数理解析研究所講究録
第 1786 巻 2012 年 128-142

Uniform asymptotic stability for two-dimensional linear systems whose anti-diagonals are allowed to change sign

都城工業高等専門学校　鬼塚政一 (Masakazu Onitsuka)
Department of General Education
Miyakonojo National College of Technology

1　序文

変数係数をもつ 2 次元線形系

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} -e(t) & f(t) \\ -g(t) & -h(t) \end{pmatrix} \tag{S}$$

を考える．ただし，$\mathbf{x} = (x, y)$ であり，変数係数 $e(t)$, $f(t)$, $g(t)$ 及び $h(t)$ は何れも $t \geq 0$ において連続関数とする．また，$g(t)/f(t)$ は連続微分可能な関数と仮定する．このとき，方程式系 (S) の任意の解は時間大域的に存在する．また，方程式系 (S) は明らかに零解 $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$ をもつ．線形系 (S) に関する研究の歴史は古く，種々の科学への適用範囲は広い．例えば，方程式系 (S) とそれに摂動項を加えた摂動系

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{p}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{p}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

における摂動問題が挙げられる．ただし，$\mathbf{p}(t, \mathbf{x})$ は領域 $\{(t, \mathbf{x}) : t \geq 0 \text{ かつ } \|\mathbf{x}\| < c\}$ 上で連続であり，$\mathbf{x}$ の各成分に関して連続微分可能とする．摂動項 $\mathbf{p}(t, \mathbf{x})$ が t に関して一様に

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to 0} \frac{\|\mathbf{p}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0 \tag{C}$$

をみたすとき，非摂動系 (S) の零解が一様漸近安定であるならば，摂動系の零解もまた一様漸近安定である (一様漸近安定の定義については，第 2 節参照)．もしも，一様漸近安定性における一様性が失われれば，この事実は成り立たないことが知られいる ([2] を見よ)．すなわち，仮定 (C) のもと，非摂動系 (S) の零解が漸近安定であっても，摂動系の零解もまた漸近安定であるとは限らない．したがって，摂動問題において，一様漸近安定性における一様性は欠かせない性質と言える．

本研究は日本学術振興会若手研究 (B) 課題番号 23740115 の助成を受けたものである．

係数が $e(t) \equiv h(t)$, $f(t) \equiv g(t)$ のとき，方程式系 (S) の基本解行列を具体的に求めることができる．この場合，初期条件 $X(0) = E$ を満足する基本解行列は

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos G(t) & \sin G(t) \\ -\sin G(t) & \cos G(t) \end{pmatrix} \exp(-H(t))$$

で与えられる．ただし，$G(t) = \int_0^t g(s)ds$, $H(t) = \int_0^t h(s)ds$ とする．一般に，基本解行列を構成できれば，零解が一様漸近安定であるか否かを判別することが可能である．実際に，Coppel の判定法 ([2] を参照) を $X(t)$ に適用すると，零解が一様漸近安定であるための必要十分条件は，ある正の数 ρ と σ が存在し，任意の $0 \le t_1 \le t_2 < \infty$ に対して

$$\int_{t_1}^{t_2} h(s)ds \ge \rho(t_2 - t_1) - \sigma$$

であることが分かる．しかしながら，$e(t) \not\equiv h(t)$ かつ $f(t) \equiv g(t)$ の場合において，$h(t)$ が例え上記の必要十分条件を満足しても，方程式系 (S) の零解が一様漸近安定でない例が存在する ([17, 22] を見よ).

線形微分方程式ですら，一般解を求めることができる方程式は稀であることが知られて以来，これまで，方程式系 (S) やそれを含む微分方程式に関する漸近安定性や一様漸近安定性の研究は盛んに行われてきた ([1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22] を見よ). 近年，Sugie and Onitsuka によって，$e(t) \not\equiv h(t)$ または $f(t) \not\equiv g(t)$ の場合であっても適用可能な零解が一様漸近安定であるための十分条件が与えられた ([16, 22] を参照). この定理を紹介する前に，いくつか重要な関数を定義しておく．連続な実数値関数 $\phi(t)$ を用いて，関数 $\phi_+(t)$ と $\phi_-(t)$ をそれぞれ

$$\phi_+(t) = \max\{0, \phi(t)\} \quad \text{及び} \quad \phi_-(t) = \max\{0, -\phi(t)\}$$

と定める．この関数の定義から

$$\phi(t) = \phi_+(t) - \phi_-(t) \quad \text{かつ} \quad |\phi(t)| = \phi_+(t) + \phi_-(t)$$

の関係が成り立つことに注意する．また，連続な非負値関数 $\phi(t)$ が *integrally positive* であるとは，$\tau_n < \sigma_n < \tau_{n+1}$ かつ $0 < \delta \le \sigma_n - \tau_n$ をみたす任意の数列 $\{\tau_n\}$, $\{\sigma_n\}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} \phi(t)dt = \infty$$

を満足するときを言う．例えば，$\sin^2 t$ は integrally positive である．本論文を通し，$t \ge 0$ において関数 $\psi(t)$ を

$$\psi(t) = 2h(t) + \frac{f(t)}{g(t)} \left(\frac{g(t)}{f(t)} \right)'$$

と定義する．Sugie and Onitsuka は係数行列における対角成分または反対角成分がそれぞれ一致しない場合であっても，適用可能な方程式系 (S) の零解が一様漸近安定であるための十分条件を与えた．

定理 A

関数 $f(t)$, $g(t)$ 及び $h_+(t)$ は何れも $t \geq 0$ において有界であり，$\psi_+(t)$ は integrally positive であると仮定する．このとき

$$\int_0^\infty e_-(s)ds < \infty, \quad \int_0^\infty h_-(s)ds < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^\infty \psi_-(s)ds < \infty \tag{1.1}$$

を満足し，条件

$$t \geq 0 \text{に対して，} f(t)g(t) > 0 \quad \text{かつ} \quad \liminf_{t\to\infty} f(t)g(t) > 0 \tag{1.2}$$

をみたすならば，方程式系 (S) の零解は一様漸近安定である．

定理 A の条件 (1.1) に着目すると，方程式系 (S) の対角成分 $e(t)$, $h(t)$ は何れも正の値と負の値を無限に繰り返すことが許される．一方，条件 (1.2) は，方程式系 (S) の係数行列における反対角成分 $f(t)$, $g(t)$ が十分先の時刻 t において，常に同符号であることを示している．したがって，十分先の時刻において，$f(t)$, $g(t)$ の符号変化は許されない．ここで疑問が生じる．十分先の時刻 t において，反対角成分 $f(t)$, $g(t)$ が符号変化するとき，方程式系 (S) の零解が一様漸近安定となるための十分条件はどのような形か？この疑問に答えるのが本研究で得られた以下の定理である．

定理 1

関数 $f(t)$ 及び $h_+(t)$ は $t \geq 0$ において有界であって，$\psi_+(t)$ は integrally positive とし，条件 (1.1) をみたすとする．また，ある正の数 $k \leq 1 \leq K$ が存在し，$t \geq 0$ に対して

$$k \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq K \tag{1.3}$$

を満足すると仮定する．このとき，ある正の数 ω, Ω, γ 及び $\omega \leq t_{n+1} - t_n \leq \Omega$ を満足する数列 $\{t_n\}$ を選ぶことができ，$t_n \leq t \leq t_n + \omega$ において

$$|g(t)| \geq \gamma \tag{1.4}$$

であるならば，方程式系 (S) の零解は一様漸近安定である．

定理 1 は定理 A を完全に含んでいる．実際，条件 (1.2) が成り立てば，ある正の数 S と k_1 が存在し，$t \geq S$ に対して，$f(t)g(t) \geq k_1$ である．$f(t)$ と $g(t)$ は連続関数であり，

$f(t)g(t) > 0$ であるから，$0 \le t \le S$ において，$f(t)g(t) \ge k_2$ を満足する $0 < k_2 \le k_1$ を選ぶことができる．よって，$t \ge 0$ に対して

$$f(t)g(t) \ge k_2$$

を得る．ここで，$f(t)$, $g(t)$ は有界であるから，ある正の値 $\overline{f}$ と $\overline{g}$ が存在し，$t \ge 0$ において，$|f(t)| \le \overline{f}$ かつ $|g(t)| \le \overline{g}$ である．この事実を用いると，$t \ge 0$ において

$$\frac{f(t)}{g(t)} \ge \frac{k_2}{g^2(t)} \ge \frac{k_2}{\overline{g}^2}$$

が成り立つ．一方，$t \ge 0$ に対して，$k_2 \le f(t)g(t) = |f(t)g(t)| \le \overline{f}|g(t)|$ であるから，$t \ge 0$ において

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{|f(t)|}{|g(t)|} \le \frac{\overline{f}}{|g(t)|} \le \frac{\overline{f}^2}{k_2}$$

となる．したがって，条件 (1.3) 及び (1.4) がみたされるので，定理 1 は定理 A を完全に含んでいると結論づけられる．

第 2 節では，定義と主定理の証明を行う．第 3 節では，主定理の理解を助けるため，反対角成分がそれぞれ符号変化する場合の例をいくつか挙げる．

2　定義と主定理の証明

初期条件 $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ を満足する方程式系 (S) の解を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, x_0, y_0) = (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ で表わす．本研究で使用する定義を以下に記載する．

(i) 方程式系 (S) の零解が漸近安定であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $t_0 \ge 0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ が存在し，任意の $|x_0| + |y_0| < \delta$ と任意の $t \ge t_0$ に対して，$|x(t; t_0, x_0, y_0)| + |y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ であって，任意の $t_0 \ge 0$ に対して，ある $\delta_0(t_0) > 0$ が存在し，任意の $|x_0| + |y_0| < \delta_0$ に対して，$t \to \infty$ のとき，$|x(t; t_0, x_0, y_0)| + |y(t; t_0, x_0, y_0)| \to 0$ であるときを言う；

(ii) 方程式系 (S) の零解が一様漸近安定であるとは，定義 (i) において，δ と δ_0 が t_0 とは独立に選べ，任意の $\eta > 0$ に対して，ある $T(\eta) > 0$ が存在し，$t_0 \ge 0$ と $|x_0| + |y_0| < \delta_0$ ならば，$t \ge t_0 + T$ において，$|x(t; t_0, x_0, y_0)| + |y(t; t_0, x_0, y_0)| < \eta$ であるときを言う．

([2, 13, 20, 23] を参照).

主定理の証明に入る前に，定理 1 の条件を用いていくつか値を定めておく．関数 $f(t)$, $h_+(t)$ の有界性より，ある正の数 $\overline{f}, \overline{h}$ を選ぶことができ，$t \geq 0$ に対して

$$|f(t)| \leq \overline{f} \quad \text{かつ} \quad h_+(t) \leq \overline{h}$$

である．また，条件 (1.1) より，正の値 L と M が存在し

$$L = \int_0^\infty (2e_-(s) + \psi_-(s))ds \quad \text{かつ} \quad M = \int_0^\infty h_-(s)ds$$

である．関数 $\psi_+(t)$ が integrally positive であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+\varepsilon} \psi_+(s)ds > 0$$

であることが知られている．したがって，$t \geq \hat{t}$ において

$$\int_t^{t+1} \psi_+(s)ds \geq l$$

をみたす値 $l > 0$ と $\hat{t} > 0$ が存在する．上記に定めた記号 $\overline{f}, \overline{h}, L, M, l$ 及び $\hat{t}$ は定理 1 の証明において，特に断ることなく使用する．

定理 1 の証明． 定理 1 の証明は 7 つのステップに分割することにより完成する．
ステップ 1： ステップ 1 では，方程式系 (S) の零解が一様安定であることを示す．そのため，$\varepsilon > 0$ に対して

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{k}{Ke^L}}\,\varepsilon \tag{2.1}$$

を定める．明らかに $\delta < \varepsilon$ である．任意の初期時刻及び初期値をそれぞれ $t_0 \geq 0$ 及び $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ と置く．このとき，$t \geq t_0$ かつ $\|\mathbf{x}_0\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ ならば，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ であることを示せば良い．簡単のため，$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 及び $(x(t), y(t)) = \mathbf{x}(t)$ と表す．

いま

$$u(t) = \frac{f(t)}{g(t)} y^2(t) \quad \text{かつ} \quad v(t) = x^2(t) + u(t)$$

と置けば，条件 (1.3) より，$t \geq t_0$ に対して

$$v(t) \geq x^2(t) + ky^2(t) \geq k\|\mathbf{x}(t)\|^2$$

である．$t \geq t_0$ において

$$v'(t) = -2e(t)x^2(t) - \psi(t)u(t) \leq (2e_-(t) + \psi_-(t))v(t)$$

であるから，再び条件 (1.3) より，$t \geq t_0$ に対して

$$v(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t}(2e_-(s) + \psi_-(s))ds\right)v(t_0) \leq e^L v(t_0)$$
$$\leq e^L K(x_0^2 + y_0^2) < Ke^L \delta^2(\varepsilon) = k\varepsilon^2 \qquad (2.2)$$

が成り立つ．したがって，$t \geq t_0$ において

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$$

を得る．故に，方程式系 (S) の零解は一様安定である．ステップ 1 の証明終わり．

以後 6 つのステップでは，方程式系 (S) の零解が一様吸収的であることを示す．

ステップ 2： 一様漸近安定の定義における δ_0 を $1/\sqrt{Ke^L}$ と置く．ステップ 2 では，任意の $\eta > 0$ に対して，$T(\eta)$ を具体的に定める．まずはじめに

$$\underline{v} = k\delta^2(\eta), \quad \mu = \min\left\{\frac{\underline{v}}{2}, \frac{k\gamma^2 \underline{v}\, e^{-2M}}{2(\overline{h}e^{-M} + 3/\omega)^2}\right\} \quad \text{かつ} \quad \tau = \hat{t} + \left[\frac{2(1+L)}{l\mu}\right] + 2$$

と置く．ただし，ω 及び γ は定理 1 の条件 (1.4) に登場する値であり，$\delta(\cdot)$ は (2.1) で与えられた値とする．また，$[c]$ は実数 c 以下の最大の整数として定義する．ここで定められた値 $\underline{v}$, μ 及び τ は何れも η のみに依存して決まる正の値であることに注意する．積分

$$\int_t^{t+\mu\sqrt{k}/(8\overline{f})} \psi_+(s)ds$$

を考える．このとき，積分の上端は η のみに依存する正の値であり，関数 $\psi_+(t)$ は integrally positive であるから

$$\nu = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{4}\int_t^{t+\mu\sqrt{k}/(8\overline{f})} \psi_+(s)ds$$

もまた η のみに依存して決まる正の値である．したがって，条件 (1.1) と併せて考えると，η のみに依存して決まる正の数 σ が存在し，$t \geq \sigma$ に対して

$$\int_t^{\infty}(2e_-(s) + \psi_-(s))ds \leq \min\left\{\frac{\mu}{4}, \frac{\mu\nu}{4}\right\} \qquad (2.3)$$

かつ

$$\int_t^{t+\mu\sqrt{k}/(8\overline{f})} \psi_+(s)ds \geq 2\nu \qquad (2.4)$$

を満足する．上記に定めた値 μ, ν, σ 及び τ を用いて $T(\eta)$ を

$$T = \sigma + \left(\left[\frac{4}{\mu\nu}\right] + 1\right)(2\Omega + \tau)$$

と定義する．ただし，Ω は定理 1 の条件 (1.4) に登場する値である．

ステップ 3: 初期時刻を $t_0 \geq 0$ とし，$\|\mathbf{x}_0\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta_0$ をみたす初期値を $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ とする．点 $(t_0, \mathbf{x}_0)$ を通る方程式系 (S) の解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ を考える．方程式系 (S) の零解が一様吸収的であることを示すためには，ある時刻 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ が存在し

$$\|\mathbf{x}(t^*)\| < \delta(\eta) \tag{2.5}$$

みたすことを示せば十分である．実際，ステップ 1 により，(2.5) を満足すれば，点 $(t^*, \mathbf{x}(t^*))$ を通る方程式系 (S) のすべての解 $\mathbf{x}(t; t^*, \mathbf{x}(t^*))$ は $t \geq t^*$ において

$$\|\mathbf{x}(t; t^*, \mathbf{x}(t^*))\| < \eta$$

をみたす．方程式系 (S) は連続な係数をもつ線形系であるから，解の一意性は保証されている．したがって，t^* 以降の t において，解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ と解 $\mathbf{x}(t; t^*, \mathbf{x}(t^*))$ は一致するので，$t_0 + T \geq t^*$ と併せて考えると，$t \geq t_0 + T$ に対して

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$$

が成り立つ．すなわち，方程式系 (S) の零解は一様吸収的である．今後は方程式系 (S) の零解が一様吸収的であることを示す代わりに，不等式 (2.5) を示すことを証明の目標とする．

背理法を用いて証明するため，$t_0 \leq t \leq t_0 + T$ において

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \delta(\eta)$$

を仮定する．したがって，(1.3) より，$t_0 \leq t \leq t_0 + T$ に対して

$$0 < \underline{v} = k\delta^2(\eta) \leq k\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq v(t) \tag{2.6}$$

である．再び (2.2) を用いれば，$t \geq t_0$ において

$$v(t) \leq e^L K(x_0^2 + y_0^2) < Ke^L \delta_0^2 = 1 \tag{2.7}$$

を得る．

ステップ 4： 任意の区間 $[\alpha_1, \beta_1] \subset [t_0, t_0 + T]$ に対して，$u(t) \geq \mu/2$ ならば $\beta_1 - \alpha_1 < \tau$ である．ただし，μ 及び τ はステップ 2 で与えられた値とする．実際，$t \geq t_0$ において

$$\begin{aligned} v'(t) &= -2e(t)x^2(t) - \psi(t)u(t) \\ &= -2e(t)x^2(t) + \psi_-(t)u(t) - \psi_+(t)u(t) \end{aligned}$$

であることを考慮すると，(2.7) より，$t \geq t_0$ に対して

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi_+(t)u(t) &= -v'(t) - 2e(t)x^2(t) + \psi_-(t)u(t) \\ &\leq -v'(t) + (2e_-(t) + \psi_-(t))v(t) \leq -v'(t) + 2e_-(t) + \psi_-(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

であることが分かる．この不等式を α_1 から β_1 まで積分し，(2.6) 及び (2.7) を用いれば

$$\frac{\mu}{2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\psi_+(s)ds \le \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\psi_+(s)u(s)ds \le -\int_{\alpha_1}^{\beta_1}v'(s)ds + \int_{\alpha_1}^{\beta_1}(2e_-(s)+\psi_-(s))ds$$
$$\le v(\alpha_1)-v(\beta_1)+L < 1+L \tag{2.9}$$

を得る．いま

$$m = \left[\frac{2(1+L)}{l\mu}\right]+1$$

と置く．$m \ge 2(1+L)/(l\mu)$ の関係より，$t \ge \hat{t}$ に対して

$$\int_t^{t+m}\psi_+(s)ds = \int_t^{t+1}\psi_+(s)ds + \int_{t+1}^{t+2}\psi_+(s)ds + \cdots + \int_{t+m-1}^{t+m}\psi_+(s)ds$$
$$\ge lm \ge \frac{2(1+L)}{\mu}$$

が分かる．もしも $\alpha_1 \ge \hat{t}$ であるとき，(2.9) より

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\psi_+(s)ds \le \frac{2(1+L)}{\mu} \le \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+m}\psi_+(s)ds$$

であるので，$\beta_1-\alpha_1 \le m < \tau$ となる．一方，$\alpha_1 < \hat{t}$ のとき，(2.9) より

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\psi_+(s)ds \le \frac{2(1+L)}{\mu} \le \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+m}\psi_+(s)ds \le \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\hat{t}+m}\psi_+(s)ds$$

を得る．したがって，$\beta_1-\alpha_1 \le \hat{t}+m < \tau$ である．故に，ステップ 4 の冒頭の主張が示された．

ステップ 5：任意の区間 $[\alpha_2,\beta_2] \subset [t_0, t_0+T]$ に対して，$u(t) \le \mu$ ならば，$\beta_2-\alpha_2 \le 2\Omega$ である．再び

$$u(t) = \frac{f(t)}{g(t)}y^2(t), \quad v(t) = x^2(t)+u(t) \quad \text{かつ} \quad \mu = \min\left\{\frac{\underline{v}}{2},\ \frac{k\,\gamma^2\,\underline{v}\,e^{-2M}}{2(\overline{h}e^{-M}+3/\omega)^2}\right\}$$

を考慮すると，$\alpha_2 \le t \le \beta_2$ に対して

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)-u(t)} \ge \sqrt{\underline{v}-\mu} \ge \sqrt{\frac{\underline{v}}{2}} \tag{2.10}$$

かつ

$$|y(t)| = \sqrt{\frac{g(t)}{f(t)}u(t)} \le \sqrt{\frac{\mu}{k}} \tag{2.11}$$

が分かる．背理法を用いて示すため，$[\alpha_2,\beta_2] \subset [t_0,t_0+T]$ において，$u(t) \le \mu$ かつ $\beta_2-\alpha_2 > 2\Omega$ と仮定する．条件 (1.4) より，$n \to \infty$ のとき，$t_n \to \infty$ となるから，ある数 $\hat{n} \in \mathbb{N}$ が存在し

$$t_{\hat{n}-1} \le \alpha_2 \le t_{\hat{n}}$$

である．$t_{\hat{n}} - t_{\hat{n}-1} \le \Omega$ より，$\alpha_2 \le t_{\hat{n}} \le t_{\hat{n}-1} + \Omega$ となるから，$\omega \le t_{\hat{n}} - t_{\hat{n}-1} \le \Omega$ 及び $\beta_2 - \alpha_2 > 2\Omega$ を考慮すれば

$$t_{\hat{n}} + \omega \le t_{\hat{n}} + \Omega \le t_{\hat{n}-1} + 2\Omega \le \alpha_2 + 2\Omega < \beta_2$$

を得る．したがって

$$\alpha_2 \le t_{\hat{n}} < t_{\hat{n}} + \omega < \beta_2$$

と評価されるので，$[t_{\hat{n}}, t_{\hat{n}} + \omega] \subset [\alpha_2, \beta_2]$ である．方程式系 (S) の第 2 式より，$t \ge t_0$ に対して

$$y'(t) - h_-(t)y(t) = -g(t)x(t) - h_+(t)y(t)$$

であることに注意する．このとき，(2.10) 及び (2.11) を用いれば，$t_{\hat{n}} \le t \le t_{\hat{n}} + \omega$ において

$$\begin{aligned}\left|\left(\exp\left(-\int_{t_0}^{t} h_-(s)ds\right) y(t)\right)'\right| &\ge \exp\left(-\int_{t_0}^{t} h_-(s)ds\right)(|g(t)||x(t)| - h_+(t)|y(t)|)\\ &\ge e^{-M}\left(\gamma\sqrt{\frac{v}{2}} - \overline{h}\sqrt{\frac{\mu}{k}}\right) \ge \frac{3}{\omega}\sqrt{\frac{\mu}{k}}\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，(2.11) と併せて考えると

$$\begin{aligned}2\sqrt{\frac{\mu}{k}} &\ge |y(t_{\hat{n}} + \omega)| + |y(t_{\hat{n}})|\\ &\ge \left|\exp\left(-\int_{t_0}^{t_{\hat{n}}+\omega} h_-(s)ds\right) y(t_{\hat{n}} + \omega) - \exp\left(-\int_{t_0}^{t_{\hat{n}}} h_-(s)ds\right) y(t_{\hat{n}})\right|\\ &= \left|\int_{t_{\hat{n}}}^{t_{\hat{n}}+\omega}\left(\exp\left(-\int_{t_0}^{t} h_-(s)ds\right) y(t)\right)' dt\right|\\ &= \int_{t_{\hat{n}}}^{t_{\hat{n}}+\omega}\left|\left(\exp\left(-\int_{t_0}^{t} h_-(s)ds\right) y(t)\right)'\right| dt\\ &\ge \frac{3}{\omega}\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,(t_{\hat{n}} + \omega - t_{\hat{n}}) = 3\sqrt{\frac{\mu}{k}}\end{aligned}$$

となるから，これは矛盾である．よって，$\beta_2 - \alpha_2 \le 2\Omega$ を得る．故に，ステップ 5 の冒頭の主張が示された．

ステップ 6： 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，小区間

$$J_i = [t_0 + \sigma + (i-1)(3\Omega + \tau),\ t_0 + \sigma + i(3\Omega + \tau)]$$

を定義する．このとき，各 $i \in \mathbb{N}$ に対する小区間 J_i の長さは $3\Omega + \tau$ である．小区間 J_i を用いると，区間 $[t_0 + \sigma, t_0 + T]$ を

$$[t_0 + \sigma, t_0 + T] = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_{[4/(\mu\nu)]+1}$$

のように分割できる．以後，小区間 J_1 における $u(t)$ の挙動を調べる．まず，$u(t_1) < \mu/2$ を満足する $t_1 \in [t_0+\sigma, t_0+\sigma+\tau] \subset J_1$ が存在することを示す．実際，$t \in [t_0+\sigma, t_0+\sigma+\tau] \subset [t_0, t_0+T]$ において，$u(t) \geq \mu/2$ であると仮定すれば，ステップ 4 の主張から

$$\tau = t_0 + \sigma + \tau - (t_0 + \sigma) = \beta_1 - \alpha_1 < \tau$$

となるので，これは矛盾である．次に，$u(t_2) > \mu$ をみたす $t_2 \in [t_0+\sigma+\tau, t_0+\sigma+3\Omega+\tau] \subset J_1$ が存在することを示す．実際，$t \in [t_0+\sigma+\tau, t_0+\sigma+3\Omega+\tau] \subset [t_0, t_0+T]$ において，$u(t) \leq \mu$ を仮定すると，ステップ 5 の主張より

$$3\Omega = t_0 + \sigma + 3\Omega + \tau - (t_0 + \sigma + \tau) = \beta_2 - \alpha_2 \leq 2\Omega$$

となるので，これは矛盾である．したがって，上記の事実を考慮すると，$u(t)$ の連続性より，$u(\alpha) = \mu/2, u(\beta) = \mu$ かつ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対して

$$\frac{\mu}{2} \leq u(t) \leq \mu \tag{2.12}$$

を満足する区間 $[\alpha, \beta] \subset [t_1, t_2]$ が存在する．よって，(2.3) と (2.7) より

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{2} = u(\beta) - u(\alpha) &= \int_\alpha^\beta u'(s)ds = \int_\alpha^\beta (-\psi(s)u(s) - 2f(s)x(s)y(s))ds \\ &\leq \int_\alpha^\beta (\psi_-(s)v(s) + 2|f(s)x(s)y(s)|)ds \leq \frac{\mu}{4} + 2\overline{f}\int_\alpha^\beta |x(s)y(s)|ds\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち

$$\frac{\mu}{8\overline{f}} \leq \int_\alpha^\beta |x(s)y(s)|ds$$

である．再び，(2.7) を用いると，$t \geq t_0$ において

$$|x(t)| = \sqrt{v(t) - u(t)} < 1 \quad \text{かつ} \quad |y(t)| = \sqrt{\frac{g(t)}{f(t)}u(t)} \leq \sqrt{\frac{v(t)}{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

と評価できるので

$$\frac{\mu\sqrt{k}}{8\overline{f}} < \beta - \alpha$$

を得る．

ステップ 7： ステップ 6 の結論と (2.3), (2.4), (2.8) 及び (2.12) を併せて考えると

$$\begin{aligned}\mu\nu &\leq \frac{\mu}{2}\int_\alpha^{\alpha+\mu\sqrt{k}/(8\overline{f})} \psi_+(s)ds \leq \frac{\mu}{2}\int_\alpha^\beta \psi_+(s)ds \\ &\leq \int_\alpha^\beta \psi_+(s)u(s)ds \leq \int_\alpha^\beta (-v'(s) + 2e_-(s) + \psi_-(s))ds \\ &\leq v(\alpha) - v(\beta) + \int_\alpha^\beta (2e_-(s) + \psi_-(s))ds \leq v(\alpha) - v(\beta) + \frac{\mu\nu}{4}\end{aligned}$$

が分かる．よって

$$v(\beta)-v(\alpha)\le -\frac{3\mu\nu}{4}$$

である．(2.3) と (2.8) を再び用いると

$$v(\alpha)-v(t_0+\sigma)=\int_{t_0+\sigma}^{\alpha} v'(s)ds\le\int_{t_0+\sigma}^{\alpha}(2e_-(s)+\psi_-(s))ds\le\frac{\mu\nu}{4}$$

かつ

$$\begin{aligned}v(t_0+\sigma+3\Omega+\tau)-v(\beta)&=\int_{\beta}^{t_0+\sigma+3\Omega+\tau} v'(s)ds\\&\le\int_{\beta}^{t_0+\sigma+3\Omega+\tau}(2e_-(s)+\psi_-(s))ds\le\frac{\mu\nu}{4}\end{aligned}$$

が分かる．したがって，上記の事実より

$$\begin{aligned}\int_{J_1} v'(s)ds&=v\left(t_0+\sigma+\frac{3e^M}{\overline{h}}+\tau\right)-v(\beta)+v(\beta)-v(\alpha)+v(\alpha)-v(t_0+\sigma)\\&\le\frac{\mu\nu}{4}-\frac{3\mu\nu}{4}+\frac{\mu\nu}{4}=-\frac{\mu\nu}{4}\end{aligned}$$

の評価を得る．

ステップ 6 とステップ 7 の証明と同様の過程を経ることにより，$1\le i\le[4/(\mu\nu)]+1$ において

$$\int_{J_i} v'(s)ds\le-\frac{\mu\nu}{4}$$

が分かるので

$$v(t_0+T)-v(t_0+\sigma)=\sum_{i=1}^{[4/(\mu\nu)]+1}\int_{J_i} v'(s)ds\le-\frac{\mu\nu}{4}\left(\left[\frac{4}{\mu\nu}\right]+1\right)<-1$$

が成り立つ．ところが，(2.7) により

$$v(t_0+T)<v(t_0+\sigma)-1<0$$

となり，これは $t\ge t_0$ において $v(t)\ge 0$ であることに矛盾する．故に，不等式 (2.5) は満足される．以上より，方程式系 (S) の零解は一様安定でかつ一様吸収的であるので，零解は一様漸近安定である．定理 1 の証明終わり． □

3 係数行列の反対角成分が不定符号を許す例

本節では，定理 1 の具体的な例をいくつか挙げる．

例 1

方程式系 (S) の係数が $e(t)=0$, $f(t)=g(t)=\sin t$ 及び $h(t)=\sin^2 t$ をみたすとする．このとき，方程式系 (S) の零解は一様漸近安定である．

明らかに，関数 $f(t)$, $h_+(t)$ は有界であり，(1.3) はみたされる．このとき

$$\psi(t)=2h(t)=2\sin^2 t \quad \text{かつ} \quad e_-(t)=h_-(t)=\psi_-(t)=0$$

となるから，$\psi_+(t)$ は integrally positive であり，条件 (1.1) もみたされる．$|g(t)|=|\sin t|$ より，条件 (1.3) を満足する．故に，定理 1 のすべての条件をみたすので，方程式系 (S) の零解は一様漸近安定である．この例では，係数行列の反対角成分が周期関数である場合を考えた．しかし実際のところは，次の例のように係数行列の反対角成分が周期関数でない場合にも定理 1 は適用できる．

例 2

方程式系 (S) の係数が $e(t)=0$, $f(t)=g(t)=\sin t+\cos\sqrt{2}t$ 及び $h(t)=\sin^2 t$ をみたすとする．このとき，方程式系 (S) の零解は一様漸近安定である．

例 1 と同様の手順で，定理 1 のすべての条件を満足することが確認できる．特に例 2 では，係数行列の反対角成分を周期関数に限らず，概周期関数とした．次に，方程式系 (S) のすべての係数が不定符号となる例を述べる．定数 r を $0<r<1$ をみたす値とする．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，関数 $p(t)$ を

$$p(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{2-r^n}+2(n-1)\left(1-\dfrac{1}{2-r^n}\right) & (2(n-1)\le t<2n-r^n), \\ \dfrac{t}{r^n}+2n\left(1-\dfrac{1}{r^n}\right) & (2n-r^n\le t<2n) \end{cases}$$

と定義する．以下の図 (a) に示すように，$p(t)$ は折れ線グラフを描く．いま，関数 $\sin(p(t)\pi)$ を考えると，関数 $\sin(p(t)\pi)$ は図 (b) に示されるように，十分先の t においても符号変化を繰り返す関数である．ただし，周期関数や概周期関数ではないことに注意しておく．関数 $\max\{0,\sin(p(t)\pi)\}$ は integrally positive であり，$\max\{0,-\sin(p(t)\pi)\}$ は可積分であることも容易に分かる．

例 3

方程式系 (S) の係数が $e(t)=\sin t/(1+t)^2$, $f(t)=g(t)=\sin t+\cos\sqrt{2}t$ 及び $h(t)=\sin(p(t)\pi)$ をみたすとする．このとき，方程式系 (S) の零解は一様漸近安定である．

明らかに，関数 $f(t)$, $h_+(t)$ は有界であって，$f(t) = g(t)$ の関係より，(1.3) をみたす．このとき

$$\psi(t) = 2h(t) = 2\sin(p(t)\pi)$$

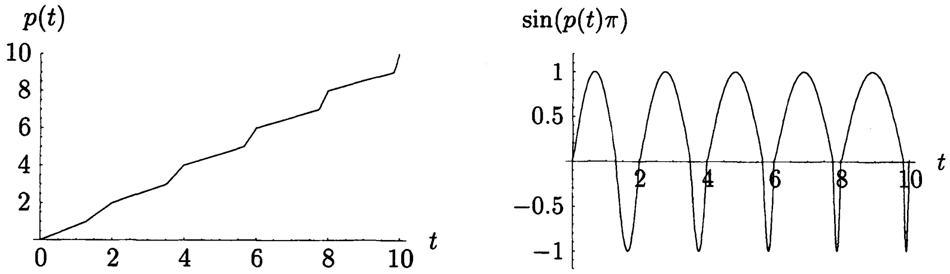
となるから，$\psi_+(t)$ は integrally positive である．また

$$e_-(t) \le \frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{かつ} \quad \psi_-(t) = 2h_-(t) = 2\max\{0, -\sin(p(t)\pi)\}$$

より

$$\int_0^\infty e_-(t)dt = 1, \quad \int_0^\infty h_-(t)dt < \sum_{i=1}^\infty r^i = \frac{r}{1-r}, \quad \int_0^\infty \psi_-(t)dt < \frac{2r}{1-r}$$

が分かるから，条件 (1.1) もみたされる．関数 $|g(t)| = \left|\sin t + \cos\sqrt{2}t\right|$ であるから，条件 (1.3) を満足する．故に，定理 1 のすべての条件をみたすので，方程式系 (S) の零解は一様漸近安定である．この例では，方程式系 (S) のすべての係数が不定符号である場合でも，零解が一様漸近安定となることを示している．



(a) (b)

(a) $r = 0.7$ の場合の $p(t)$ のグラフ; (b) $r = 0.7$ の場合の $\sin(p(t)\pi)$ のグラフ

参考文献

[1] R.J. Ballieu and K. Peiffer, Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x} + f(t, x, \dot{x})\dot{x}^\alpha\dot{x} + g(x) = 0$, J. Math. Anal. Appl. 65 (1978), no. 2, 321–332.

[2] W.A. Coppel, Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations, Heath, Boston, 1965.

[3] L.H. Duc, A. Ilchmann, S. Siegmund and P. Taraba, On stability of linear time-varying second-order differential equations, Quart. Appl. Math. 64 (2006), no. 1, 137–151.

[4] Á Elbert, Linear oscillators with occasionally large damping, Dynam. Systems Appl. 7 (1998), no. 1, 73–84.

[5] L. Hatvani, On the asymptotic stability for a two-dimensional linear nonautonomous differential system, Nonlinear Anal. 25 (1995), no. 9–10, 991–1002.

[6] L. Hatvani, Integral conditions on the asymptotic stability for the damped linear oscillator with small damping, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 2, 415–422.

[7] L. Hatvani, On the effect of damping on the stability properties of the equilibria of nonautonomous systems, (Russian) Prikl. Mat. Mekh. 65 (2001), no. 4, 725–732; translation in J. Appl. Math. Mech. 65 (2001), no. 4, 707–713.

[8] L. Hatvani, T. Krisztin and V. Totik, A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator, J. Differential Equations 119 (1995), no. 1, 209–223.

[9] A.O. Ignatyev, Stability of a linear oscillator with variable parameters, Electron. J. Differential Equations 1997, no. 17, 6 pp. (electronic).

[10] A.O. Ignatyev, On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 1 53–72.

[11] J. Jones Jr., On the asymptotic stability of certain second order nonlinear differential equations, SIAM J. Appl. Math. 14 (1966), 16–22.

[12] J. Karsai, On the asymptotic behaviour of the solutions of a second order linear differential equation with small damping, Acta Math. Hungar. 61 (1993), no. 1–2, 121–127.

[13] J. LaSalle and S. Lefschetz, Stability by Liapunov's direct method, with applications, Mathematics in Science and Engineering, vol. 4, Academic Press, New York-London, 1961.

[14] M. Onitsuka, Non-uniform asymptotic stability for the damped linear oscillator, Nonlinear Anal. 72 (2010), no. 3–4, 1266–1274.

[15] M. Onitsuka, Uniform asymptotic stability for damped linear oscillators with variable parameters, Appl. Math. Comput. 218 (2011) no.4, 1436–1442.

[16] M. Onitsuka and J. Sugie, Global uniform asymptotic stability for half-linear differential systems with time-varying coefficients, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 141 (2011) no.5, 1083–1101.

[17] O. Perron, Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, Math. Z. 32 (1930), no. 1, 703–728.

[18] P. Pucci and J. Serrin, Precise damping conditions for global asymptotic stability for nonlinear second order systems, Acta Math. 170 (1993), no. 2, 275–307.

[19] P. Pucci and J. Serrin, Precise damping conditions for global asymptotic stability for nonlinear second order systems. II, J. Differential Equations 113 (1994), no. 2, 505–534.

[20] N. Rouche, P. Habets and M. Laloy, Stability theory by Liapunov's direct method, Applied Mathematical Sciences, vol. 22, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[21] R.A. Smith, Asymptotic stability of $x'' + a(t)x' + x = 0$, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 12 (1961), 123–126.

[22] J. Sugie and M. Onitsuka, Integral conditions on the uniform asymptotic stability for two-dimensional linear systems with time-varying coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 7, 2493–2503.

[23] T. Yoshizawa, Stability Theory by Liapunov's Second Method, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1966.