

NEW TOPOLOGIES OF THE GLOBE (MULTI-METRIC STRUCTURE)

AKIO KATO
(加藤 昭男)

ABSTRACT. Inspired by the propagation of seismic waves, we introduce new topologies of the globe representing its multi-metric structure.

1. INTRODUCTION.

私は現在鎌倉の近くに住んでいますが、この京都数理研に来る最も早いルートは、新幹線を使う関係上、一度 横浜方面に逆戻りしなければなりません。目的地に行くのに、目的地から一度遠ざかるわけで、これは、少し妙な感覚です。トポロジストとしては、その度に、距離空間の かの有名な三角不等式に疑問を抱いてしまいます。「三角不等式」によれば、途中寄り道をすれば「遠く」なるはずなのです。ましてや、逆戻りしたら …

この「途中寄り道をすると近くなる」という現象を「距離のパラドックス」と名付けましょう。このパラドックスはどのように解決したらよいのでしょうか？ 実は、地震の波の伝わり方も「距離のパラドックス」現象を呈します。つまり、地震の波は地表を伝わっていくよりも、地中深くを遠回りした方が早く伝わるのです。これは密度が高い物質の方が波を速く伝搬させることによります。地球内部を通過する地震波は Body wave、地球表面を伝わる地震波は Surface wave と呼ばれています。この地震波の現象をヒントにして、この講演を展開します。

どんなパラドックスも何らかの解決法を持っていないと、健康に悪いです。「距離のパラドックス」の一つの解決法として、

「一つの空間に色々な距離が重複して存在する」

と見たらよいのではないかと考えました。地球の内部は大変複雑で、少なくとも 5 つの本質的に違う層（地殻、上部マントル、下部マントル、外核、内核）から成っているのですが、ここでは非常に単純化して、表面（地殻）と内部から成っているとし、内部の密度は深さと共に増大すると仮定しましょう。そうすると、地震の波の伝わり方は地球の内部モデルを用いて研究されていてインターネットを利用すれば色々な映像を見ることができそうですが、そのどれもが、ポアンカレ円板の測地線に類似していることに気が付きます。そこで、次のように考えます。

「地球の中心を通る横断面を単位閉円板とみなし、その内部の開円板 \mathbb{D} は双曲距離 ρ によって支配され、境界の円周 S は通常のユークリッド距離 d によって支配されている。Body wave はポアンカレ円板 \mathbb{D} の測地線を通過し、Surface wave は S を通る。」このように、距離が 2 つ以上ある場合を、多重距離構造 (Multi-Metric structure) と呼ぶことにします。この構造において

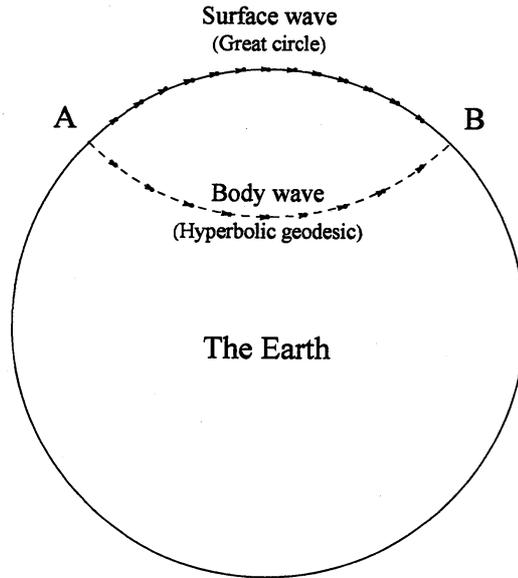


FIG. 1. Simplified model of the Earth.

大切なことは、異なる距離の間を関係を明確にすることで、ここに一般位相が活躍します。

2. WHAT IS THE HYPERBOLIC METRIC ?

さて、まず、双曲距離 (Hyperbolic Metric) を説明します。複素平面上の単位開円板を $\mathbb{D} : |z| < 1$ とします。 \mathbb{D} の相異なる任意の2点 z, w を取ると、この2点を結ぶ円弧または直径で \mathbb{D} の境界である円周 $S : |z| = 1$ と直交するものが \mathbb{D} 内で唯一つ引けます。この円弧または直径は測地線と呼ばれるものですが、これを $L(\alpha, \beta)$ と表します。つまり $\alpha, \beta \in S$ で直交していて $z, w \in L(\alpha, \beta)$ です。双曲距離 $\rho(z, w)$ は

$$\rho(z, w) = |\log(\alpha, z, w, \beta)|$$

と定義されます。ここで (α, z, w, β) は複比 (cross ratio)

$$\frac{w - \alpha}{w - \beta} / \frac{z - \alpha}{z - \beta}.$$

の意味で (4点 α, z, w, β が1つの円周上にありますので) これは正の実数値になります。この双曲距離の特徴的性質は、モービウス変換で不変であることであり、たとえば、モービウス変換によって $L(\alpha, \beta)$ が直径 $L(-1, +1)$ に写され、4点 α, z, w, β がこの順で $-1 < r_1 < r_2 < +1$ に写ったとしますと、距離 $\rho(z, w)$ は

$$(*) \quad \rho(r_1, r_2) = |\log(-1, r_1, r_2, +1)| = \log \frac{1+r_2}{1-r_2} - \log \frac{1+r_1}{1-r_1}.$$

として計算されます。点 z または w が境界 S に近づくと、 $\rho(z, w) \rightarrow \infty$ となりますので、通常のユークリッド距離と違ってきます。つまり、双曲距離の立場から見ると、円周 S は無限遠の境界であり、円周 S のどの2点も無限に離れています。 \mathbb{D} 内において、距離 $\rho(z, w)$ に関して「中心」 z_0 , 「半径」

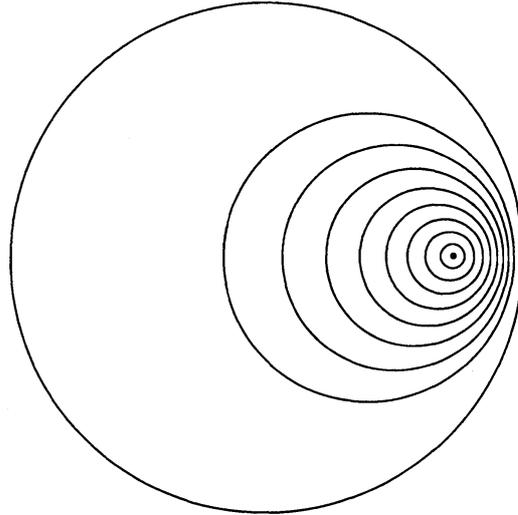


FIG. 2. Hyperbolically Concentric circles.

$0 < r_0 < \infty$ の「円板」

$$B_\rho(z_0; r_0) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z_0, z) < r_0\}$$

を描きますと、これはユークリッド距離的に見ても本当の円板

$$B_d(z_1; r_1) = \{z \in \mathbb{D} : d(z_1, z) < r_1\}$$

になりますが、双曲的中心 z_0 はユークリッド的中心 z_1 より境界 S の方にずれてしまいます。この「ずれ」の様子を表したのが Figure 2 です。「ずれ」はするものの、双曲距離から定まる \mathbb{D} の位相はユークリッド距離から定まる位相と同じです。では、閉円板 $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup S$ まで広げたらどうなるでしょうか？

3. HYPERBOLIC TANGENT DISC TOPOLOGY

Figure 2 から予想されるように、円群の双曲的中心が境界 S に近づいて遂に S に到達した場合には、これらの円群は S に接する円群となりますが、このような円または円板をホロサイクル (horocycle) またはホロボール (horoball) と言います。双曲距離が導く $\overline{\mathbb{D}}$ 上の位相はこのホロボールから定まるものである、と考えるのが自然です。

以上の考察から、topology τ_ρ on the closed disc $X = \overline{\mathbb{D}}$ を次のように定めます。点 $x \in S$ 及び $0 < s \leq 1$ に対し、点 x で境界 S に接し (ユークリッド距離で測った) 直径が s の開円板に点 x を合わせた

$$V(x; s) = \{x\} \cup B_d((1-s/2)x; s/2)$$

を考え、これを *horoball at x of size s* と呼びます。 x と s を動かしたときのこれらすべての horoballs と、もともとの開円板 \mathbb{D} の通常の位相とを合わせて得られる位相を τ_ρ と表し、*Hyperbolic Tangent Disc topology* と呼びます。

この位相は (Nemytskii's tangent disc topology と同じで) completely regular Hausdorff であり、双曲距離から導かれるものとしては最も自然な位相

なのですが、残念ながら境界 S が非可算な離散閉集合となってしまう normal になりません。そこで、次章でこの欠点を改善していくことを考えます。

ちょっと地震の話にもどりましょう。ホロボール $V(x; t)$ の周円 $\partial V(x; t)$ を C_t と記しますと、ホロボール $V(x; s)$ は

$$V(x; s) = \bigcup_{0 < t < s} C_t$$

と表されます。つまり、ホロボール $V(x; s)$ は x を「中心」とする「同心円」 C_t ($0 < t < s$) から成っているわけで、しかも $0 < t_1 < t_2 < s$ に対し $C_{t_1} \setminus \{x\}$ と $C_{t_2} \setminus \{x\}$ の双曲距離 $\rho(1-t_1, 1-t_2)$ は t_1, t_2 のみに依存する量です(次の Lemma 1 参照)。従いまして、地震が点 x で起ったとしますと、時刻 s までに Body wave は波面 C_t ($0 < t < s$) を形成しながら、 $V(x; s)$ に広がるわけです。一方、表面波 Surface wave は点 x を含む S の或る円弧 J に伝わります。よって、地震波は或る時刻までに $V(x; s) \cup J$ の形の集合に広がるわけです。この事実を念頭において、次に、新しい位相を導入します。

4. STRATIFIABLE TOPOLOGY.

$J = a \frown b$ を端点 a, b を持つ S 上の open arc とし、 g を J から半開区間 $(0, 1]$ への任意の関数とします。この g は必ずしも連続とは限りません。 J の各点 x でサイズ $g(x)$ のホロボール $V(x; g(x))$ をとり、これらの和集合を

$$V(g) = \bigcup_{x \in J} V(x; g(x))$$

と記します。 J と g を動かしたときのすべての $V(g)$ と開円板 \mathbb{D} の通常の位相とを合わせて得られる $X = \mathbb{D} \cup S$ 上の新しい位相を τ と表します。 $V(g)$ の形は Figure 3 を参考にしてください。この位相ではホロボール自体は既に open ではありませんので、新位相 τ は前節の τ_ρ よりも真に粗いこととなります。また明らかに (X, τ) はユークリッド位相をもつ開円板 \mathbb{D} とユークリッド位相をもつ円周 $S = S^1$ との和になっていることに注意してください。この位相が我々の求めていたものです。地震波の考察から最も自然に導入される位相だと思われまます。この (X, τ) が σ -closure preserving open base をもつ regular space であること、従って stratifiable (M_3 space) になることを示しましょう。

その前に、このトポロジー τ は “adjunction space” を利用しても構成されることを指摘しておきます。

前節の tangent disc topology をもつ空間 (X, τ_ρ) を $X_0 = \mathbb{D} \cup S_0$ と表すことにします。つまり S_0 は discrete topology をもつ円周で、一方記号 S はユークリッド位相をもつ円周を表すとします。 φ を S_0 から S への identity map とすれば、これは X_0 の discrete closed subspace S_0 から円周 S の上への 1-1 連続写像になります。Adjunction space $X_0 \cup_\varphi S$ を作れば、これが (X, τ) そのものです。Adjunction space の構成でどんな性質が保存されるかは、よく研究されています。つまり、「空間 Y, Z の両方が或る性質 P を持てば adjunction space $Y \cup_h Z$ も或る性質 P を持つ」という形の定理ですが、このような P としては、“normal,” “monotonically normal,” “stratifiable”

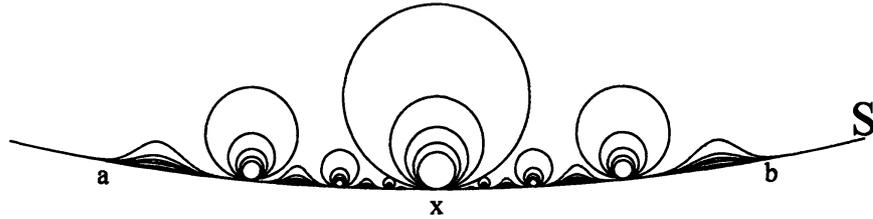


FIG. 3. Some typical neighborhoods.

などが知られています。(monotonically normal の場合は三輪先生の結果 [5] です。)しかし、我々の場合、もとになる空間 X_0 が normal にさえなりませんので、残念ながらこれらの保存定理は適用できません。それでは、先ず τ が regular になることを見ましょう。これは、直ちに明らか、というわけではありません。次の lemma は双曲距離とユークリッド距離がホロボールを仲介して、どのように関係しているかを示しているもので、これ自体おもしろいと思います。

Lemma 1. $x \in S$, $0 < s \leq 1$ とする。ホロボール $V(x; s)$ の外側と $1/3$ に縮めたホロボール $V(x; 3^{-1}s)$ との双曲的距離は 1 より大きい:

$$\rho(V(x; 3^{-1}s) \setminus \{x\}, \mathbb{D} \setminus V(x; s)) > \log_e 3 = 1.098 \dots > 1$$

Proof. 回転によって $x = 1$ としてよい。このとき $V(x; 3^{-1}s)$ と $\mathbb{D} \setminus V(x; s)$ の双曲距離は $r_1 = 1 - s$ と $r_2 = 1 - 3^{-1}s$ の双曲距離 $\rho(r_1, r_2)$ に等しい。Section 2 の公式 (*) を使うと

$$\rho(r_1, r_2) = \log \frac{1 + r_2}{1 + r_1} + \log \frac{1 - r_1}{1 - r_2}$$

$r_2 > r_1$ だから第 1 項は正であり、第 2 項はちょうど $\log 3$ に等しい。□

Open set $V(g)$ に対し $V(3^{-1}g)$ を考えると、これは $V(x; 3^{-1}g(x))$ for $x \in J$ の和であり、Lemma 1 から各 $V(x; 3^{-1}g(x))$ と $\mathbb{D} \setminus V(g)$ の距離は 1 より大きいですから、

Lemma 2. $V(3^{-1}g)$ と $\mathbb{D} \setminus V(g)$ との双曲的距離は 1 より大きい。

τ による closure を cl_τ と表すと $cl_\tau V(g)$ は次のように決まります。ただし $[J]$ は J にその端点を付加した closed arc を表し、 $cl_\rho(V(g) \setminus J)$ は $\rho(z, V(g) \setminus J) = 0$ を満たす点 $z \in \mathbb{D}$ の全体です。

Lemma 3.

$$cl_\tau V(g) = [J] \cup cl_\rho(V(g) \setminus J)$$

Proof. 右辺を E とおくと、この E が topology τ について closed になることを示せばよい。実は、さらに強く、Euclidean metric d について closed になることを示せる。 $X \setminus E$ から任意の点 z をとる。 z が \mathbb{D} の点の場合、集合 $\mathbb{D} \setminus cl_\rho(V(g) \setminus J)$ は明らかに E と交わらない ρ -open (従って d -open) neighborhood of z である。よって $z \in S \setminus [J]$ の場合を考える。直径が 1 のホロボール $V(x; 1)$ にその境界円を付け加えた集合を $\bar{V}(x; 1)$ と表し、 $F = \bigcup \{\bar{V}(x; 1) : x \in [J]\}$ とおけば、これは $V(g)$ を含むが z を含まない Euclidean closed set である。よって、 $X \setminus F$ は E と交わらない d -open neighborhood of z である。□

Property 1. Topology τ は regular である。

Proof. 明らかに S の点 x で regularity をチェックすればよい。 $x \in V(g)$, $g : J \rightarrow (0, 1]$ とせよ。Open arc $K = c \cap d$ で $x \in K \subset [K] = K \cup \{c, d\} \subset J$ となるものを取り、 g を K に制限した関数を h とする。Lemma 3 より

$$x \in V(3^{-1}h) \subseteq cl_\tau V(3^{-1}h) = [K] \cup cl_\rho(V(3^{-1}h) \setminus K)$$

であり、また Lemma 2 から $cl_\rho(V(3^{-1}h) \setminus K) \subseteq V(h)$ である。ゆえに $cl_\tau V(3^{-1}h)$ は $J \cup V(h) \subseteq V(g)$ に含まれる。□

一旦、 τ が regular であることが判明すれば、 τ の色々な良い性質を導きだせます。たとえば (X, τ) は (S 自身 compact だから) compact sets の可算和、従って regular Lindelöf であり paracompact になります。

次に、 (X, τ) の σ -closure preserving open base を構成します。開円板 \mathbb{D} の locally finite cover \mathcal{B} で ρ -diameter ≤ 1 の open balls から成るようなものを 1 つ取って固定します。 X の任意の subset A に対し、その「 \mathcal{B} -拡大」 $A^\mathcal{B}$ を

$$A^\mathcal{B} = A \cup \bigcup \{B \in \mathcal{B} : A \cap B \neq \emptyset\}$$

により定めます。このとき $V(x; s)^\mathcal{B} = \{x\} \cup (V(x; s) \setminus \{x\})^\mathcal{B}$, $V(g)^\mathcal{B} = J \cup (V(g) \setminus J)^\mathcal{B}$ となります。Lemma 1 及び Lemma 2 によれば

$$V(x; 3^{-1}s) \subseteq V(x; 3^{-1}s)^\mathcal{B} \subseteq V(x; s); \quad V(3^{-1}g) \subseteq V(3^{-1}g)^\mathcal{B} \subseteq V(g)$$

となりますが、これは、 $V(g)$ の形の open sets から成る何らかの collection が S の或る点の周りの neighborhood base になれば、対応する $V(g)^\mathcal{B}$ の collection もその点の neighborhood base になることを示しています。

或る collection of sets が closure preserving であるとは、そのどんな sub-collection についても closure of the union が union of the closures に一致するということです。いま、 S 上の或る open arc J を固定して、関数 g を J から半開区間 $(0, 1/3]$ へのすべての関数について渡らせたときの $V(g)^\mathcal{B}$ の形の open sets 全体を $\mathcal{V}^\mathcal{B}(J)$ と表しますと

Lemma 4. $\mathcal{V}^\mathcal{B}(J)$ は closure preserving in (X, τ) である。

Proof. \mathcal{G} を関数 $g : J \rightarrow (0, 1/3]$ から成る任意の collection とする。 $cl_\tau(\bigcup_{g \in \mathcal{G}} V(g)^B)$ が $\bigcup_{g \in \mathcal{G}} cl_\tau(V(g)^B)$ に含まれることを示せばよい。

$g \in \mathcal{G}$, $x \in J$ とせよ。 $V(x; g(x))^B \subseteq V(x; 3g(x)) \subseteq V(x; 1)$ だから、Lemma 3 の証明中のと同じ Euclidean closed set $F = \bigcup\{\bar{V}(x; 1) : x \in [J]\}$ を考えれば $V(g)^B \subseteq F$ 従って $\bigcup_{g \in \mathcal{G}} V(g)^B \subseteq F$ となる。よって Lemma 3 の証明と同様にして

$$cl_\tau(V(g)^B) = [J] \cup cl_\rho(V(g)^B \setminus J)$$

$$cl_\tau\left(\bigcup_{g \in \mathcal{G}} V(g)^B\right) = [J] \cup cl_\rho\left(\bigcup_{g \in \mathcal{G}} V(g)^B \setminus J\right)$$

となることがわかる。ゆえに $\{V(g)^B \setminus J : g \in \mathcal{G}\}$ が closure preserving in (\mathbb{D}, ρ) であることを言えば十分であるが、このことは $V(g)^B \setminus J$ が \mathbb{D} において locally finite な cover \mathcal{B} の元から構成されているという事実から明らかに従う。□

Open arcs J_i ($i \in \omega$) で円周 S の open base になるようなものを選び、 $\bigcup_{i \in \omega} \mathcal{V}^B(J_i)$ を考えれば、これは neighborhood base for points at S になり、上の Lemma 4 から σ -closure preserving です。よって、これに (\mathbb{D}, ρ) の countable open base を合わせれば、次の結果を得ます。

Theorem 1. (X, τ) は σ -closure preserving open base を持つ。従って stratifiable である。

Generalized metric spaces の中では、stratifiable (or M_3) spaces は非常に安定した良いクラスを成しています。たとえば、stratifiable space のどんな subspace もまた stratifiable であり、stratifiable space をどんな closed map で写してもまた stratifiable になります。従って、 (X, τ) の任意の subspace は stratifiable space であり、その任意の closed image も stratifiable です。

5. NON-METRIZABILITY.

ここで、我々が作った空間 (X, τ) は metrizable にはならないことを指摘しておきましょう。実際、さらに強く、Fréchet という性質に注目しますと、 (X, τ) は metric space の closed image としては表されないことが言えます。

空間 Y の中に点 y をとるとき「 $y \in cl A$ となるどんな subset A に対しても A の中に convergent sequence a_n で $a_n \rightarrow y$ となるものが取れる」ならば Y は y において Fréchet と言われます。もし、空間 Y が或る metric space の closed image になるならば、どの点 y においても Fréchet になることは、すぐに確かめられます。よって、次の結果は (X, τ) が metric space の closed image としては表されないことを示しています。

Property 2. (X, τ) は境界 S のどの点においても Fréchet ではない。もちろん first countable でもない。

Proof. 境界 S の任意の点 x_0 をとり、 $\bar{V}(x_0; 1)$ を Lemma 3 の証明中に用いた閉ホロボールとします。部分集合 $A = \mathbb{D} \setminus \bar{V}(x_0; 1)$ を考えますと、明

らかに $x_0 \in S \subset cl_\tau A$ です。もし、 x_0 に (位相 τ の意味で) 収束する点列 $C = \{a_n : n \in \omega\}$ が A の中にあった、と仮定しましょう。ユークリッド位相は τ より粗いですから、 $C \cup \{x_0\}$ はユークリッド位相についても compact、従って、閉になっています。よって、点 x_0 を含む任意の open arc J をとりますと、 x_0 以外の J の点 x の回りで $C \cup \{x_0\}$ と交わらないホロボール $V(x; s_x)$ を取ることができます。関数 $g : J \rightarrow (0, 1]$ を $g(x_0) = 1$ and $g(x) = s_x$ for $x \in J \setminus \{x_0\}$ となるように選びますと、 x_0 の τ -近傍 $V(g)$ は C を含みませんので、矛盾です。□

6. SHAPE OF NEIGHBORHOODS AT THE BOUNDARY.

次に、境界 S の点の回りの近傍の形を詳しく調べてみます。実は、これが意外と曲者で、単純ではありません。閉円板 \mathbb{D} 上のユークリッド位相を改めて τ_d と明記します。値 $c \in (0, 1]$ をとる定数値関数 $h_c : J \rightarrow (0, 1]$ に対しては、 $V(h_c)$ は枕の形をした近傍になり、明らかに τ_d に属します。一般に、 $V \in \tau$ に対し $V \cap S$ の点を次のように 2 種類に分けます：点 $x \in V \cap S$ が $x \in U \subset V$ となるユークリッド近傍 $U \in \tau_d$ を持つならば、点 x を *Euclidean point of V* と呼び、そうでない点 $x \in V \cap S$ は *non-Euclidean points of V* と呼ぶことにします。 V の Euclidean points 全体を $Ec(V)$ と表し、non-Euclidean points 全体を $Nec(V)$ と表すことにします：

$$V \cap S = Ec(V) \cup Nec(V)$$

(“Non-Euclidean” の意味で “Nec” としたのですが、幾何学的イメージとしては “Neck” になっています！ Neck でない所が Ec です!?)

明らかに $Ec(V)$ は $V \cap S$ の open set になりますが、実は open dense set になります。言い換えますと、 $Nec(V)$ は nowhere dense closed set in $V \cap S$ です。このことを示すには、 $Ec(V(g))$ について示せば十分です。

Property 3. $Ec(V(g))$ は open dense subset in $J = \text{dom}(g)$ である。

Proof. $G_n = g^{-1}((1/n, 1])$ とおくと、 J は G_n ($n \geq 2$) の可算和になるから、Baire Category theorem により、或る m に対し $cl G_m$ は J で non-empty interior を持つ。つまり、proper open arc $I \subset J$ で $I \cap G_m$ が dense in I となるようなものが存在する。 G_m の定義より、すべての $x \in I \cap G_m$ に対し、固定サイズ $1/m$ のホロボール $V(x; 1/m)$ で $V(x; g(x)) \subseteq V(g)$ に含まれるものがとれる。 $I \cap G_m$ は dense in I ゆえ $I \cup \{V(x; 1/m) : x \in I \cap G_m\}$ は値 $1/m$ をとる定数関数 $h : I \rightarrow (0, 1]$ のつくる開近傍 $V(h)$ と同じになる。 $V(h) \in \tau_d$ だから、 I のすべての点は Euclidean points である。以上の証明は、 g を J のどんな subarc に制限したのものについても同様に実行できるから、Property 3 が主張できる。□

よって、 $V(g)$ の non-Euclidean points 全体 $Nec(V(g))$ は $\text{dom}(g)$ の nowhere dense closed set を成します。これが countable set になってくれれば事は単純なのですが、そうはいかない例をつぎに示します。

いま、 S 上の各点 a に対し、関数 $h_a : S \rightarrow [0, 1]$ を

$$h_a(x) = (1 - \cos \theta)/2 \quad \text{where} \quad \theta = \text{the arc length of } a \hat{\ } x$$

と定め、これを用いて、長さが π より小さい S 上の open arc $J = a \hat{\ } b$ に対し、関数 $h_J: J \rightarrow (0, 1]$ を $h_a \wedge h_b$ すなわち

$$h_J(x) = \text{Min} \{h_a(x), h_b(x)\}$$

により定めます。これは open arc J の上に張ったテントのような形の関数ですが、この h_J を *the ceiling function on J* と呼ぶことにします。また、関数 h が或る union of disjoint open arcs 上で定義され、各 open arc 上で ceiling function なっているときも h を ceiling function と呼びます。

Lemma 5. $V(h_J)$ は $V(a; 1) \cup V(b; 1)$ と交わらない。

Proof. 点 $x \in J$ を fix し、 $\theta = \text{arc length of } a \hat{\ } x$ とする。対称性から、 $V(x; h_a(x))$ が $V(a; 1)$ と交わらないことを示せば十分である。点 x とホロボール $V(a; 1)$ とのユークリッド距離 ε は

$$\varepsilon = \sqrt{5/4 - \cos \theta} - 1/2$$

となり、 $\varepsilon \geq (1 - \cos \theta)/2 = h_a(x)$ となる。よって、ホロボール $V(x; h_a(x))$ は、 $V(a; 1)$ と交わらないユークリッド開円板 $B_d(x; \varepsilon)$ に含まれる。□

$S_{a,b}$ を円板 \mathbb{D} の中心 O と arc $J = a \hat{\ } b$ で張られる扇形とし

$${}_a A_b = S_{a,b} \setminus (V(a; 1) \cup V(b; 1) \cup V(h_J))$$

とおきますと、この集合は曲三角形となります。このような図形はアルベロス (arbelos) と呼ばれていますので、 ${}_a A_b$ を「 a, b から定まるアルベロス」と呼ぶことにします。 ${}_a A_b$ は象形文字になっています!) ${}_a A_b$ はその定義から、位相 τ については closed ですが、ユークリッド位相 τ_d については点 a, b を集積点として持つことに注意します。

Example 1. $J = a \hat{\ } b$ を長さが π より小さい S 上の open arc とし、 C を J の中に埋め込まれている homeomorph of the Cantor set とします。 J の open dense subset $J \setminus C$ は disjoint union of open arcs の形で表せますので、それを $\cup_{n \in \omega} J_n$, $J_n = a_n \hat{\ } b_n$ とします。 $h: J \rightarrow (0, 1]$ を C 上では定数値 1 をとり、 $J \setminus C$ 上では ceiling function つまり、 $h = h_{J_n}$ on each J_n となる関数と定め、この $V(h)$ の構造を調べてみます。 $V_C = \bigcup_{y \in C} V(y; 1)$ とおきますと $\{a_n, b_n \mid n \in \omega\}$ は dense in C ですから

$$V_C = C \cup \bigcup_{n \in \omega} (V(a_n; 1) \cup V(b_n; 1))$$

となります。よって、Lemma 5 より、 $V(h)$ は disjoint union

$$V(h) = V_C \cup \bigcup_{n \in \omega} V(h_{J_n})$$

の形になっています。ユークリッド位相 τ_d で考えますと、 J_n の端点 a_n, b_n は $V(h)$ の外にあるアルベロス $a_n A_{b_n}$ の集積点になっていますから、 a_n, b_n は $V(h)$ の non-Euclidean points になっています。しかも $\{a_n, b_n | n \in \omega\}$ は dense in C ですから、 C の点はすべて non-Euclidean points になります。一方、明らかに $J \setminus C$ の点は Euclidean points です。よって、 $Nec(V(h)) = C$ となり、近傍 $V(h)$ は非可算な nowhere dense closed set C を non-Euclidean points として持つ例になっている、ということになります。□

一般に、 $V_1 \subseteq V_2$ であるときは、 V_2 の non-Euclidean point は、それが V_1 の点である限り、 V_1 の non-Euclidean point にもなっています、つまり $V_1 \cap Nec(V_2) \subset Nec(V_1)$ です。この事実と Example 1 を使うと、次がわかります。

Property 4. S の任意の点 x_0 に対し、その回りの任意の τ -近傍系 $\mathcal{V}(x_0)$ は、「非可算個の non-Euclidean points を持つ」近傍を必ず含む。

Proof. $x_0 \in C \subset J \subset S$ となる Cantor set C 及び open arc J をとります。 J は長さが π より小さいとしておきます。Example 1 で定義した $V(h)$, $h : J \rightarrow (0, 1]$ を考えると、 $C = Nec(V(h))$ となっています。この x_0 の近傍 $V(h)$ に含まれる任意の $W \in \mathcal{V}(x_0)$ をとれば、 $W \cap C = W \cap Nec(V(h)) \subset Nec(W)$ となります。 $W \cap C$ は非可算ですから、この W は求めるものです。□

Property 5. $V \in \tau$ が非可算個の non-Euclidean points を持つならば、 V は次の性質をもつ単純閉曲線 l を含む：

$l \cap S$ は proper closed arc であり、 l の内部は $\mathbb{D} \setminus V$ の点を含む。
従って、 V は simply connected ではない。

Proof. V が非可算個の non-Euclidean points を持つとする。 $V \cap S$ は可算個の disjoint open arcs の和だから、その中の1つの open arc J の中に非可算個の non-Euclidean points が入っているとしてよい。しかも、これらの non-Euclidean points は J で closed set を成すとしてよい。よって初めから、 $C \subset J \subset V(g) \subset V$, $g : J \rightarrow (0, 1]$ としてよい。ここで C は Cantor set のコピーであり、 C の点はすべて V の non-Euclidean points である。 $J \setminus C = \bigcup_{n \in \omega} a_n \widehat{b}_n$, $C_* = C \setminus \{a_n, b_n : n \in \omega\}$ とおく。 C_* の点は通常「 C の inner points」と呼ばれています。各 inner point $x \in C_*$ 上でホロボール $V(x; g(x))$ を考えると、 C_* は非可算であり、互いに交わらない非可算個の円板は平面上に存在しないから、相異なる2点 $x_1, x_2 \in C_*$ で $V(x_1; g(x_1)) \cap V(x_2; g(x_2)) \neq \emptyset$ となるものが存在する。 $B_i = V(x_i; g(x_i))$ ($i = 1, 2$) とおく。ホロボール B_1, B_2 のユークリッド的中心 z_1, z_2 を $B_1 \cup B_2$ の中で結んだ arc を $\widehat{z_1 z_2}$ とする。この arc と $\overline{x_1 z_1}$ (B_1 の半径), $\overline{x_2 z_2}$ (B_2 の半径) 及び S 上の arc $x_1 \widehat{x_2}$ を結んでできる単純閉曲線を l とすれば、これが求めるものである。実際、もし、平面上で考えた l の内部 D が完全に V に含まれてしまうとすると、open arc $x_1 \widehat{x_2}$ の各点は V の Euclidean point になってしまう。一方、 x_1, x_2 は C の inner points だったから、open arc $x_1 \widehat{x_2}$ は C の点、すなわち V の non-Euclidean point を含むことになり、矛盾である。

ゆえに、 l の内部 D は V に属さない点を含む。□

以上の結果から、位相 τ の定義自体は単純なのですが、境界 S の点の周りの近傍の形はかなり複雑であることが判明しました。と同時に、複雑になってしまう原因として「非可算個の non-Euclidean points」の存在が特定できました。もともとは、地震波の話から派生（波生？）したことなのですが、純粋数学で捉えようとして、純粋数学特有のトラウマとでも言える「非可算」のワナに落ち込んでしまった感がします。次に、このワナから浮かび上がることを考えます。

7. SIMPLIFIED TOPOLOGIES.

$V(g)$ の non-Euclidean points 全体 $Nec(V(g))$ が countable となるようなものを考えたいのですが、もし $V(g)$ がそのようなものであっても、それを縮めた $V(3^{-1}g)$ は非可算な $Nec(V(3^{-1}g))$ をもってしまうことがあります。このような事態を避けるために、位相 τ の neighborhoods の構造を、もう少し詳しく調べておく必要があります。

一般に、関数 $g: J \rightarrow (0, 1]$ が不連続となる点 $x \in J = \text{dom}(g)$ の全体を $D\langle g \rangle$ と表し、 g の *discontinuous part* と呼ぶことにしましょう。一般的に、 $D\langle g \rangle$ 自身は closed set になるとは限りません。また、 $D\langle g \rangle$ の点は必ずしも $V(g)$ の non-Euclidean point にはなりません（ g が連続となる点は明らかに $V(g)$ の Euclidean point ですから） $V(g)$ の non-Euclidean points は $D\langle g \rangle$ に属します。よって、

$$Nec(V(g)) \subset D\langle g \rangle$$

ですが、これらが一致してくれると扱いやすいですので、そのための条件を調べます。いま、次の条件を満たす関数 $g: J \rightarrow (0, 1]$ を考えます。

- (*) g は continuous on some open dense subset U of J であり、しかもこの U 上では $g \leq h_U$ となっている。

つまり、 U を disjoint open arcs の和 $\cup_{n \in \omega} J_n$ として表すと、各 open arc J_n 上では continuous で、ceiling function h_{J_n} で押さえられている、という条件です。もちろんこの U は g に depend します。 J を固定したとき、条件 (*) を満たす関数 g の全体を $G(J; *)$ と表し、 J をすべて動かしたときの全体を $G(*)$ と表すことにします。

Property 6. $g \in G(*)$ ならば、 $Nec(V(g)) = D\langle g \rangle$ である。

Proof. $F = J \setminus U$ とおくと、Example 1 の証明と同様にして、 $F \subset Nec(V(g))$ となることがわかります。従って、 $F \subset Nec(V(g)) \subset D\langle g \rangle$ です。然るに、 g は U 上で continuous としてありますから、 $D\langle g \rangle \cap U = \emptyset$ すなわち $D\langle g \rangle \subset F$ です。□

Property 7. (1) 任意の $f: J \rightarrow (0, 1]$ に対し $V(g) \subset V(f)$ となる $g \in G(J; *)$ で、 $Nec(V(g)) = Nec(V(f))$ となるものがとれる。

(ただし、 $g \leq f$ とは限らない。)

(2) $g_1, g_2 \in \mathbb{G}(J; *)$ に対し、 $g_1 \wedge g_2(x) = \text{Min} \{g_1(x), g_2(x)\}$ を考えると $g_1 \wedge g_2 \in \mathbb{G}(J; *)$ となる。また明らかに $V(g_1 \wedge g_2) \subset V(g_1) \cap V(g_2)$ である。

Proof. (1) $Ec(V(f))$ を disjoint union of open arcs で表したものを $U = \cup_{n \in \omega} J_n$ とし、 f を J_n に制限したものを f_n とすると、 $V(f_n)$ は J_n を含む Euclidean open set だから、明らかに、 $J_n \subset V(g_n) \subset V(f_n)$ となる continuous function $g_n \leq h_{J_n}$ がとれる。(ただし、 f_n は J_n 上では continuous とは限らないので、 $g_n \leq f_n$ にとれるとは言えない。) 求める g としては、各 J_n 上では g_n に一致し、 U の外では f に一致するものをとればよい。

(2) $g_i (i = 1, 2)$ に対応する open dense set in $(*)$ を $U_i (i = 1, 2)$ とすると、 $g_1 \wedge g_2$ に対応する open dense set は $U_1 \cap U_2$ である。また、 $g_i (i = 1, 2)$ を押さえる ceiling function を $h_i (i = 1, 2)$ とすると、 $g_1 \wedge g_2$ を押さえる ceiling function は $h_1 \wedge h_2$ on $U_1 \cap U_2$ である。□

以上から、 $\mathbb{G}(*)$ から定まる neighborhoods $\{V(g) : g \in \mathbb{G}(*)\}$ は S の点の周りの、 τ の neighborhood base になることがわかりました。しかも、 $D\langle g \rangle = \text{Nec}(V(g))$ ですから、この場合の $D\langle g \rangle$ は closed set in $\text{dom}(g)$ です。そこで、この $\mathbb{G}(*)$ の中から更に性質

(*) $D\langle g \rangle$ は countable である。

を満たす関数 g の全体を抽出し、これを $\mathbb{G}(\text{ctbl})$ と表します (ここでの countable は countably infinite の意味です)。また、 $J = \text{dom}(g)$ を固定したものの全体は $\mathbb{G}(J; \text{ctbl})$ と表すことにします。条件 (*) における g は $\mathbb{G}(*)$ から選んでいますから、Property 6 より (*) は

$D\langle g \rangle$ は countable closed in $\text{dom}(g)$ である。

と言っても同じです。

$g \in \mathbb{G}(\text{ctbl})$ に対応するすべての近傍 $V(g)$ と円板 \mathbb{D} の通常の位相とを合わせて得られる位相 $\tau(\text{ctbl})$ を考えましょう。これは、明らかに τ より粗い位相ですが、かなり良い性質をもちます。 $g_1, g_2 \in \mathbb{G}(J; \text{ctbl})$ に対し $D\langle g_1 \wedge g_2 \rangle \subseteq D\langle g_1 \rangle \cup D\langle g_2 \rangle$ ですから $D\langle g_1 \wedge g_2 \rangle$ は countable set で、Property 7 (2) と合わせると $g_1 \wedge g_2 \in \mathbb{G}(J; \text{ctbl})$ が言えます。従って $\mathbb{G}(\text{ctbl})$ から定まる neighborhoods $\{V(g) : g \in \mathbb{G}(\text{ctbl})\}$ は S の点の周りの、 $\tau(\text{ctbl})$ の neighborhood base になることがわかります。また、 $g \in \mathbb{G}(\text{ctbl})$, $t \in (0, 1]$ ならば $D\langle t \cdot g \rangle = D\langle g \rangle$ 従って $t \cdot g \in \mathbb{G}(\text{ctbl})$ ですから、 $\mathbb{G}(\text{ctbl})$ はこの縮小操作に対しても閉じています。よって、Section 4 におけると同様にして、 $(X, \tau(\text{ctbl}))$ も regular and stratifiable になることがわかります。

さて、 $g \in \mathbb{G}(\text{ctbl})$ に対しては $D\langle g \rangle$ は countable ですから、この点を重複なしに $\{c_n : n \in \omega\}$ と数え上げておけば induction によりホロボール $V(c_n; s_n)$ ($n \in \omega$) が交わらないようにサイズ $0 < s_n \leq g(c_n)$ を選ぶことができます。 c_n においては値 s_n をとり、 $D\langle g \rangle$ 以外では g と一致する関数を \tilde{g} と

表せば、もちろん $\tilde{g} \in \mathbb{G}(\text{ctbl})$ となります。よって、 $J = \text{dom}(g)$, $J \setminus D\langle g \rangle = \bigcup_{i \in \omega} J_i$ としておけば、neighborhood $V(\tilde{g})$ はホロボール $V(c_n; s_n)$ と Euclidean open sets $V(g \upharpoonright J_i)$ との disjoint union

$$\bigcup_{n \in \omega} V(c_n; s_n) \cup \bigcup_{i \in \omega} V(g \upharpoonright J_i)$$

として表されます。 $V(t \cdot \tilde{g})$ を考えて、 t を 1 から 0 まで動かせば、 $V(\tilde{g})$ は J に contract され、 J は明らかに 1 点に contract されますから、 $V(\tilde{g})$ は contractible in itself になります。よって、

Property 8. $(X, \tau(\text{ctbl}))$ は *locally contractible* である。

Contractible set は simply connected ですから、この結果は Property 5 と対照的で、位相 $\tau(\text{ctbl})$ が τ と異なる、つまり、 $\tau(\text{ctbl})$ は τ よりも真に粗いことも示しています。この $\tau(\text{ctbl})$ の方が τ より幾何学的に単純で扱い易いように、地震波から派生する位相的構造を、より忠実に反映しているものと思われます。

実は、位相 $\tau(\text{ctbl})$ を更に単純にすることができ、そのような例を 2 つ示します。まず、 $\mathbb{G}(\ast)$ の中で性質

(**) $D\langle g \rangle$ は finite である。

を持つ g の全体を $\mathbb{G}(\text{fn})$ と記し、対応する位相 $\tau(\text{fn})$ を考えます。明らかに、「 $D\langle g \rangle$ は 1 点である」というものの全体を考えても同じで、 S の点 x のまわりの neighborhood base としては、

$$V(g) = V(x; g(x)) \cup V(g \upharpoonright J_0) \cup V(g \upharpoonright J_1)$$

(g は continuous on $J \setminus \{x\} = J_0 \cup J_1$ で、 $V(x; g(x))$, $V(g \upharpoonright J_0)$, $V(g \upharpoonright J_1)$ は互いに disjoint) の形のものをとれます。 $\tau(\text{ctbl})$ の場合と同様に、 $\tau(\text{fn})$ も regular, Lindelöf, stratifiable かつ locally contractible です。この $V(g)$ は、どんな countable subset を差し引いても 3 個より多くの components には分かれませんが、Property 8 の前で述べた $V(\tilde{g})$ は countable subset $\{c_n : n \in \omega\}$ を差し引けば、可算無限個に分解してしまいます。このことから、 $\tau(\text{fn})$ は $\tau(\text{ctbl})$ と異なる、つまり $\tau(\text{ctbl})$ より真に粗いことがわかります。この $\tau(\text{fn})$ は g の任意性から first countable にはなりません、 g をもっと制限することにより、first countable な位相を作れることを、最後に指摘しておきます。

$x \in S$ 及び $0 < \varepsilon \leq 1$ に対し、 x を中点とする open arc で長さ ε のものを $J_{x,\varepsilon}$ とします。 $J_{x,\varepsilon} \setminus \{x\}$ 上では ceiling function で、 x では値 1 をとるような $J_{x,\varepsilon}$ 上の関数を $h_{x,\varepsilon}$ と記し、

$$V(t \cdot h_{x,\varepsilon}) \text{ for } x \in S, 0 < t, \varepsilon \leq 1$$

を S の点の回りの neighborhoods として作られる位相を $\tau(N)$ とします。 $t = \varepsilon = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) のケースのみを考えても neighborhood base になりますから、 $(X, \tau(N))$ は first countable になります。また regular, Lindelöf, stratifiable になることも確認されます。First countable, stratifiable space は別名 Nagata space と呼ばれていますので、その N をとって、 $\tau(N)$ と表記しました。 $\tau(\text{ctbl})$ も $\tau(\text{fn})$ も Fréchet にならないことは Property 2 と同様

にして確かめられますが、 $\tau(N)$ は Fréchet です … なぜなら first countable ですから。それにもかかわらず、次が言えます。

Property 9. $(X, \tau(N))$ は、weight が連続体の濃度 c であり、metric space の closed image として表わされない。

Proof. 花井-森田-Stone の定理 (cf. 4.4.17 in [3]) によれば、metric space の closed image として表わされる空間は、それが first countable ならば metrizable になります。よって、metric space の closed image として表わされないことを示すには、 $\tau(N)$ が metrizable にならないことを示せば十分です。もし、 $\tau(N)$ が metrizable になったとしますと、Lindelöf であることから、second countable になってしまいます。従いまして結局、 $(X, \tau(N))$ の weight が連続体の濃度 c であることを示せば十分です。今、もし濃度が c より小さい base が存在したとしますと、その元は S の点の回りのものは $V(\frac{1}{n} \cdot h_{x,1/n})$ の形のものに限定してよい (cf. 1.1.15 in [3]) ですから、結局、或る $T \subset S$, $|T| < c$ に対し、 $V(\frac{1}{n} \cdot h_{x,1/n})$ ($n \in \omega$, $x \in T$) が S のすべての点の回りの open base になるはずですが、しかし $S \setminus T$ の点 z を選びますと、open base であることから、 z の neighborhood $V(h_{z,1})$ に対し、 $z \in V(\frac{1}{m} \cdot h_{y,1/m}) \subset V(h_{z,1})$ となる $m \in \omega$, $y \in T$ が取れます。包含関係 $V(\frac{1}{m} \cdot h_{y,1/m}) \subset V(h_{z,1})$ より、後者の non-Euclidean point z は (それが前者に入っている) 前者の non-Euclidean point になるはずですが、前者の non-Euclidean point は y のみです。よって、 $z = y$ 従って $z \in T$ となり z の選び方に矛盾します。□

8. CONCLUDING REMARKS.

以上の結果を総めますと、結局、地震波のアイデアを基に、閉円板上の位相として4つの新しい位相 τ , $\tau(\text{ctble})$, $\tau(\text{fn})$, $\tau(N)$ を得ることができました。双曲的距離から得られる自然な位相 τ_ρ とユークリッド位相 τ_d をも合わせますと

$$\tau_\rho \supset \tau \supset \tau(\text{ctble}) \supset \tau(\text{fn}) \supset \tau(N) \supset \tau_d$$

となっており、これらの inclusion \supset はすべて proper \supsetneq なものでした。

4つの新位相は generalized metric の観点から見ると「すべて regular Lindelöf, stratifiable」ですから “metrizable に近い” と言えますが、一方「metric space の closed image にはならない」という観点からは 真の “metrizable からは少し遠い” という感じになります。また、 $\tau(\text{ctble})$, $\tau(\text{fn})$, $\tau(N)$ は locally contractible で、 $\tau(N)$ は first countable という構造をもつことも確認しました。これらの位相では、円板の内部 \mathbb{D} だけで考えれば通常の内円板の位相になっており、また、境界の円周 S だけで考えても通常の内円板の位相になっていますが、更に、次の観点からも、閉円板のユークリッド位相をうまく温存していると言えます。

いま、 S の2点 α, β を結ぶ (ポアンカレ円板の) 測地線 $L(\alpha, \beta)$ に対し両端点 α, β まで含めた closed arc $L[\alpha, \beta]$ を考えますと、これは S と直交していますから、この closed arc 上では、4つの新位相はユークリッド位相と

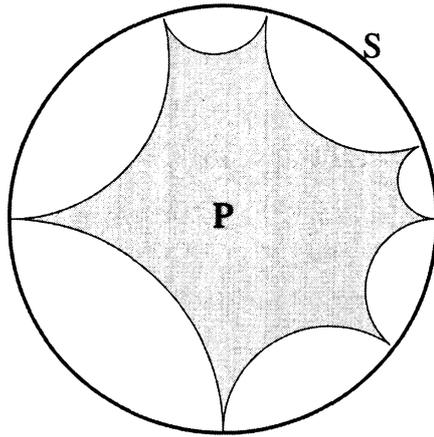


FIG. 4. Ideal polyhedron with S.

一致します。従って、このような測地線有限個で囲まれる多角形 P (“ideal hyperbolic polyhedron” と呼ばれている) はもちろんのこと、これに S を合わせた図形 $P \cup S$ を考えても、このような図形上では4つの新位相はユークリッド位相と一致することになります (Figure 4 参照)。

9. FURTHER DEVELOPMENTS.

我々は、地球の断面としての2次元閉円板を考察してきましたが、実際の地球は3次元球体であり、Introduction で指摘したように、地殻と内部の2層のみではなく、少なくとも5つの層に分かれ、各層が独自の「距離」を持っています。今までの構成を一般化すれば、このような多重距離構造 (Multi-Metric structure) に対しても、新位相を考えることが可能です。多重距離構造として注目すべきものは、地球以外にも色々あります。たとえば、生物の細胞です。細胞は大まかに見れば、細胞膜、細胞質、核の3層に分かれていて、その間を電気情報、化学情報が飛び交っています。他の例としては、脳があります。脳は、神経細胞のみでできているわけではなく、神経細胞は膠状のグリア細胞 (グリア細胞の個数は神経細胞の50倍以上といわれています) の中に浮いており、多重距離構造を呈しています。また、脳の階層構造 (「大脳皮質」

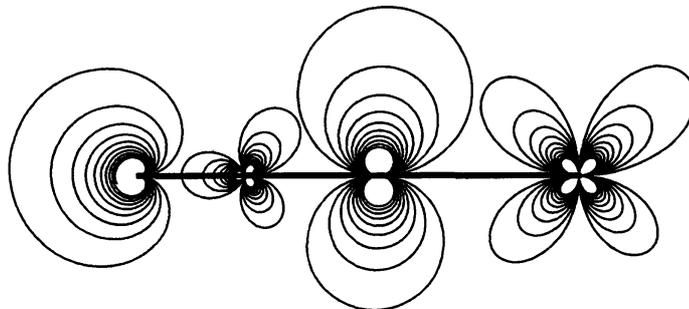


FIG. 5. Variations.

「大脳辺縁系」「脳幹」等)も、なんとなく地球に似ています。他にも、ちょっと世の中を見渡せば、色々なところに、多重距離構造を見つけることができます。

最後に、われわれの新位相と「渦」との関連について指摘しておきます。船のまわり、魚のまわりなど、液体の中を、何かが動きますと、必ず渦ができます。我々の位相は Figure 5 を見ていただければ想像がつきますように、「渦」の構造と深い関係があります。今後、渦と位相の関係を調べて、「渦の幾何学」なるものを提唱できれば、と考えています。

REFERENCES

- [1] H.S.Bear, *Part Metric and Hyperbolic Metric*, The American Mathematical Monthly, 98 (1991), 109-123.
- [2] C.R.Borges, *On Stratifiable spaces*, Pacific Journal of Mathematics, 17(1966), 1-16.
- [3] R.Engelking, *General Topology*, Polish Sci. Publ., Warszawa (1977).
- [4] G.Gruenhage, *Generalized Metric Spaces*, Handbook of Set-theoretic Topology (Eds: K. Kunen, J. E. Vaughan), North-Holland (1984), 423-501.
- [5] T.Miwa, *Adjunction spaces of monotonically normal spaces and spaces dominated by monotonically normal subsets*, Proc.AMS, 87(1983), 536-538

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL DEFENSE ACADEMY, YOKOSUKA 239-8686, JAPAN

E-mail address: akiokato@nda.ac.jp