅方程式 (31) は自由度 4 のハミルトン正準系となる. この方程式系の第一積分 (= 保存量) は 3 個見つかるが, ハミルトニアンに加え, 軸方向の流量

$$J = k_0 (|z_{1+}|^2 - |z_{2+}|^2 - |z_{1-}|^2 + |z_{2-}|^2) \quad (35)$$

と攪乱 2 次のエネルギー

$$\omega_0 (|z_{1+}|^2 - |z_{2+}|^2 + |z_{1-}|^2 - |z_{2-}|^2) \quad (36)$$

と解釈できる. この解釈も平均流を具体的に計算できたご利益である.

定常らせん波共鳴に対するハミルトン・ピッチフォーク分岐の場合 [17] と異なり, 第一積分の数が足りないため, この振幅方程式系は非可積分となる. この攪乱振幅の絶対値 $|z_{1+}|$, $|z_{1-}|$ の時間発展をプロットしたのが Fig.4 である. 定常らせん波モードのとき [17] と異なり, 解は複素攪乱振幅空間でカオス軌道を描く.

6 おわりに

断面が楕円形をした筒状容器内の回転流の弱非線形安定性解析を行った. Kelvin 波の非線形相互作用によって誘導される平均流を導出するのに, オイラー的記述に比べて, ラグランジュ記述の枠組がすぐれている (第 4 節) ことを再度強調しておきたい.

しかし, 振幅方程式の解の振る舞いは, 実験 [6, 7] で観察された無数の波の励起・増幅, そして, それに続く破局的な流れの崩壊とは合致しない. 単一の MSTW 不安定モード自身の非線形相互作用だけでは, 実際の流れを記述するのに用をなさない. 単一モードの成長が非線形的に飽和する前に 2 次不安定, さらに, 3 次不安定が起こって, その後の成長を大きく変えるであろう [11]. これら 2 次・3 次不安定性を扱うにもラグランジュ的扱いが欠かせないだろう.

乱流の大きな特徴の1つは物質の拡散・混合を著しく促進することである。ラグランジュ的方法は、3次元乱流の中で励起された波が誘導するドリフト流、それに由来する質量輸送増大の解明を大きく前進させる可能性を秘めている。

参考文献

- [1] Moore, D. W. and Saffman, P. G.: “The instability of a straight vortex filament in a strain field”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **346** (1975) 413-425.
- [2] Tsai, C.-Y. and Widnall, S. E.: “The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field”, *J. Fluid Mech.* **73** (1976) 721-733.
- [3] Eloy, C. and Le Dizès, S.: “Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field”, *Phys. Fluids* **13** (2001) 660-676.
- [4] Fukumoto, Y.: “The three-dimensional instability of a strained vortex tube revisited”, *J. Fluid Mech.* **493** (2003) 287-318.
- [5] MacKay, R. S.: “Stability of equilibria of Hamiltonian systems”, in *Nonlinear Phenomena and Chaos* (1986), pp. 254-270.
- [6] Malkus, W. V. R.: “An experimental study of global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder”, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **48** (1989) 123-134.
- [7] Eloy, C., Le Gal, P. and Le Dizès, S.: “Experimental Study of the Multipolar Vortex Instability”, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3400-3403.
- [8] Kerswell, R. R.: “Elliptical instability”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34** (2002) 83-113.
- [9] Waleffe, F. A.: “The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence”, PhD thesis. MIT (1989).
- [10] Sipp, D.: “Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex”, *Phys. Fluids* **12** (2000) 1715-1729.
- [11] Mason, D. M. and Kerswell, R. R.: “Nonlinear evolution of the elliptical instability: an example of inertial wave breakdown”, *J. Fluid Mech.* **396** (1999) 73-108.
- [12] Rodrigues, S. B. and Luca, J. D.: “Weakly nonlinear analysis of short-wave elliptical instability”, *Phys. Fluids* **21** (2009) 014108.

- [13] Arnold, V. I.: “Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires”, *J. Méc.* **5** (1966) 29-43.
- [14] Hirota, M. and Fukumoto, Y.: “Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra”, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 083101.
- [15] Hirota, M. and Fukumoto, Y.: “Action-angle variables for the continuous spectrum of ideal magnetohydrodynamics”, *Phys. Plasmas* **15** (2008) 122101.
- [16] Fukumoto, Y. and Hirota, M.: “Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it”, *Phys. Scr. T* **32** (2008) 014041.
- [17] Mie, Y. and Fukumoto, Y.: “Weakly nonlinear saturation of stationary resonance of a rotating flow in an elliptic cylinder”, *J. Math-for-Indus.* **2** (2010) 27-37.
- [18] Frieman, E. and Rotenberg, M.: “On hydromagnetic stability of stationary equilibria”, *Rev. Mod. Phys.* **32** (1960) 898-902.
- [19] Knobloch, E., Mahalov, A. and Marsden, J. E.: “Normal forms for three-dimensional parametric instabilities in ideal hydrodynamics”, *Physica D* **73** (1994) 49-81.