数理解析研究所講究録
第1784巻2012年21-30

可換不足群を持つ有限群のブロックについてのある注意

千葉大学 大学院理学研究科
越谷 重夫 (こしたに)

§0. 序

今回の話は2つ話題がある。ただどちらも有限群のモジュラー表現論についてで, またどちらも不足群が位数8の基本可換群であるブロックの話である。

§1. 記号, 定義など

以下簡単のために, ここでは必要最小限の記号定義を与えるに留める。不明な言葉等は, 日本語で読める唯一の教科書　永尾 汎–津島行男 共著の [10] を参照して欲しい。

以下, p は素数, k で標数 p の代数的閉体を意味する。G と書けば常に有限群である。すると群代数 kG が考えられる訳だが, まず ${}_{kG}kG_{kG}$ の直既約 (indecomposable) 分解を考える。ちなみに, 非可換環論の人がよく使う記号として, 二つの環 A, B に対して, ${}_AM_B$, ${}_AM$, M_B と書いたりするが, これは順に M が (A, B) 両側加群, 左 A 加群, 右 B 加群　であることを意味する。また何も断らなかったら, 加群とは**有限生成右加群**を意味するものと決めておく。さて, 話を戻して,

$$ {}_{kG}kG_{kG} = \ldots \oplus A \oplus \ldots \qquad (\text{有限個}) $$

を kG の両側加群としての直既約分解とする。つまり, A は kG の直既約両側イデアル, である。そして, このような分解は一意的である (同型を除いて, などではなく, もう一つの分解があったら, 本当に等しいのである)。このような A たちを, 群代数 kG の**ブロック代数 (block algebra)**

あるいは単に**ブロック** と呼ぶ。するとこのブロック A に対して, 非常に重要な A の構造をかなり統制する部分群 P が存在する。つまり (A, A) 両側加群としての自然な全射

$$A \otimes_{kP} A \longrightarrow A, \qquad a \otimes a' \mapsto aa'$$

が分裂全射 (split-epi) になるような (G の) 部分群 P のうちで位数が最小のものを A の**不足群 (defect group)** と呼ぶ。初めに P として G 自身を取れるから, 不足群の存在は直ぐ解る。そして実はこれは（本質的には Maschke の定理から) p 部分群になることが解る。また, Sylow の定理と全く同様にして, 不足群 P は G 共役を除いて一意的に定まることも解る。この不足群が考えているブロック A にとってどのくらい本質的であるか（重要であるか）は例えば次の状況からもわかる。上の定義から, どんな勝手な直既約 kG 加群 X に対しても, $XA = X$ であれば, ある直既約 kP 加群 Y が存在して,

$$(*) \qquad\qquad X \,\Big|\, Y{\uparrow}^G$$

となっていることがわかる。ここで $X\Big|Z$ で X が Z の直和因子 (direct summand) であることを意味する。また, $Y{\uparrow}^G$ は $Y{\uparrow}^G = Y \otimes_{kP} kG$ つまり, Y の G への誘導加群 (induced module) を意味する。上の $(*)$ が何を意味しているかということは直ぐ解ると思う。つまり, すべての A に属する kG-加群は, 必ずある kP 加群を G にまで誘導した加群の直和因子になっている, ということである。このことから解るように, kP 加群が A に属する kG 加群を支配, 統制, 制御していると言える。そして有り体に言えば, 不足群は, k 代数として A が「(半) 単純性」からどのくらい離れているかの物差し（尺度）になっている。実際, A が単純環であること, とその不足群が自明であること, は同値である。また自明な加群 (trivial module) k_G が属するブロック A を**主ブロック (principal block)** と呼ぶことにするのであるが, この場合の不足群は G の Sylow p-部分群である。

§2. 問題

2.1 問題. A を kG のブロックで不足群 P を持つとする。(そして **§1** で述べたように P が A の表現を統制しているのであるから)「P の構造が与えられたとき, ブロック A についての情報, 性質についてどのくらいのことが解るのだろうか?」というのは, 全く至極まっとうな自然な問題である。ここで A について知りたい情報とは, 例えば $k(A)$ および $\ell(A)$ の値を知りたいのである。ここで $k(A)$, $\ell(A)$ はそれぞれ A に属する G の既約通常指標の個数, A に属する G の既約 Brauer 指標の個数, のことである。

そしてこの問題**2.1** に対してどのくらいのことが解っているかと言うと, 実は非常に少なくて, 以下の様な結果しかない。ただしここには 2010 年後半から結果を発表し始めた, まだ 20 才代の若手研究者 Benjamin Sambale (B.Külshammer の元学生) の最近の結果は含まれていない [13]。ここでは「P の構造のみ」を仮定して (G については全く条件を付けないで) $k(A)$, $\ell(A)$ 等の値が解っているもののみを列挙する。

2.2 結果.

(i) R. Brauer (1941) [1]: P が位数 p の巡回群で A が主ブロックのとき。

(ii) E.C. Dade (1966) [4]: P が巡回群の場合。

(iii) R. Brauer (1974) [2]: $p=2$ で P が 2 面体群 D_{2^n} $(n \geqslant 3)$ の場合。

(iv) J.B. Olsson (1975) [12]: $p=2$ で P が四元数群 Q_{2^n} $(n \geqslant 3)$, あるいは 準 2 面体群 SD_{2^n}, $(n \geqslant 4)$ の場合。

ここで年号に注意すると, 最後の結果からですら, なんと既にもう **37 年**も経っている。**2.1** のように有限群のモジュラー表現論において, ほとんど一番重要な基本的問題に対してすら, **30 数年間**も進歩, 進展がないとは...。この分野の研究者として, 忸怩たる思いがする。R.Brauer が亡くなったのは 1977 年である [5]。

§3. ブロック理論の標語

3.1. 記号ここで少し新しいそして必要な記号を用意する。有限群 G, 群代数 kG のブロック A はそのままで, A の不足群を P とする[1]。このとき, 群代数 $k[P{\cdot}C_G(P)]$ のブロック a で $a^G = A$ となるものが (G 共役を除いて) 一意的に存在する。ただしここで a^G はいわゆる「block induction (Brauer による)」のことである。この a を用いて,

$$E(A) = N_G(P, a)/P{\cdot}C_G(P)$$

なる群 $E(A)$ を定義して, これを A の **inertial 群**と呼び,

$$e(A) = |E(A)|$$

と決める。ここで $N_G(P, a) = \{g \in N_G(P) \mid g^{-1}ag = a\}$ で $N_G(P, a)$ を定義する。一般に $E(A)$ は p' 群になることが解っている（此の辺りの話は, もちろんすべて Brauer(1901–1977) に依っている)。この $E(A)$ は例えて言うならば, 一般線型群 $GL_n(q)$ の非定義標数における ℓ モジュラー表現論での**ワイル群 (Weyl group)** $W = N/T$ に対応している。ここで敢えて N, T が何かは, 詳しく述べない。いずれにせよ, 以下の標語（スローガン）が得られる。

3.2 標語. ブロック A の不足群 P が A の表現を統制（制御, 支配）している訳だったが, 更により詳しく言うと P **と** $E(A)$ **が** A **の情報を（というか, もっと言えば,** A **上の表現全部）を完全に決定する。**

---

[1]2002 年 6 月に E.C.Dade に会ったとき, 私のこの記号に対して,「どうしてブロックが A なのか? ブロックは (R.Brauer のその昔から) B に決まっている。」と言われた。私のこの記号は多分 M.Broué にしたがったのだと思う。

§4. 清田正夫さんの修士論文

ここでは, 清田氏の修論での結果を述べる。

4.1. Brauer と 清田の定理. 以下考えているブロック A の不足群が, 位数 8 の基本可換群 $P = C_2 \times C_2 \times C_2$ であると仮定する。すると $e(A)$ の起こり得る場合は $e(A) = 1, 3, 7, 21$ の 4 通りとなる。これは $GL_3(2)$ の $2'$ 部分剰余群の位数を考えれば解る。さて, このとき以下のことが得られる。

(i) (Brauer) $e(A) = 1$ ならば $k(A) = 8$, $\ell(A) = 1$。(注: これは後の, Broué-Puig による, いわゆるベキ零ブロック (nilpotent block) の場合である [3])。

(ii) (清田) $e(A) = 3$ ならば $k(A) = 8$, $\ell(A) = 3$。(これは少し後の渡辺アツミの結果 [14, Theorem 1] からも解る)。

(iii) $e(A) = 7$ であれば, $k(A) = 8$, $\ell(A) = 7$, あるいは $k(A) = 5$, $\ell(A) = 7$ のいずれかが成立する。

(iv) $e(A) = 21$ であれば, $k(A) = 8$, $\ell(A) = 5$, あるいは $k(A) = 7$, $\ell(A) = 4$ のいずれかが成立する。

4.2 予想. 上記 **4.1** での (iii), (iv) の両方の場合で実は「前半のみ成立が正解」と予想されている (いた)。その根拠は, もちろん反例が一つも無い, ということもあるが, もっとより強い根拠として, 現在のモジュラー表現論での大きな非常に大事ないくつかの予想のうち, そのどれか一つだけの成立が我々の $P = C_2 \times C_2 \times C_2$ の場合に証明できてしまえば, 自動的に「(iii), (iv) での前半のみ成立」が導かれてしまうからである。ここでその大事ないくつかの予想とは具体的に言うと Brauer's height zero 予想[2], Alperin-McKay 予想, Alperin の重み予想, Dade の予想, Broué の

[2]本当にここ数カ月以内の最近, Radha Kessar(イギリス, Aberdeen 大学) と Gunter Malle (Kaiserslautern 大学, ドイツ) は Brauer's Height Zero 予想の片方向, つまり, 「有限群 G のブロック A が**可換**不足群を持つならば, どんな時でも必ず A のすべての通常既約指標の高さ (height) はゼロである」が証明出来たと発表した (2011 年 11 月)。

可換不足群予想などのことである。反例といえば, ここまで, 全く例を挙げないで来てしまった。実例は以下のものがある。もっともそこで挙げているものほとんどが主ブロックの場合なので, 少し一般性（客観性）に欠けるが。

4.3 実例.

(i) $e(A) = 1$, $A = kP$.

(ii) $e(A) = 3$, $A = k[P \rtimes C_3]$.

(iii) $e(A) = 7$, $A = B_0(SL_2(8))$, ここで $B_0(G)$ で kG の主ブロックを意味することにする。

(iv) $e(A) = 21$, $A = B_0(J_1)$, $A = B_0(R(q))$, A として 散在型単純群の一つである Co_3 の 非主ブロック [9] [3]。

ここでお詫びをしなければならない。と言うのも, ここまでの話は（Co_3 の話を除いては）最初に紹介した 1978 年 1 月の研究集会の講究録の中の清田さん執筆による記事 [7] とほとんど同じなのである。つまり, ここまでは 33 年前から進歩していない。と言うわけで, 私のこの記事で意味を持つのは次の **§5, §6** の内容である。直ぐ下で再度述べるように, これはある意味で 35 年振りの大躍進 (breakthrough) であることを, 3 人の著者たちは密かに期待している。

§5. 今回の主結果の一つめ

今回の主結果は, それこそ J.B.Olsson (1975) 以来のもので, 実に 35 年ぶりのものである。これが我々の売り（セールスポイント）であると, 自

もちろん (?) 単純群の分類を使っている。R.Kessar は [6] での共著者の一人である。彼女が言うには, [6] での経験 (計算方法) が大きな動機になった, とのことである。

[3]1985 年 1 月, ドイツの Bonn Bad Honnef という所で 泊まり込み形式の研究集会があった。そこでの講演の合間のお茶の時間に, P.Landrock にこのブロックの例を教わったのも, 懐かしい思い出である。このブロックがなぜ興味深いかというと, 非主ブロックでおまけに, その inertial 指数 $e(A)$ が 21 だからである。

負している。もちろん私一人でできた訳ではない。私よりずっと若い2人の研究者 Radha Kessar と Markus Linckelmann との共同の仕事である。予稿 (preprint) は Dave Benson のアーカイブに置いてある (Crelle J. に掲載予定)。

5.1 主定理 (Kessar-越谷-Linckelmann) [6] **.** 以下, A を 2-ブロックで, その不足群は位数 8 の基本可換群 $P = C_2 \times C_2 \times C_2$ であることのみを仮定する。このとき, 次が得られる。

(i) ブロック A と B の間には perfect isometry (isotypies) が存在する。ここで B とは $k[N_G(P)]$ のブロックで A と B は（いわゆる）Brauer 対応で対応しているものである。

(ii) アルペリン (Jon Alperin) の重み予想 (weight conjecture) が成立する。

(iii) 特に, **4.2.** での予想（ただしブルエの可換不足群予想は, その弱いバージョン, つまり perfect isometries の存在) はすべて成立する。

5.2 主定理の証明の粗筋（あらすじ）. Clifford 理論を本質的には使うのであるが, いわゆる Fong-Reynolds の定理の Puig 版, また Külshammer の結果も重要である。Clifford 理論で 考えている有限群 G が **quasi-simple** の場合に帰着させて, その後は, **有限単純群の分類定理** (Classification of Finite Simple Groups = CFSG) をフルに使って, 計算計算につぐ計算で頑張って力尽くで解くのである。もちろん, 理想は **有限単純群の分類定理**無しで (CFSG-free) の証明を見つけること, ではあるが[4] 。

[4]あちこちで既に話していることだが, 筆者が大学院生で博士論文に取り組んでいた頃 (1980 年?) から, この $C_2 \times C_2 \times C_2$ を不足群に持つブロックの決定, を考え続けていた。その頃既に主ブロックに限れば, 単純群の分類 CFSG を使えば, と言うより, それよりもっとずっと簡単な可換 Sylow 2-部分群を持つ群の決定, を使えば (J.Walter, H.Bender の結果), この問題は解けることはわかっていた。しかし, 一般のブロックについての話にも単純群の分類 CFSG が使えるとは想像もしていなかった。

§6. 不足群が位数 8 の基本可換群であるブロックの重要な例

この節では, 前節 §5 と同じ場合を考える。そしてその特別な場合を考える。この話は以下の観察が出発点（動機）になっている。

6.1 観察 (F.Noeske) [11]. まず, G を有限群で, 散在型単純群あるいはそれの被覆であるとする。また, A を G の 2-ブロックで, 非主ブロック, faithful, そして可換ではあるが巡回群ではなく, かつ位数が最低 8 以上の不足群 P を持つものとする。すると, G は コンウェーの 3 番目の群 Co_3 に限り, A はただ一つのこれの非主ブロックで不足群 P は位数 8 の基本可換群 $C_2 \times C_2 \times C_2$ になる。

6.2 主定理 (越谷-Müller-Noeske) [8]. 散在型有限単純群 コンウェーの 3 番目の群 Co_3 に対して, いわゆるブルエの可換不足群予想（の強いバージョン, つまり splendid 同値の存在) が, すべての素数 p に対して成立する。

6.3 注意. 上記 **5.1** でも述べたが, **5.1** ではブルエのその予想は弱い版（バージョン）しか証明できていないので, **6.2** は **5.1** に含まれる訳ではない。

§7. 謝辞および付け足し

今回も, 佐々木 洋城さんに, 多大な御世話をして頂いた。心より感謝の意を表したいと思う。

また, 自分の宣伝になり恐縮であるが, 以下に今回の話の共同講演者等の写真がある。

http://mathsoc.jp/videos/2010nenkai.html

References

[1] R. Brauer, Investigations on group characters, Ann. of Math. **42** (1941), 936–958.

[2] R. Brauer, On 2-blocks with dihedral defect groups, Symposia Mathematica **XIII** (1941), 367–393.

[3] M. Broué, L. Puig, A Frobenius theorem for block, Invent. math. **56** (1980, 117–128.

[4] E.C. Dade, Blocks with cyclic defect groups, Ann. of Math. **84** (1966), 20–48.

[5] W. Feit, Richard D. Brauer, Bulletin of the Amer. Math. Soc. **1** (1979), 1–20.

[6] R. Kessar, S. Koshitani, M. Linckelmann, Alperin's weight conjecture for 2-blocks with elementary abelian defect groups of order 8, In press, Journal für reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) (2012), 47 pages.

[7] M. Kiyota 清田正夫, Blocks with an abelian defect group, Seminar on permutation groups and related topics (1978 年 1 月 10–13 日), 数理講究録 **325**, 京都大学数理解析研究所, pp.84–89.

[8] S. Koshitani, J. Müller, F. Noeske, Broué's abelian defect group conjecture holds for the Conway's third group Co_3, Journal of Algebra **348** (2011), 354–380.

[9] P. Landrock, The non-principal 2-blocks of sporadic simple groups, Commun. Algebra **6** (1978), 1865–1891.

[10] 永尾 汎–津島 行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[11] F. Noeske, ADGC for Sporadic Groups, http://www.math.rwth-aachen.de/∼Felix.Noeske/tabular.pdf

[12] J.B. Olsson, On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups, J. Algebra **36** (1975), 212–241.

[13] B. Sambale, http://www.minet.uni-jena.de/algebra
/personen/sambale/sambale.html

[14] A. Watanabe, Notes on p-blocks of characters of finite groups, J. Algebra **136** (1991), 109–116.