数理解析研究所講究録
第1787巻2012年88-104

収束の加速法の歴史

— 17世紀ヨーロッパと日本の加速法 —

東京女子大学　長田 直樹 (Naoki Osada)
Tokyo Woman's Christian University

1 はじめに

日本において関孝和と建部賢弘が加速法を用いたことは、今日では和算研究者の間で広く知られている。本研究では日本より60年ほど早く始まったヨーロッパでの加速法の誕生と発展を見ることにより、関と建部の加速法を数学史の中で位置づける。さらに、建部は関の加速法をどのように理解しどのように発展させたかについて試論を述べる。

加速法は区間列の加速と数列の加速に分けて扱う。数列の加速は、ホイヘンスの定理(リチャードソン補外第1ステップ)、エイトケン Δ^2 法、リチャードソン補外を取り上げる。

収束の加速法の多くは、円周や弧長の計算のなかで発見された。そこで、記号を導入しておく。T_n と U_n は直径1の円に内接及び外接する正 n 角形の周の長さとする [17]。現代の記号を使うと

$$T_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad U_n = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

と書ける。テイラー展開により

$$T_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi\left(1 - \frac{\pi^2}{6n^2} + \frac{\pi^4}{120n^4} - \frac{\pi^6}{5040n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)\right) \tag{1}$$

$$U_n = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi\left(1 + \frac{\pi^2}{3n^2} + \frac{2\pi^4}{15n^4} + \frac{17\pi^6}{315n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)\right) \tag{2}$$

と漸近表示される。

2 区間列の加速法

まず、区間列の加速の定義を与える。

空でない閉区間の列 $\{I_n\}$ が $(I_0 \supset) I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ を満たし、区間の幅が0に収束するとき、(完備性により) ただ1つの点 $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ が存在する。このとき、列 $\{I_n\}$ は s に単調収束するという。

$\mathscr{I}$ を単調収束する閉区間列の集合とし、$T : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ は区間列変換とする。$\{[s_n, t_n]\} \in \mathscr{I}$ に対し $T(\{[s_n, t_n]\}) = \{[u_n, v_n]\}$ と表す。4つの数列 $\{s_n\}, \{t_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}$ は $s_n \leqq u_n < s < v_n \leqq t_n$ を満たし、u_n, v_n は s_n, t_n のみにより決定されるものとする。T が区間列 $\{[s_n, t_n]\}$ を加速するとは

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n - u_n}{t_n - s_n} = 0 \tag{3}$$

を満たすときと定義する。

2.1 加重平均加速法

17世紀の区間列の加速では加重平均加速法が用いられた。

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ は $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$ を満たす関数とする。$\{s_n\}, \{t_n\}$ を同じ極限値 s に収束する正の数列とし、正の数 c, d により漸近表示

$$s_n = s - cg(n) + o(g(n)), \quad \text{as } n \to \infty \tag{4}$$

$$t_n = s + dg(n) + o(g(n)), \quad \text{as } n \to \infty \tag{5}$$

を持つものとする。このとき、2 つの加重平均を

$$a_n = \frac{ds_n + ct_n}{d + c} \tag{6}$$

$$h_n = \frac{d + c}{\dfrac{d}{s_n} + \dfrac{c}{t_n}} \tag{7}$$

によって定義する。(4)(5) より、

$$a_n = s + o(g(n)), \quad h_n = s + o(g(n)), \quad \text{as } n \to \infty$$

が満たされる。(6), (7) をそれぞれ、加重算術平均加速、加重調和平均加速と呼ぶ。

2.2 ウイルブロード・スネル

ヨーロッパではアルキメデス (BC287-BC212) 以来ルドルフ・ファン・クーレン (Ludolph van Ceulen, 1540-1610) に至るまで、円周率は円に内接する正 n 角形と外接する正 n 角形で挟んで計算していた。クーレンは 2^{62} 角形を用いて、36 桁を計算した。その結果は教え子のウイルブロード・スネル (Willebrord Snell, 1580-1626) が 1621 年に出版した "*Cyclometricus*"『測円法』[7] で紹介している

$$3\frac{14159265358979323846264338327950289}{100000000000000000000000000000000000} > \pi$$

$$3\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000} < \pi$$

である。

アルキメデスおよびクーレンの方法を乗り越えたのはスネルである。スネルは『測円法』において、適切な証明をつない 2 つの命題に基づいて

$$\frac{3\sin\theta}{2 + \cos\theta} < \theta < 2\sin\frac{\theta}{3} + \tan\frac{\theta}{3} \tag{8}$$

を導いた。ここで、θ は扇形の中心角である。

(8) において $\theta = \pi/n$ とおくと、

$$\frac{3}{\dfrac{2}{T_n} + \dfrac{1}{U_n}} < \pi < \frac{2}{3}T_{3n} + \frac{1}{3}U_{3n} \tag{9}$$

が成立する。スネルは上下限の多角形の角数を同じにした

$$\frac{3}{\dfrac{2}{T_n} + \dfrac{1}{U_n}} < \pi < \frac{2}{3}T_n + \frac{1}{3}U_n \tag{10}$$

を用いて円周率を計算した。(10) の下限は加重調和平均加速、上限は加重算術平均加速である。

スネルは $n = 1073741824 = 2^{30}$ のとき、

$$3\frac{14159265358979323846264338327950282 93}{1000000000000000000000000000000000000} < \pi$$

$$3\frac{1415926535897932384626433832795028958}{10000000000000000000000000000000000000} > \pi$$

を与えている。桁数及び結果はライデン大学学生のときの指導教授クーレンの結果より 1 桁少ない。幾何学により円周率を求める競争のスネルによる終結宣言とみることもできる。

(1)(2) より (10) の上限は

$$\frac{2}{3}T_n + \frac{1}{3}U_n = \pi\left(1 + \frac{1}{20}\frac{\pi^4}{n^4} + O(\frac{1}{n^6})\right)$$

と漸近表示され、下限は

$$\frac{3}{\dfrac{2}{T_n} + \dfrac{1}{U_n}} = \pi\left(1 - \frac{1}{180}\frac{\pi^4}{n^4} + O(n^{-6})\right)$$

と漸近表示される。

スネルの行った

$$[T_n, U_n] \mapsto \left[\frac{3}{\dfrac{2}{T_n} + \dfrac{1}{U_n}}, \frac{2}{3}T_n + \frac{1}{3}U_n\right] \tag{11}$$

は最初の区間列の加速法である。

(8) の下限はニコラス・フォン・クエス (Nikolaus von Kues, 1401 - 1464)[Nicolaus Cusanus] が

$$\theta \approx \frac{3\sin\theta}{2 + \cos\theta} \tag{12}$$

として用いている [12, p.201]。

2.3 クリスチアーン・ホイヘンス

クリスチアーン・ホイヘンス (Christiaan Huygens, 1629 - 1695) は 1654 年に "*De circuli magnitudine inventa*" 『円の大きさの発見』[1] を出版し、円とその内接正多角形、外接正多角形に関するいくつかの性質を証明した。その中にはスネルが適切な証明をつけずに用いた円弧の上限と下限に関する定理やホイヘンスの定理 (リチャードソン補外第一ステップ) がある。

2.3.1 円弧の長さの上限

ホイヘンスは『円の大きさの発見』の定理 XII において、弧の長さの上限を与えている。

定理 XII 円周上に点 D をとり、直径 AB の延長線上の点 E を長さ ED が半径に等くなるように決める。ED の延長線が直径のもう一方の端点 B における接線を切る長さ BG は、ED の延長線が二度目に円を切り取る弧$\widehat{\mathrm{BF}}$ の長さより大きい。(図 1 参照)

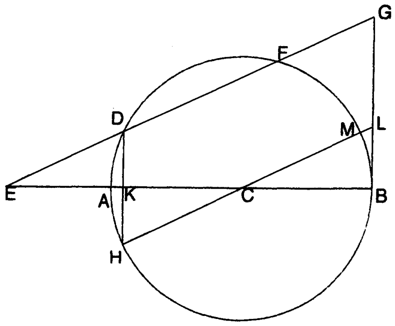

図 1: Huygens Theorem XII [1]

円の中心をC、$\angle\mathrm{BCF} = \theta$とすると定理XIIと図1より、スネルの不等式(8)の上限

$$\theta < 2\sin\frac{\theta}{3} + \tan\frac{\theta}{3}$$

が導かれる。

ホイヘンスは定理XIIの証明の末尾で

> Hoc Theorema alterum est ex iis quibus Cyclometria Willebordi Snellii tota innititur, quæque demonstrasse ipse videri voluit, argumentratione isus quæmeram quæsiti petitionem continet. [1, p.29]
>
> これは，ウイルブロード・スネルの『測円法』全体が依存しているもう一つの定理であり，問題の単なる要請を含むものを用いた議論によって，彼自身どれも証明したかのように見られることを望んでいた。 三浦伸夫訳[20]

と書いている。

2.3.2 円弧の長さの下限

ホイヘンスは定理XIIIにおいて、弧の長さの下限を与えている。

定理XIII 円の直径ABを半径の長さ延長した点Cをとる。点Cを通る直線がBにおける接線を切る長さBLは、直線CLが円を切り取ってできる円弧$\widehat{\mathrm{BE}}$の長さより小さい。(図2参照)

図2において、Oを円の中心、$\mathrm{BO} = r, \angle\mathrm{BOE} = \theta$とおくと、

$$\mathrm{BL} = \frac{3r\sin\theta}{2+\cos\theta}$$

と表せる。定理XIIIよりスネルの不等式(8)の下限が導かれる。

ホイヘンスは定理XIIIの証明の後の説明を

> Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractara sunt. [1, p.31]
>
> 以上すべては，スネルによって『測円法』の中で入念に考察されている。
>
> 三浦伸夫訳[20]

と結んでいる。

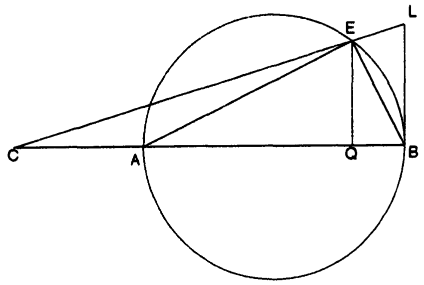

図 2: Huygens Theorem XIII[1]

2.4 和算では

和算家で唯一内接正多角形と外接正多角形を用いて、円周の長さの範囲を与えたのは鎌田俊清(? - ?) である。鎌田は 1722(享保七) 年に『宅間流円理』[2] を執筆した。藤原松三郎 (1881-1946) は「内接多角形と同時に外接多角形を考へて π を挟む數値を出したのは、和算ではこの書以外にはない。」[15, p.408] と指摘している。鎌田は『宅間流円理』第一巻において

$$T_{2^{44}} < \pi < U_{2^{44}}$$

により

$$3.14159265358979323846264336658 < \pi < 3.14159265358979323846264341667$$

を求め、上限 (外周) と下限 (内周) の相加平均 (均周)

$$\frac{1}{2}(T_{2^{44}} + U_{2^{44}}) = 3.1415926535897932384626433391625$$

の小数第 26 位を四捨五入した 3.14159265358979323846264334 を円周率の近似値 (周直) とした。

鎌田の方法は n^{-2} の項が消去されないので加速ではない。

3 ホイヘンスの定理

収束する数列 $\{s_n\}$ が未知の定数 c, d により

$$s_n = s + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

と表されているとき、

$$t_n = s_{2n} + \frac{s_{2n} - s_n}{3} = s - \frac{d}{4n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

が成り立つ。t_n により s_n の n^{-2} の項を消去する方法を、I. ニュートンに従い (3.2 節参照)、ホイヘンスの定理とよぶ。5 節で述べるリチャードソン補外の第 1 ステップである。

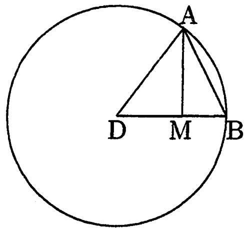

図 3: Huygens Theorem XVI

3.1 クリスチアーン・ホイヘンス

ホイヘンスは『円の大きさの発見』において 3 つのホイヘンスの定理を与えている。円の面積について定理 V、円周の長さについて定理 VII、弧長について定理 XVI である。

定理 V 円の面積を S、円に内接する正 n 角形の面積を S_n とすると

$$S_{2n} + \frac{1}{3}(S_{2n} - S_n) < S$$

が成り立つ。

定理 VII 円周の長さを C、円に内接する正 n 角形の周の長さを T_n とすると

$$T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) < C$$

が成り立つ。

定理 XVI 半円より小さな任意の弧の長さを a、正弦 AM の長さを s、弦 AB の長さを s' とすると

$$s' + \frac{1}{3}(s' - s) < a < s' + \frac{1}{3}(s' - s)\frac{4s' + s}{2s' + 3s} \tag{13}$$

が成り立つ。(図 3 参照)

(13) から

$$T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) < \pi < T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)\frac{4T_{2n} + T_n}{2T_{2n} + 3T_n} \tag{14}$$

が従う。(1) より、(14) の上限と下限の漸近評価が得られる。

$$T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \pi\left(1 - \frac{\pi^4}{480n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)$$
$$T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)\frac{4T_{2n} + T_n}{2T_{2n} + 3T_n} = \pi\left(1 + \frac{\pi^6}{22400n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)\right)$$

(14) の上限については [24] を見よ。

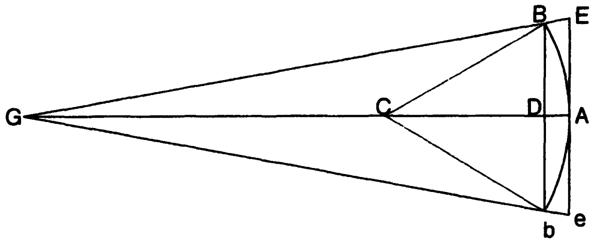

図 4: Epistola Prior [9]

3.2 アイザック・ニュートン

アイザック・ニュートン (Isaac Newton, 1642-1727(旧)) はホイヘンスの定理 (リチャードソン補外第 1 ステップ) に関し少なくとも二度言及している。その 1 つは、オルデンバーク経由でライプニッツに宛てた "*epistola prior*" 『前の手紙』(1676 年 6 月 13 日 (旧) 付け) である。

弦 A と弧の長さが半分の弦 B が与えられたとき、弧の長さ z の近似値を A, B を用いて表すことを考えている。C を扇形 CbAB の中心、半径を r とする。$A = \mathrm{Bb}, B = \mathrm{AB}, z = \mathrm{arc\ bAB}, \angle\mathrm{ACB} = \theta$ とおく。ニュートンは $z = 2r\theta = 2r\sin^{-1}\frac{A}{2r}$ より、

$$A = z - \frac{z^3}{4\times 6r^2} + \frac{z^5}{4\times 4\times 120r^4} - \&c,$$
$$B = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{2\times 16\times 6r^2} + \frac{z^5}{2\times 16\times 16\times 120r^4} - \&c.$$

から z^3/r^2 を消去し、

$$8B - A = 3z - \frac{3z^5}{64\times 120r^4} + \&c,$$

を与えている。そして、次のように述べている。

> hoc est $\dfrac{8B-A}{3} = z$ errore tantum existente $\dfrac{z^5}{7680r^4} - \&c$ in excessu. Quad est Theorema Hugenianum. [9, p.30].
>
> すなわち、$\dfrac{1}{3}(8B-A) = z$、誤差は $\dfrac{z^5}{7680r^4} - \&c$ を超えるだけとなる。これはホイヘンスの定理である。

ニュートンは続けてホイヘンスが与えた弧の長さの下限をさらに精密にしている。

図 4 において、円の直径を d、矢 AD を x とし、G を AC の延長線上に

$$\mathrm{AG} = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$$

を満たすようにとる。そして

$$\widehat{\mathrm{AB}} - \mathrm{AE} = \frac{16}{525}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{5}{2}}}$$

を導き、

> errore tantum existente $\dfrac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$+vel−&c; multò minore scilicet quam Theoremate Hugenij.

[9, p.30].

誤差はただの $(16x^3/525d^3)\sqrt{dx} \pm \&c$ で、ホイヘンスの定理より確かに小さい。

とのべている。$\angle \mathrm{ACB} = \theta$ とおき、現代的に表す [13] と

$$\mathrm{AE} = \frac{d \sin\theta(14+\cos\theta)}{2(9+6\cos\theta)} = \frac{d}{2}\left(\theta - \frac{1}{2100}\theta^7 + \frac{1}{18000}\theta^9 + O(\theta^{11})\right)$$

となる。ニュートンの方法は、級数展開し低次の項を消去するというものであるが、リチャードソン補外とは異なり体系的ではない。

17 世紀後半のヨーロッパの数学者のコミュニティでは、リチャードソン補外第 1 ステップはホイヘンスの定理 (Theorema Hugenianum) として認識されていたと言える。

4 エイトケン Δ^2 法

最も有名な加速法 (数列変換) の一つエイトケン Δ^2 法 (以下では Δ^2 法という) は

$$\begin{aligned}
t_n &= s_n - \frac{(s_{n+1}-s_n)^2}{s_{n+2}-2s_{n+1}+s_n} \left(= s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n}\right) \\
&= s_{n+1} + \frac{(s_{n+1}-s_n)(s_{n+2}-s_{n+1})}{(s_{n+1}-s_n)-(s_{n+2}-s_{n+1})} \left(= s_{n+1} + \frac{\Delta s_n \Delta s_{n+1}}{\Delta s_n - \Delta s_{n+1}}\right) \\
&= s_{n+2} - \frac{(s_{n+2}-s_{n+1})^2}{s_{n+2}-2s_{n+1}+s_n} \left(= s_{n+2} - \frac{(\nabla s_{n+2})^2}{\nabla^2 s_{n+2}}\right) \\
&= \frac{s_n s_{n+2} - s_{n+1}^2}{s_{n+2}-2s_{n+1}+s_n}
\end{aligned}$$

により定義される。(右辺の四式は数学的に同値である。最後の式は数値計算の際、けた落ちが生じやすい。)

関孝和が 1680(延宝八) 年に『立円率解』で Δ^2 法を用いたのが最初の適用である。ヨーロッパでは、1926 年にアレキサンダー・クレイグ・エイトケン (Alexander Craig Aitken, 1895 - 1967) [10] が代数方程式の絶対値最大の根を求める過程 (ベルヌーイ (Daniel Bernoulli) 法) で Δ^2 法を用いたのが、加速法としての最初の使用である。Δ^2 法の歴史はブレザンスキー [11](関孝和に対する最初の言及がある。) を見よ。

4.1 関孝和

関孝和 (? - 1708) は Δ^2 法 (関は名前をつけてないが建部賢弘は増約術と呼んでいる。) を

1. 円周の計算
2. 弓形の弧長の計算
3. 球の体積

において用いている。いずれも没後 1712(正徳二) 年に出版された『括要算法』巻貞 [5] に現れるが、球の体積への適用は 1680(延宝八) 年に執筆した『立円率解』[4] に遡ることができる。したがって、関が Δ^2 法を発見したのは、1680 年以前と考えられる。

4.1.1 円周の長さの計算

関は $s_n = T_{2^n}(n = 2, 3, \ldots, 17)$ を計算し

$$s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})}$$

により定周 (円周率の有理近似を求める際の基準になる数 [23]) を求めた。

$$t_n = s_{n+1} + \frac{(s_{n+1} - s_n)(s_{n+2} - s_{n+1})}{(s_{n+1} - s_n) - (s_{n+2} - s_{n+1})}$$

とおくと

$$t_n = \pi \left(1 + \frac{\pi^4}{1920n^4} + \frac{11\pi^6}{516096n^6} + O(n^{-8}) \right). \tag{15}$$

となるので、Δ^2 法は $\{s_n\}$ を加速する。さらに、不等式

$$s_n < \pi < t_{n-2} \tag{16}$$

が成り立つ。関は (16) について気がついていた可能性はあるが、真相は分からない。

Δ^2 法が上限を与え、ホイヘンスの定理が下限を与えること、すなわち

$$s_{n-1} + \frac{s_n - s_{n-1}}{1 - \frac{1}{4}} < \pi < t_{n-2} \tag{17}$$

の成立を加藤平左エ門 (1891 - 1976)[18, pp.196-198] は述べている。加藤は周と周冪の混乱があり証明は正しくないが、真島 [19] は加藤の誤りを訂正している。真島は (17) の下限を「(関は) そろばんの上で計算したであろうと推察される。」と述べている。真島の推測が証明されると、関はホイヘンスの定理も得ていたことになる。建部賢弘が『綴術算経』(1722) で

> 始関氏増約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ルコトヲ理會シテ一遍ニシテ止ム故ニ十三萬七十二角ニ到ル截周ヲ十五六位以ノ眞數ヲ究メ得タリ今累遍増約ノ術ヲ用ルコトヲ探リ會シテ千二十四角ニ到ル截周冪ヲ以テ四十餘位ノ眞數ヲ究ム是亦首ヨリ増約累遍ヲ用ルコトヲ察スヘカラス一遍ノ増約ヲ用テ後玄ク探テ累遍スルコトヲ會セリ [8]

書いていることから、建部がホイヘンスの定理を含むリチャードソン補外を発見したとする従来の定説 (筆者が 5.1 節で述べるのもこの枠内である。) が覆る。今後の研究が必要であろう。

4.1.2 弧長の計算

『括要算法』巻貞では、円周率の計算に続き、弧長の長さを直径一尺 (10 寸)、矢の長さ一寸、二寸、三寸、四寸、四寸五分に対する弧長を計算している。円周の長さを求めるのと同様に弦 $2, 4, 8, 16, \ldots, 32768 (= 2^{15})$ 個を内接させ、それぞれの弦の長さの和 $s_1, s_2, \ldots, s_{15}$ を計算し、

$$s_{14} + \frac{(s_{14} - s_{13})(s_{15} - s_{14})}{(s_{14} - s_{13}) - (s_{15} - s_{14})}$$

により弧長を求めている。

4.1.3　球の体積の導出

関は『立円率解』において、球の体積の公式を導出するにあたり Δ^2 法を用いている。

直径 $D = 10$(寸) の球を赤道に平行な等間隔の平面で m(m は偶数) 分割する。各切片に対し上底と下底の直径の冪 (弦冪) の和の半分に厚さを掛けた値を截積とすると、截積の和は

$$v_m = 2\sum_{i=1}^{m/2}\frac{D}{2m}\left(4\frac{(i-1)D}{m}\left(D-\frac{(i-1)D}{m}\right)+4\frac{iD}{m}\left(D-\frac{iD}{m}\right)\right), \tag{18}$$

となる。関は $m = 50, 100, 200$ の 3 通りを計算し

$$a = v_{50} = 666.4,\quad b = v_{100} = 666.6,\quad c = v_{200} = 666.65.$$

をあたえた。a, b, c をそれぞれ初積、中積、後積と名付けている。分割を無限大にしたときの値を約積という。約積は球の体積を $\pi/4$ で約した値になることから命名されたと考えられる。

$$v_m = \frac{2D^3}{3} - \frac{2D^3}{3m^2}$$

より、約積の値は $\lim_{n\to\infty} v_n = 2D^3/3$ となる。

約積を求める部分の原文と書き下し文 (現代かな使い) を次に示す。

> 列初積與中積差以中積與後積差相乘之得數寄位　列初積與中積差内減中積與後積差餘爲法以中積相乘之得數加入寄位共得數爲實如法而一不滿者各以五釐約之得六百六十六寸三分寸之二爲約積也　[4]
>
> 初積と中積の差を列し中積と後積の差をもってこれを相乗し得る数を位に寄す。初積と中積の差を列し中積と後積の差を内減し余を法となす。中積をもってこれに相乗し得る数を加え入れ位に寄す。共に得る数を実となし、法の如く而も一にして満たざるは各五厘を持ってこれを約し、六百六十六寸三分寸之二を得て約積となす也。

a, b, c を初積、中積、後積とするとき、関は約積を

$$\frac{((b-a)-(c-b))b+(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}\left(= b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}\right)$$

により求めている。a, b, c は

$$a = \frac{2D^3}{3} - \frac{2D^3}{3m^2},\quad b = \frac{2D^3}{3} - \frac{D^3}{6m^2},\quad c = \frac{2D^3}{3} - \frac{D^3}{24m^2},$$

と表せる ($m = 50, D = 10$) ので

$$\frac{2D^3}{3} - \frac{D^3}{6m^2} + \frac{\frac{D^3}{2m^2}\frac{D^3}{8m^2}}{\frac{D^3}{2m^2}-\frac{D^3}{8m^2}} = \frac{2D^3}{3} - \frac{D^3}{6m^2} + \frac{D^3}{6m^2} = \frac{2D^3}{3}.$$

となる。すなわち Δ^2 法は真値を与えている。球の切り口における正方形と円の面積比は $1 : \pi/4$ であるので、球の体積 (定積) は約積に $\frac{1}{4}\pi$ を乗じたものになる。そうして球の体積が $\frac{1}{6}\pi D^3$ となることを導いている。

4.2 建部賢弘と松永良弼の Δ^2 法の理解

Δ^2 法について関孝和は術文しか残していない。関の考えに迫るため、関の弟子たちが Δ^2 法をどのように理解していたかを見てみる。

4.2.1 建部賢弘『大成算経』

建部賢弘 (1664-1739) が『綴術算経』探円数第十一の割注で

> 其求截周冪術及求之數載于圓率故今畧之 [8]
>
> その截周冪を求める術及び求める所の数、円率に載せた故今これを略す。

と書いていること、および建部賢明『建部氏伝記』から、『大成算経』巻之十二の円率第一は建部賢弘が 1695 年頃までに執筆した原稿に、賢明が 1701 年以降に手を加えたと考えられる。一方、立円率第三は、方法と数値が関の『立円率解』に一致していることより、関の原稿に建部賢弘 (および賢明) が手を加えたものと考えられる。

Δ^2 法は『大成算経』巻之十二立円率第三において球の体積の導出に用いられている。『大成算経』巻之十二立円率第三では約積と定積をまとめて次のように記述されている。

> 以初積減中積爲前差以中積減後積爲後差以兩差依增約術得數加中積得約積以圓周率相乘以四箇圓徑率除之得定積也 [6]
>
> 初積を以て中積を減じ前差と為す。中積を以て後積を減じ後差と為す。両差を以て増約術に依りて得る数に中積を加え約積を得る。円周率を以て相乗し四箇の円径率を以て除し定積を得る也。

a, b, c を初積、中積、後積とするとき、$b-a$ を前差、$c-b$ を後差と呼び、

$$\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$$

を求めることを増約術と呼んでいる。

建部賢弘は『綴術算経』に、

> 其截周冪四角以上ヲ以テ逐テ前段ト相減シテ餘ヲ各一差トス後差ヲ以テ前差ヲ除シ探ルニ逐差ノ數ノ四分之一ノ極限ナルコトヲ會ス即增約ノ術ニ依テ約法ノ内一ヲ減シテ餘三ヲ以テ各一差ヲ約メ各其段ノ截周冪ニ加テ一遍約周冪トス [8]

と書いている。「前差」「後差」を数列の連続する 3 項の 2 つの差分としている。増約は無限等比級数の和を求めることを表しているので、a, b, c を無限等比級数の連続する部分和とみなしていると解釈できる。したがって、

$$a = k(1+r+r^2+\cdots+r^{n-2}), \quad b = k(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}), \quad c = k(1+r+r^2+\cdots+r^n)$$

としたとき

$$kr^n + kr^{n+1} + \cdots = \frac{kr^n}{1-r}$$

を求めることが増約術となる。

4.2.2 松永良弼『算法集成』

『算法集成』と題する著者名のない写本がある。巻八、九は『括要算法』巻貞の解説である。藤原松三郎は「特に求弧術を註解するに用ひられた招差法は良弼の垜疊招差新術にある方法で、そのうちにある述語を用ひてゐることからも、起源解が良弼の著なることが推知される」「次に巻 8,9 すなはち起源解の解説を述べよう。算法集成巻八 (起源解の坤巻) は圓率起解、弧術起解より成り、括要算法貞巻の環矩術と求弧術との解説である。」[14, pp.534-535] と述べている。『算法集成』巻八、九は松永良弼著と考えられている。

『算法集成』巻八 [3] に $a, b = a + ar, c = a + ar + ar^2$ から

$$b + \frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)} = \frac{a}{1-r}$$

を導くための「解術」「又術」「別術」なる 3 つの解説がある。「解術」は

$$\frac{a}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a}{1-r}$$

である。初項と二項から得られるので Δ^2 法の説明として適切ではない。次の「又術」は $b-a = ar$(角), $c-b = ar^2$(亢) から $(b-a)-(c-b) = ar - ar^2$ が成り立つので、$((b-a)-(c-b))/(b-a) = 1-r$ より $1/(1-r) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$ を得て

$$b + \frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)} = a + ar + ar^2(1 + r + r^2 + \cdots)$$

を導いている。「又術」は数列の 3 項が無限等比級数の部分和の最初の 3 項のときのみ「極数」(級数の和) を与えるのでこれも適切な説明ではない。

数列の 3 項が無限等比級数の部分和の連続する 3 項のときに適用できる解釈が「別術」である。影印を図 5 に示し、活字に起こした。式は傍書法で表されており、たとえば「| 増　卜子率」は「増 − 子 × 率」を意味している。

又別術曰角亢相乗ノ得数爲実
　| 子巾率再
前術以法爲法
　　| 増　卜子率巾
　此実法形ヲ見ルニ　| 子率巾　ノ原数ノ得増数実ト
　法各子ト率ト同数ナリ故増数形如左
実如法而一得
| 子率巾　| 子率再　| 子率三　| 子率四　| 子率五
加入乙得定周
| 子　| 子率　| 子率巾　| 子率再　| 子率三　| 子率四　| 子率五
故本術　是括要算法ノ術而前記本術是也

$(b-a)(c-b) = a^2r^3$(角亢相乗ノ得数) を $(b-a)-(c-b) = ar - ar^2$(前術ノ法) で割り

$$\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)} = \frac{ar^2}{1-r} = ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6$$

を得る。b(乙) を加え、定周

$$b + \frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6$$

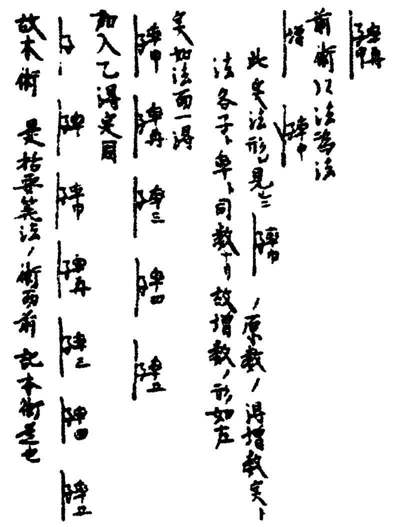

図 5: 『算法集成』八 (七丁ウ) 岡本写 0091

を得る。a が無限等比級数の初項でなくても成立するのだが、松永良弼は a が初項の場合に関の増約術により極限が得られることを述べ、「是括要算法ノ術」と断言している。

藤原松三郎 [14] は、「松永良弼の起源解なる稿本によれば、[求定周は] 増約術によったものである。」として、『起源解』(『算法集成』巻八) の「別術」による解説をつけている。小川 [27] は三術すべて紹介し、「松永の当時の立場から関の増約術を説明したものと見るのが妥当かもしれない」と述べている。ホリウチ [16, p.248] は、無限等比級数の部分和の連続する 3 項に対し別術を適用したものを紹介している。

『算法集成』巻八に記された「別術」は関の教えというよりは、関の孫弟子世代による証明といえよう。

5 リチャードソン補外

数列 $\{s_n\} \in \mathscr{S}$ は既知の定数列 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, (1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_m|)$ と (未知の) 定数列 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ により漸近表示

$$s_n = s + c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_3\lambda_3^n + \ldots + c_m\lambda_m^n + o(\lambda_m^n), \tag{19}$$

されているとする。

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し数列 $\{T_{n-k}^{(k)}\}$ を

$$\begin{aligned} T_n^{(0)} &= s_n, \\ T_{n-k}^{(k)} &= T_{n-k+1}^{(k-1)} + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}(T_{n-k+1}^{(k-1)} - T_{n-k}^{(k-1)}), \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{20}$$

により定義する。

数列 $\{s_n\}$ から $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots$ の項を順に消去し数列 $\{T_{n-k}^{(k)}\}$ を得る操作をリチャードソン補外という。数列が(未知の)定数列 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ により

$$s_n = s + \frac{c_1}{n^2} + \frac{c_2}{n^4} + \frac{c_3}{n^6} + \ldots + \frac{c_m}{n^{2m}} + o(n^{-2m}) \tag{21}$$

と書けているときは、2 冪の部分列 $\{s_{2^n}\}$ は (19) で $\lambda_j = 2^{-2j}$ とおいたものになる。このとき、リチャードソン補外は $n = 1, 2, \ldots$ に対し

$$\begin{aligned} &T_n^{(0)} = s_n, \\ &T_{n-k}^{(k)} = T_{n-k+1}^{(k-1)} + \frac{1}{2^{2k}-1}(T_{n-k+1}^{(k-1)} - T_{n-k}^{(k-1)}), \quad k = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{22}$$

となる。

建部賢弘が 1695 年頃『大成算経』の草稿でリチャードソン補外を用いたのが最初の適用である。これについては、5.1 節で述べる。

ヨーロッパではセジェー (Jacques Frédéric Saigey, 1797-1871) が 1859 年に出版した "*Problèmes d'arithmétique et exercises de cacul du second degré avec les solutions raisonnées*" 『算術の問題と計算練習』にリチャードソン補外の最初の適用が見られる。セジェーは建部と同様、円に内接する正 2,4,8,16,32,64 角形 (建部は 512 角形まで) にリチャードソン補外を適用し、円周率を 13 桁求めている。詳細はダッカ [13] を見よ。1927 年ルイス・フライ・リチャードソン (Lewis Fry Richardson, 1881-1953) は [25] において、(20) および (22) を扱っている。そのため、数列変換 $\{s_n\} \mapsto \{T_{n-k}^{(k)}\}$ はリチャードソン補外と呼ばれる。

5.1 建部賢弘『大成算経』

『大成算経』巻之十二円率第一と弧率第二に累遍増約術 (リチャードソン補外) が現れる。『大成算経』巻之十二円率第一「定周」では

> 各置所求截周冪逐減前件截周冪爲諸件一遍差依増約術求一遍約法除一遍諸差得數各加毎件截周冪得諸件一遍約周冪 [6]
>
> 各求める所の截周冪を置き、前件截周冪を逐減し諸件一遍差となす。増約術に依りて、一遍約法を求め一遍諸差を除き、得る数を、毎件截周冪に加え、諸件一遍約周冪を得る。

としている。

$s_n = T_{2^n}^2$ を截周冪とし、$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n$ を一遍差とする。$\Delta s_n / \Delta s_{n+1}$ が 4 に近づくので、関の増約術 (Δ^2 法)

$$s_{n+1} + \frac{(s_{n+1} - s_n)(s_{n+2} - s_{n+1})}{(s_{n+1} - s_n) - (s_{n+2} - s_{n+1})} = s_{n+1} + \frac{s_{n+1} - s_n}{\dfrac{s_{n+1} - s_n}{s_{n+2} - s_{n+1}} - 1}$$

において $(s_{n+1} - s_n)/(s_{n+2} - s_{n+1})$ を極限 4 で置き換え、

$$T_n^{(1)} = s_{n+1} + \frac{s_{n+1} - s_n}{4 - 1}$$

を得ている。小川 [21, p.21] が同様のことを指摘している。右辺第 2 項の分母 $4 - 1$ を一遍約法と呼んでいる。続いて

$$T_{n+1}^{(1)} + \frac{(T_{n+1}^{(1)} - T_n^{(1)})(T_{n+2}^{(1)} - T_{n+1}^{(1)})}{(T_{n+1}^{(1)} - T_n^{(1)}) - (T_{n+2}^{(1)} - T_{n+1}^{(1)})} = T_{n+1}^{(1)} + \frac{T_{n+1}^{(1)} - T_n^{(1)}}{\dfrac{T_{n+1}^{(1)} - T_n^{(1)}}{T_{n+2}^{(1)} - T_{n+1}^{(1)}} - 1}$$

において $(T^{(1)}_{n+1}-T^{(1)}_n)/(T^{(1)}_{n+2}-T^{(1)}_{n+1})$ を極限 16 で置き換え、

$$T^{(2)}_n = T^{(1)}_{n+1} + \frac{T^{(1)}_{n+1}-T^{(1)}_n}{16-1}$$

を導いている。以下同様。

この算法を『大成算経』では命名していないが、『綴術算経』において、累遍増約術と呼んでいる。累遍増約術は今日のリチャードソン補外 (22) そのものである。

6 おわりに

ヨーロッパではアルキメデス以来L. ファン・クーレンまで、円周の長さは内接正多角形と外接正多角形で挟んで円周の長さの上限と下限を計算していた。日本では村松茂清、村瀬義益が円に内接する正多角形を用いて円周率を計算した。

これを打ち破ったのがヨーロッパではW. スネル (1621)、日本では関孝和 (1680) である。スネルは加重平均法、関は Δ^2 法という加速法を用いた。スネルは適切な証明をつけず、関は証明も説明も残していない。スネルの方法にユークリッド幾何の手法で証明を付けたのはライデン大学の後輩C. ホイヘンスであった。関の方法に説明をつけたのは弟子の建部賢弘 (『大成算経』『綴術算経』) と孫弟子の松永良弼 (『算法集成』) であった。松永は「数列が無限等比級数の第 1, 2, 3 部分和であれば、Δ^2 法は正確な値を与える」を証明した。松永の証明方法は無限等比級数の連続する 3 つの部分和についてそのまま適用できる。

ホイヘンスの定理 (リチャードソン補外第 1 ステップ) はホイヘンスがユークリッド幾何の手法で証明 (1654) を付けて与えた。I. ニュートンはホイヘンスの定理を解析的方法で扱った。級数展開し低次の項を消去する加速法はニュートンに始まる。しかしながら、ニュートンの方法はリチャードソン補外のように体系的ではない。

Δ^2 法 (建部は増約術と呼んでいる) は関孝和 (1680) が発見した。ヨーロッパで加速法として Δ^2 法を最初に用いたのはA.C. エイトケン (1926) である。

建部賢弘 (c.1695) は『大成算経』において世界で最初にリチャードソン補外 (累遍増約術) を用いた。建部は差分の比を数値として観察し、関の Δ^2 法を改良して帰納的にリチャードソン補外に到達した。

謝辞

三浦伸夫先生にはホイヘンスが証明の末尾に書いたラテン語を日本語に翻訳して頂きました。森本光生先生には建部賢弘の累遍増約術についてご討論頂きました。小寺裕先生は宅間流円理巻一 [2] のコピーを提供して頂きました。ここに記して感謝いたします。

参考文献

18 世紀以前の原典

[1] C. Huygens, De circuli magnitudine inventa, 1654. Kessinger Legacy Reprints

[2] 鎌田俊清、宅間流円理巻一、東京大学付属図書館

[3] 松永良弼、算法集成八、東北大学附属図書館、岡本写 0091

[4] 関孝和、立円率解、東北大学附属図書館、狩野 7.20634.1

[5] 関孝和、括要算法、京都大学、

[6] 関孝和・建部賢明・建部賢弘、大成算経巻之十二円法、東京大学、T20:61

[7] W. Snellius, Cyclometricus, 1621. Kessinger Legacy Reprints

[8] 建部賢弘、綴術算経、国立公文書館内閣文庫、194-0214 (影印の一部は [21][22] に掲載されている。)

[9] H.W. Turnbull, The Correspondencs of Isaac Newton, vol.2, Cambridge University Press, 1960.

19 世紀以降の原典および二次資料

[10] A.C. Aitken, On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser A 46(1926), 289–305.

[11] C. Brezinski, Introduction and Historical Survey, in J.P. Delahaye, Sequence Transformations, Springer, 1988

[12] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Zweiter band, Leibzig, 1913.

[13] J. Dutka, Richardson extrapolation and Romberg integration, Historia Mathematica, 11(1984), 3-21.

[14] 藤原松三郎、明治前日本数学史巻二 (新訂版)、井上書店、1979

[15] 藤原松三郎、明治前日本数学史巻三 (新訂版)、井上書店、1979

[16] A. Horiuchi, Translated by S. Wimmer-Zagier, Japanese mathematics in the Edo Period (1600-1868), Birkhäuser, 2010, Les Mathématiques japonaises à l'éoque d'Edo 1600-1868, J. Vrin, Paris,1994.

[17] D.C. Joyce, Survey of extrapolation process in numerical analysis, SIAM Rev. 13(1971), 435-490.

[18] 加藤平左エ門、算聖関孝和の業績、槙書店、1972

[19] 真島秀行、関孝和の円周率の計算についての注意、数理解析研究所講究録、1625(2009), 192-198.

[20] 三浦伸夫、私信、2011 年 11 月 22 日

[21] 小川束・平野葉一、数学の歴史、朝倉書店、2003

[22] 小川束・佐藤健一・竹之内脩・森本光生、建部賢弘の数学、共立出版、2008

[23] 長田直樹、関孝和の円周率の計算、数理解析研究所講究録、1625(2009), 200-211.

[24] O. Østerby, Archimedes, Huygens, Richardson and Romberg, December 20, 2000, `http://www.daimi.au.dk/~oleby/notes/arch.ps`

[25] L.F. Richardson, The differed approach to the limit, Part I – single Lattice, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser A 226(1927), 299-349.

[26] F. Rudio, Archimedes,Huygens,Lambert,Legendre. Vier Abhandlungen Über die Kreismessung, Teubner, 1892.

[27] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一、関孝和論序説、岩波書店、2008