数理解析研究所講究録
第 1785 巻 2012 年 99-110

零次元代数的局所コホモロジー類に対する偏微分方程式系のスタンダード基底

田島慎一
筑波大学大学院数理物質系数学域*

SHINICHI TAJIMA

FACULTY OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 序

本稿では, 原点を孤立特異点として持つ複素解析的超曲面に対し, そのヤコビイデアルから定義されるある種の algebraic local cohomology 類を考え, その algebraic local cohomology 類の満たすホロノミー D-加群を数式処理を用いて具体的に構成するための計算アルゴリズムについて考察する.

ここで対象とする algebraic local cohomology 類は, 超曲面の特異点即ち, 原点に台を持つ local cohomology 類であり, 特異点の複素解析的な性質に関し豊富な情報を含んでいる. 本稿では, この様な algebraic local cohomology 類を複素領域における佐藤超函数と見做し, この超函数の満たす線形偏微分方程式系を構成する方法について考える. 偏微分作用素環としては, 問題自体が local であることから, 数学的には収束冪級数を係数とする偏微分作用素環を用いる.

さて, 最近の計算代数解析の著しい進展により, D-加群あるいは線形偏微分作用素を扱う様々な計算アルゴリズムが研究・開発された. これらの多くは, Weyl 代数, 即ち多項式係数の偏微分作用素環やその上の加群を扱う謂わば大域的なアルゴリズムである. そのため, これら既存の計算法を組み合わせ, 本稿で考えている local な問題を効率的に解くことは困難である ([2, 3]). そこで, 2006 年および 2009 年の論文 [6, 9] において, 上記の問題を局所的な計算のみで解く計算アルゴリズムを導出した.

この計算アルゴリズムを用いて, 特異点の複素解析的な研究 [8, 11, 12] を行い, 平行してこれらの計算法に関しても考察を加えたところ, 幾つかの根本的な改良が可能であることが判明した. その際に新たに導出した計算法は, 偏微分作用素環におけるスタンダード基底計算を行うものであり, 計算効率も従来の計算法に比べ大幅に良くなる. 本稿では, この計算アルゴリズムの概要を紹介する.

*tajima@math.tsukuba.ac.jp

2 基本的事項

X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍, f は X 上の正則函数であり超曲面 $f=0$ の特異点は原点 O のみであるとする. X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$, その原点での stalk （即ち収束冪級数環）を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す. 原点 O に台を持つ局所コホモロジーおよび代数的局所コホモロジーを, それぞれ

$$\mathcal{H}^n_{\{0\}}(\Omega^n_X),\ \mathcal{H}^n_{[0]}(\Omega^n_X)$$

で表す. 但し, Ω^n_X は, X 上の正則 n-forms のなす層である.

原点における形式冪級数環を $\hat{\mathcal{O}}_{X,O}$ で表し, W_f および $\hat{W}_f$ を

$$W_f=\{\psi\in\mathcal{H}^n_{\{0\}}(\Omega^n_X)\mid\mathcal{J}\psi=0\},\ \hat{W}_f=\{\hat{\psi}\in\mathcal{H}^n_{[0]}(\Omega^n_X)\mid\hat{\mathcal{J}}\psi=0\}$$

で定める. ただし, $\mathcal{J},\hat{\mathcal{J}}$ はそれぞれ収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ および形式冪級数環 $\hat{\mathcal{O}}_{X,O}$ において n 個の偏導函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ が生成するヤコビイデアルを表す. $W_f,\hat{W}_f$ は共に, 有限次元ベクトル空間の構造を持つ.

Grothendieck local duality より, 多変数留数が定める次の pairing,

$$\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}\times W_f\longrightarrow\mathbb{C},\quad \hat{\mathcal{O}}_{X,O}/\hat{\mathcal{J}}\times\hat{W}_f\longrightarrow\mathbb{C}$$

は, 非退化であることが従う. f は原点を孤立特異点として持つことから, $W_f=\hat{W}_f$ を得る. 従って以後, ヤコビイデアルとしては収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ に属す $\mathcal{J}$, コホモロジーとしては, $\hat{W}_f$ と W_f を区別せず W_f についてのみ議論する.

さて, W_f は $\mathcal{O}_X$ 加群の構造を持つが, W_f は $\mathcal{O}_X$ 上ひとつの要素から生成されることが知られている. そこで, $\omega\in W_f$ は,

$$W_f=\mathcal{O}_X\omega$$

を満たす生成元であるとする. 正則関数を係数にもつ X 上の線形偏微分作用素のなす層を $\mathcal{D}_X$ で表し, その原点における stalk を $\mathcal{D}_{X,O}$ で表す. このとき, $\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ は右 $\mathcal{D}_{X,O}$-加群の構造を持つ. 自然数 k に対し, 生成元 ω を annihilate する高々 k 階の偏微分作用素全体が生成する $\mathcal{D}_{X,O}$ における右イデアルを $Ann^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ とおく. いま,

$$\mathcal{L}^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)=\{P\in\mathcal{D}_{X,O}\mid\omega P=0,\mathrm{ord}(P)\le k\}$$

とおくと,

$$Ann^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)=\mathcal{L}^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)\mathcal{D}_{X,O}$$

と表せることになる. 次の補題は基本的である.

補題 $\mathcal{L}^{(0)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)=\mathcal{J}$ 即ち, $\mathcal{A}nn^{(0)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)=\mathcal{J}\mathcal{D}_{X,O}$ が成立する.

いま, ω の, $\mathcal{D}_{X,O}$ における annihilator を

$$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)=\{P\in\mathcal{D}_{X,O}\mid\omega P=0\}$$

とおく. この時, イデアルの増大列 $\{\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)\}_k$ に対し,

$$\mathcal{A}nn^{(0)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) \subseteq \mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) \subseteq \mathcal{A}nn^{(2)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) \subseteq \cdots\cdots$$

$$\cdots \subseteq \mathcal{A}nn^{(\nu)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) = \mathcal{A}nn^{(\nu+1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) = \cdots = \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$$

を満たす自然数 ν が存在することを注意しておく.

一般に, 偏微分作用素 P, Q に対する交換子積を $[P,Q] = PQ - QP$ で定める. 次の結果は, アルゴリズムを導出上で, 重要である.

基本定理 ([6, 9]) R を k 階線形偏微分作用素とする. 次の二つの条件は同値である.

(i) 任意の $g \in \mathcal{J}$ に対して $[R,g] \in \mathcal{L}^{(k-1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ が成り立つ.

(ii) 関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ であって $\omega(R+h) = 0$ を満たすものが存在する.

証明： $(ii) \to (i)$ は自明. $(i) \to (ii)$ を示す. いま

$$[R,g] \in \mathcal{L}^{(k-1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega), \quad {}^{\forall} g \in \mathcal{J}$$

とする. このとき, $\omega[R,g] = \omega(Rg) - \omega(gR)$ であるが, $g \in \mathcal{J}$ により $(\omega g)R = 0$ となり, $\omega[R,g] = \omega Rg$ である. 今, $[R,g] \in \mathcal{L}^{(k-1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ であることから, 代数的局所コホモロジー類 ωR は, 任意の $g \in \mathcal{J}$ に対して $(\omega R)g = 0$ を満たす. W_f の定義によって, $\omega R \in W_f$ を得る. W_f は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 ω で生成されるから, $\omega R = -\omega h$ となる $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ が存在する. よって, $\omega(R+h) = 0$ となり, $R + h \in \mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ を得る. □

3 計算アルゴリズム (2005 年–2009 年版)

この節では, 論文 [6, 9] で与えた計算アルゴリズムについて復習し, さらに, 計算効率の観点から改良すべき点について検討する. 記述を簡明にするため, ここでは $n = 2$, 即ち, 2次元の場合とし, 構成する偏微分作用素の階数も2階までとし説明する.

原点 O における有理数係数の収束冪級数環を $\mathbb{Q}\{x,y\}$ で表す. 正則関数 $f(x,y) \in \mathbb{Q}\{x,y\}$ は原点を孤立特異点として持つとする（実際に計算機に入力する際は, f は多項式）. 函数 f の $\mathbb{Q}\{x,y\}$ におけるヤコビイデアルを J で表す. 収束冪級数環 $\mathbb{Q}\{x,y\}$ には, 予め項順序が指定されているとする. アルゴリズム（[9], [10]）により, ベクトル空間 $\hat{W}_f = W_f$ の基底であり与えられた項順序と両立するものを構成してあるとする. また, 剰余 $\mathbb{Q}\{x,y\}/J$ を表現する単項式基底 $x^i y^j$, $(i,j) \in K_J$ も既に構成済みであるとする：

$$\mathbb{Q}\{x,y\}/J \cong \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{x^i y^j,\ (i,j) \in K_j\}.$$

但しここで, K_J は, 基底単項式の指数のなすリストを意味する. ここで, 右辺, 即ち基底単項式の線形結合の形に表現できる多項式全体のなす集合を P_J で表す.

$$P_J = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{x^i y^j,\ (i,j) \in K_J\}.$$

以下，1階の偏微分作用素を

$$d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}+h,$$

2階の偏微分作用素を

$$a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2}+d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}+h$$

で表す．ここで，係数多項式 a,b,c,d,e,h らはいずれも P_J（より正確には，P_J の部分ベクトル空間）に属すとする．以下に，2次元の場合の algebraic local cohomorogy 類 ω の偏微分作用素環における annihilators $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$, $k=0,1,2$ を構成するアルゴリズム（2005–2009 年版）の概要を与える．

アルゴリズム **(2005–2009)**

入力： $f(x,y)$, 原点に孤立特異点を持つ $\mathbb{Q}$ 係数多項式

出力： リスト $B^{(0)},B^{(1)},B^{(2)}$

Step 0： 初期化

- $B^{(0)}=$ イデアル J のスタンダード基底（もしくはグレブナ基底），$B^{(1)}=[\,],B^{(2)}=[\,]$
- $K_A=[\,],K_B=[\,],K_C=[\,],K_D=K_J,K_E=K_J$ と初期化．

Step 1： 1階の annihilators

- $e\frac{\partial}{\partial y}+h$ なる形の annihilators の構成

  $e\in P_J$ であり条件 $e\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, e\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\in J$ を満たすもの全体のなすベクトル空間の基底を（項順序と両立するように）求める．各基底多項式 e に対し，$\omega(e\frac{\partial}{\partial y}+h)=0$ を満たす $h\in J_P$ を求め，構成した偏微分作用素 $e\frac{\partial}{\partial y}+h$ をリスト $B^{(1)}$ に格納．各基底多項式 e の初項（もしくは主項）の指数からなるリスト I により，リスト K_E を K_E-I と更新．

- $d\frac{\partial}{\partial x}+h$ なる形の annihilators の構成

  $d\in P_J$ であり条件 $d\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, d\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\in J$ を満たすもの全体のなすベクトル空間の基底を（項順序と両立するように）求める．各基底多項式 d に対し，$\omega(d\frac{\partial}{\partial x}+h)=0$ を満たす $h\in J_P$ を求め，構成した偏微分作用素 $d\frac{\partial}{\partial x}+h$ をリスト $B^{(1)}$ に格納．各基底多項式 d の初項（もしくは主項）の指数からなるリスト I により，リスト K_D を K_D-I と更新．

- $d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}+h$ なる形の annihilators の構成

  $d(x,y)=\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}x^iy^j, e(x,y)=\sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}x^iy^j$ の組であり, 条件

$$d\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+e\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\in J,\ d\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+e\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\in J$$

  を満たすもの全体のなすベクトル空間の基底を求める. 各基底に対し,

$$\omega(d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}+h)=0$$

  を満たす $h\in J_P$ を求め, 構成した偏微分作用素をリスト $B^{(1)}$ に格納. 各多項式 d の初項（もしくは主項）の指数からなるリスト I により, リスト K_D を K_D-I と更新.

Step 2： 2階の annihilators

リスト K_A,K_B,K_C を, $K_A=K_D, K_B=K_D\cap K_E, K_C=K_E$ で定める. 2階の偏微分作用素 R を

$$R=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2}+d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}$$

とおく. 但し, 係数多項式は未定係数を用いて

$$a=\sum_{(i,j)\in K_A} a_{i,j}x^iy^j,\ b=\sum_{(i,j)\in K_B} b_{i,j}x^iy^j,\ c=\sum_{(i,j)\in K_C} c_{i,j}x^iy^j,$$

$$d=\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}x^iy^j,\ e=\sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}x^iy^j,$$

とおく. 交換子積 $[R,\frac{\partial f}{\partial x}],[R,\frac{\partial f}{\partial y}]$ を計算し, 交換子積の偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ の係数および零階部の J に関する normal form とり, 得られた偏微分作用素を夫々, $\mathrm{Nf}([R,\frac{\partial f}{\partial x}]),\mathrm{Nf}([R,\frac{\partial f}{\partial y}])$ とおく. 条件

$$\mathrm{Nf}([R,\frac{\partial f}{\partial x}])\in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(B^{(0)}\cup B^{(1)}),\mathrm{Nf}([R,\frac{\partial f}{\partial y}])\in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(B^{(0)}\cup B^{(1)})$$

を満たす R 全てがなすベクトル空間の基底を求め, 基底の各元 R に対し, $\omega(R+h)=0$ を満たす, $h\in J_P$ を求め, 構成した偏微分作用素 $R+h$ をリスト $B^{(2)}$ に格納.

以上が $(n=2,k=0,1,2$ に対する) アルゴリズムの概略である. アルゴリズムの出力より $L^{(0)}=B^{(0)}, L^{(1)}=B^{(0)}\cup B^{(1)}, L^{(2)}=B^{(0)}\cup B^{(1)}\cup B^{(2)}$ とおくと, 次を得ることになる.

$$Ann^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)=L^{(k)}\mathcal{D}_{X,O},\ k=0,1,2.$$

注意　一般の場合の計算アルゴリズムについては [9] を参照されたい.

このアルゴリズムでは, 例えば, $e\frac{\partial}{\partial y}+h$ なる形の 1 階の annihilators の係数多項式 $e \in P_J$ を求める際は, まず, 未定係数 $e_{i,j}$ を用いて

$$e = \sum_{(i,j)\in K_J} e_{i,j}x^iy^j$$

とおき, 次に, W_f の基底を用いてイデアルメンバーシップの条件 $e\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, e\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \in J$ から線形方程式を導き, 最後ににその線形連立方程式を解くという計算を行う. また, 2階の annihilators を求める際は, 偏微分作用素 R に対し, その交換子積の係数多項式と零階部分の多項式の normal form を取り, 得られた（高々）1階の偏微分作用素が, 既に構成した1階までの annihilators 達が張るベクトル空間に属することを条件に R を定めている. 従ってこのアルゴリズムでは, 係数多項式が P_J に属すような1階の annihilators 全てのなすベクトル空間の基底を予め Step 1 において求めている. さて, アルゴリズムの中で行う実質的な計算は,

- algebraic local cohomology 類を利用したイデアル membership 計算と線形計算
- algebraic local cohomology 類を利用した normal form 計算と線形計算
- 偏微分作用素の零階項 h を求める線形計算

から成る. このうち, membership 計算と normal form 計算は, 論文 [7, 9, 10] 等で述べたように, algebraic llocal cohomology 類を利用しており極めて計算効率が良い. それに比べ, 偏微分作用素の零階部 h を求める際は通常の線形計算を用いており, 計算の効率化が図られていない. 計算効率の観点から最も問題とされるのは,

「$Ann^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ の生成元を求めるには, 係数多項式が P_J に属すような1階の annihilators 全てを求める必要はないにもかかわらず, 2階の annihilators を構成するために, 係数多項式が P_J に属すような1階の annihilators を全て求めている.」

ことである. 幾つかの計算例に対し, 2階の annihilators の構成に実際に用いられた1階の annihilators の個数を数えたところ, いずれの場合も極めて少数の1階の annihilators のみが計算に必要であることが確認された.

以上のことから, これらの問題を解決する為には, 次の3つの課題に取り組む必要があることが分かる.

- $Ann^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ のスタンダード基底を求める計算法を確立する.
- 1階の annihilators を利用しないような2階の annihilators の構成法を考案する.
- annihilators の零階項 h を効率的に求める方法を考案する。

4 スタンダード基底計算について

与えられた algebraic local cohomology 類 ω を annihilate する偏微分作用素のなすイデアルを求める新たな計算法を導出した. この節では, 前の節の最後に述べた3つの課題に答える形で, アルゴリズムを導出した際の基本的な考え方を紹介する.

・1階の **annihilators**

まず, $e\frac{\partial}{\partial y}+h$ なる形の annihilators の係数多項式 $e \in P_J$ の満たすべき条件,

$$e\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in J,\ e\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \in J$$

に注目する. ω は W_f の生成元であることから, この条件は

$$\omega(e\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = 0,\ \omega(e\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) = 0$$

と同値となる. そこで,

$$\phi_{(1,1)} = \omega\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \phi_{(0,2)} = \omega\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を予め計算し求めておく. このとき, これらの algebraic local cohomology 類を使うと, 上記の条件は, イデアルの概念を用いて

$$e \in Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(\phi_{(1,1)}, \phi_{(0,2)})$$

と表すことができる. 一般に, algebraic local cohomology 類がこのように与えられたとき, [10] で述べたスタンダード基底の計算アルゴリズムを適用すれば, それらの $\mathcal{O}_{X,O}$ における annihilator イデアルを極めて容易に求めることが出来る. この方法を使って, 係数多項式 e を効率的に求めることが可能となる. $d\frac{\partial}{\partial x}+h$ なる形の annihilators の係数多項式 d の計算も同様である.

さて次に $d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}+h$ なる形の annihilators の係数多項式の組 d, e の求め方について考える. 偏微分作用素 R を $R = d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}$ で定める. 条件

$$[R, \frac{\partial f}{\partial x}] \in J,\ [R, \frac{\partial f}{\partial y}] \in J$$

は, 生成元 ω を用いると,

$$\omega[R, \frac{\partial f}{\partial x}] = 0,\ \omega[R, \frac{\partial f}{\partial y}] = 0$$

と表される. この条件を, d, e を用いて具体的に表すと

$$\omega(d\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+e\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = 0,\ \omega(d\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+e\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) = 0$$

となる. ここで, 係数多項式 d, e を

$$d(x,y)=\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}x^iy^j,\ e(x,y)=\sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}x^iy^j$$

とおくことで, 未定係数 $d_{i,j}, e_{i,j}$ に対する連立方程式

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}(\omega(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})x^iy^j)+\sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}(\omega(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})x^iy^j)=0,$$

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}(\omega(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})x^iy^j)+\sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}(\omega(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})x^iy^j)=0$$

を得る. そこでいま予め, 次の algebraic local cohomology 類を具体的に計算してあるとする.

$$\phi^{(i,j)}_{(2,0)}=x^iy^j\phi_{(2,0)},\quad (i,j)\in K_D$$

$$\phi^{(i,j)}_{(1,1)}=x^iy^j\phi_{(1,1)},\quad (i,j)\in K_E$$

$$\phi^{(i,j)}_{(1,1)}=x^iy^j\phi_{(1,1)},\quad (i,j)\in K_D$$

$$\phi^{(i,j)}_{(0,2)}=x^iy^j\phi_{(0,2)},\quad (i,j)\in K_E$$

但し, $\phi_{(2,0)}=\omega(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})$ と定義してある. 上記の連立方程式は,

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(2,0)}+\sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(1,1)}=0,$$

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(1,1)}+\sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(0,2)}=0$$

となる. 従ってこの連立方程式の斉次解を求めることで, 係数多項式 d, e を決定できることになる. リスト K_D, K_E の決め方から, $d=0, e\neq 0$ あるいは $d\neq 0, e=0$ のような非自明な解は存在しないことに注意されたい. 連立方程式を解いた後, 前節に与えたアルゴリズムと同様に d の初項の指数からなるリスト I を用いて, リスト K_D を K_D-I に更新する.

・2階の annihilators

1階の annihilators を構成する際, 幾つかの algebraic local cohomology 類を用いた. 同様の考え方で, 2階の annililator,

$$P=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2}+d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}+h$$

の係数多項式, a, b, c, d, e を求める方法を導出できる. 議論は多少長くなるので, ここでは簡単に結論のみを示すことに留める. まず, 生成元 ω から, 6種類の algebraic local cohomology 類

$$\chi^{(i,j)}_{(A,I)},\ \chi^{(i,j)}_{(A,II)},\quad (i,j) \in K_A,$$

$$\chi^{(i,j)}_{(B,I)},\ \chi^{(i,j)}_{(B,II)},\quad (i,j) \in K_B,$$

$$\chi^{(i,j)}_{(C,I)},\ \chi^{(i,j)}_{(C,II)},\quad (i,j) \in K_C$$

を求める (ここでは, 定義は省略するが計算は容易である). このとき, a, b, c, d, e が2階の annihilator の係数多項式となる条件は, 次で与えられる.

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(2,0)} + \sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(1,1)} + \sum_{(i,j)\in K_A} \chi^{(i,j)}_{(A,I)} + \sum_{(i,j)\in K_B} \chi^{(i,j)}_{(B,I)} + \sum_{(i,j)\in K_C} \chi^{(i,j)}_{(C,I)} = 0,$$

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(1,1)} + \sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(0,2)} + \sum_{(i,j)\in K_A} \chi^{(i,j)}_{(A,II)} + \sum_{(i,j)\in K_B} \chi^{(i,j)}_{(B,II)} + \sum_{(i,j)\in K_C} \chi^{(i,j)}_{(C,II)} = 0,$$

ここで, 連立方程式

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(2,0)} + \sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(1,1)} = 0,$$

$$\sum_{(i,j)\in K_D} d_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(1,1)} + \sum_{(i,j)\in K_E} e_{i,j}\phi^{(i,j)}_{(0,2)} = 0$$

は, 1階の annihilators を構成した際に斉次解を求めてあり, 現在使っているリスト K_D は 1階の annihilators を構成する際に用いたリスト K_D ではなく, 斉次解を求めた後に更新されたリストであることに注意されたい. このことから, 係数多項式の組 a, b, c, d, e の満たす上記の連立方程式は, $a = b = c = 0, (d, e) \neq (0, 0)$ という解を持たないことになる.

注意　いま, a, b, c は未知多項式であるが, これを既知のデータと見做すと, 上記の連立方程式は形の上では, 1階の annihilators を求める際に現れた斉次の連立方程式にデータを加えた非斉次な連立方程式と考えることができる. このことより, 1階の annihilators を求めた際に計算したデータをここで再利用できることがわかる.

何れにしても, 以上により, 1階の annihilators を用いないで, 2階の annihilators を構成することが可能となった.

・零階項 h の計算法

いま, 生成元 $\omega \in W_f$ を annihilate する偏微分作用素 $P = R + h$ の零階項 h のみが未知であり, 1階以上の偏微分からなる作用素 R は既に求めてあるとする. 零階項 h を求めるには, $\omega(R + h) = 0$ から明らかなように, ωR を計算し, $\omega h = -\omega R$ を満たす $h \in P_J$ を求めれば良いことになる. ここで, algebraic local cohomology 類 ωR は必ず W_f に属すので, 方程式 $\omega h = -\omega R$ は P_J において一意的に解けることが保障されている.

さて, 上記の方程式を解く際, 未定係数を用いて, $h(x,y) = \sum_{(i,j)\in K_J} h_{i,j}x^iy^j$ とおき, 通常の線形連立方程式を解く問題に帰着させて解くことは 理屈の上では簡単である. しかし実際に行う計算では, ベクトル空間 W_f の次元が大きい上に, 零階項 h の各項の係数はかなりサイズの大きな有理数となる. しかも, この問題をたくさんの偏微分作用素に対して解くことが必要になる. LU 分解を利用するにしても計算量が多いことが分かる.

そこで, algebraic local cohomology 類を利用し, 通常の方法とは異なる計算法を考える. まず, いくつか記号等の準備をする. いま, W_f の基底 algebraic local cohomology 類, ω_λ, $\lambda \in \Lambda$ が与えられているとする. 但し, λ は, algebraic local cohomology 類 ω_λ の主要項の指数を表し, Λ はそれら主要部の指数 λ 全体のなす集合であるとする. さらに, 各 ω_λ の主要部の係数は 1 に等しいと仮定する. ω は生成元であるので, 各 ω_λ に対し,

$$\omega_\lambda = h_\lambda \omega, \ h_\lambda \in P_J$$

なる多項式 h_λ が唯一存在する. ここで, 話を元に戻し, 方程式 $\omega h = -\omega R$ の解法を考える. いま, $\omega R \in W_f$ を基底 algebraic local cohomology 類の一次結合

$$\omega R = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda \omega_\lambda$$

として表現してあるとする. この時, 求める零階項 h は, $h = -\sum_\lambda r_\lambda h_\lambda$ で与えられることは明らかである. 従って, h を求めるには h_λ, $\lambda \in \Lambda$ を求めておけば良いことになる.

さて, この方法で問題を解く場合, ベクトル空間 W_f の次元を $\mu = \dim W_f$ とおくと, 通常では $\mu \times \mu$ の線形連立方程式を μ 回, 解く必要があるように見える. しかし, 以下に与える議論により, 実際には比較的小さなサイズの線形連立方程式を 1 回解くだけですべての h_λ, $\lambda \in \Lambda$ を求めることが可能となることが分かる.

生成元 $\omega \in W_f$ の展開式 (標準的 *relative Čech cohomology* 表現) を

$$\omega = \sum_{(\ell,m)\in\Gamma} q_{\ell,m}[\frac{1}{x^\ell y^m}]$$

とする. ここで, $(i,j) \in K_J$ なる指数に対し ω に x^iy^j を掛けた algebraic local cohomology 類 $x^iy^j\omega$ を考える. この algebraic local cohomology 類は, W_f に属すことから,

$$x^iy^j\omega = \sum_{(\ell,m)\in\Gamma,(\ell-i,m-j)\in\Lambda} q_{\ell,m}\omega_{(\ell-i,m-j)}$$

が従う. この式に $\omega_\lambda = h_\lambda\omega$ を満たす未知多項式 $h_\lambda \in P_J$ を代入することで,

$$\sum_{(\ell,m)\in\Gamma,(\ell-i,m-j)\in\Lambda} q_{\ell,m}h_{(\ell-i,m-j)}\omega = x^iy^j\omega$$

を得る. 表現の一意性から,

$$\sum_{(\ell,m)\in\Gamma,(\ell-i,m-j)\in\Lambda} q_{\ell,m}h_{(\ell-i,m-j)} = x^iy^j$$

が従う. 即ち, 未知多項式 h_λ, $\lambda\in\Lambda$ が満たす連立線形方程式

$$\sum_{(\ell,m)\in\Gamma,(\ell-i,m-j)\in\Lambda} q_{\ell,m}h_{(\ell-i,m-j)}=x^iy^j,\ (i,j)\in K_J$$

を得た. この連立方程式の係数行列は, 生成元 ω の展開式の係数のみからなっていることに注意されたい. 拡大係数行列の拡大部分にのみ, $x^iy^j,(i,j)\in K_J$ なる単項式が含まれている. 非常に単純な構造をした連立方程式であることが分かる. しかも, 生成元 ω の展開式に現れる項の個数が少ない場合, この連立方程式は疎行列で表せることになる.

上記の連立方程式を解くことで, h_λ, $\lambda\in\Lambda$ を容易に求めることができる.

以上が, 与えられた生成元 $\omega\in W_f$ の満たす k 階の偏微分方程式系, 即ち, 右 $\mathcal{D}_{X,O}$ イデアル $Ann^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ のスタンダート基底を構成するアルゴリズムを新たに導出した際の基本的な考え方である.

参考文献

[1] 阿部隆行, 田島慎一：孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法, 京都大学数理解析研究所講究録 **1514** 「Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2006), 141–147.

[2] 中村弥生, 田島慎一：代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1199**「数式処理における理論と応用の研究」(2001), 70–89.

[3] Y. Nakamura, S. Tajima : A method for constructiong holonomic systems for algebraic local cohomology classes with support on a zero-dimendional variety, in Mathematical Software, ICMS 2002, eds by A. Cohen, X. Gao and N. Takayama, World Scientific (2002), 158–168.

[4] S. Tajima, Y. Nakamura : Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous hypersurface isolated singularities, Publ. RIMS, **41** (2005), 1–10.

[5] 田島慎一：零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1456**「Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2005), 126–132.

[6] 田島慎一, 中村弥生：孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとホロノミック系, 京都大学数理解析研究所講究録 **1501**「Recent Topics on Real and Complex Singularities」(2006), 168–180.

[7] 田島慎一：零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算についてII, 京都大学数理解析研究所講究録 **1568** 「Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2007), 74–80.

[8] S. Tajima, Y. Nakamura : On holonomic D-modules attached to Reiffen's hypersurface isolated singularities (in Russian), Modern Mathematics and its Applications **54** (2008), 124–132.

[9] S. Tajima, Y. Nakamura : Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, J. Symbolic Comp. **44** (2009), 435–448.

[10] S. Tajima, Y. Nakamura, K. Nabeshima : Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, Adv. Studies in Pure Math. **56** (2009), 341–361.

[11] 田島慎一, 中村弥生 : V. Bayer と A. Hefez の代数曲線に付随するホロノミー D-加群について, 第8回代数曲線論シンポジウム報告集 (2010), 63–72.

[12] S. Tajima, Y. Nakamura : Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, to appear.

[13] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一 : 代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナ基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1764** 「実閉体上の幾何と特異点論への応用」 (2011), 102–125.